PERSAMAAN DIFFERENSIAL MATEMATIKA FISIKA

Misbah | Samuel Juliardi Sinaga | Nurlaela Muhammad
Nadrah | Ismadi Sihombing | Kevin William Andri Siahaan
Ruben Cornelius Siagian

PERSAMAAN DIFFERENSIAL
MATEMATIKA FISIKA

PERSAMAAN DIFFERENSIAL MATEMATIKA FISIKA

Misbah, S.Pd., M.Pd
Samuel Juliardi Sinaga, S.Pd., M.Pd
Nurlaela Muhammad, S.Pd., M.Pd
Dr. Nadrah, M.Pd
Ismadi Sihombing, S.Pd., M.Pd
Kevin William Andri Siahaan
Ruben Cornelius Siagian

Rumah Cemerlang

PERSAMAAN DIFFERENSIAL MATEMATIKA FISIKA

Penulis:
Misbah, S.Pd., M.Pd
Samuel Juliardi Sinaga, S.Pd., M.Pd
Nurlaela Muhammad, S.Pd., M.Pd
Dr. Nadrah, M.Pd
Ismadi Sihombing, S.Pd., M.Pd
Kevin William Andri Siahaan
Ruben Cornelius Siagian

Editor:
Dr. Sepriandison Saragih. M.Si

Cetakan Pertama: September 2022

Cover: Tim Kreatif PRCI

Tata Letak: Tim Kreatif PRCI

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
ANGGOTA IKAPI JAWA BARAT
Pondok Karisma Residence Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

Website: www.rcipress.rcipublisher.org
E-mail: rumahcemerlangindonesia@gmail.com

- Cet. I –: Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia, 2022
Dimensi : 14,8 x 21 cm
ISBN: 978-623-448-203-4

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena kebaikan, dan kasih karunia-Nya lah, sehingga kami dari tim penulis dapat menyelesaikan buku pembelajaran ini sesuai dengan pada waktunya. Adapun kami dari penulis menulis buku ini dengan tujuan membuat buku ajar yang berisi materi dari Persamaan differensial dalam fisika secara garis besar, yaitu; Konsep dasar differensial dan Integral, Persamaan differensial biasa orde satu Persamaan differensial biasa orde dua, Persamaan differensial Parsial, Analisis Vektor, Dan Fungsi Khusus. Dalam penyelesaian buku ajar ini, penulis banyak mendapat bantuan dari berbagai pihak, sehingga dalam kesempatan ini perkenankan penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah ikut membantu penulis baik secara langsung maupun tidak langsung. Semoga Tuhan yang Maha Kuasa senantiasa membalas kebaikan dan bantuannya. Buku ini ditujukan untuk mahasiswa ilmu sains dan teknologi, terkhusus fisika dan matematika. Buku ini juga memiliki sasaran utama untuk memberikan suatu penyajian yang jelas dan logis mengenai konsep-konsep dan prinsip-prinsip kalkulus dan matematika. Penulis juga coba menyajikan contoh-contoh praktis yang mendemonstrasikan peran fisika dan matematika dalam kejadian kehidupan sehari-hari secara umum dan peran fisika dan matematika dalam ilmu-ilmu lainnya secara umum. Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penyusunan materi perkuliahan ini. Oleh karena itu saran dan kritik dari semua pihak untuk perbaikan dan pengembangan selanjutnya sangat diharapkan.

Hormat

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I
KONSEP DASAR DIFFERENSIAL DAN INTEGRAL

Kalkulus adalah cabang matematika yang melibatkan studi tentang tingkat perubahan. Sebelum kalkulus ditemukan, semua matematika bersifat statis: hanya dapat membantu menghitung objek yang diam sempurna Utari & Utami, (2020);Mkhatshwa, (2020). Tapi alam semesta terus bergerak dan berubah. Tidak ada objek dari bintang di ruang angkasa hingga partikel subatom atau sel di dalam tubuh yang selalu diam. Memang, hampir semua hal di alam semesta terus bergerak. Kalkulus membantu menentukan bagaimana partikel, bintang, dan materi benar-benar bergerak dan berubah secara real time. Kalkulus digunakan dalam banyak bidang yang biasanya tidak Anda pikirkan akan menggunakan konsepnya. Diantaranya adalah fisika, teknik, ekonomi, statistik, dan kedokteran. Kalkulus juga digunakan di area yang berbeda seperti perjalanan ruang angkasa, serta menentukan bagaimana obat berinteraksi dengan tubuh, dan bahkan bagaimana membangun struktur yang lebih aman. Anda akan mengerti mengapa kalkulus berguna di banyak bidang jika Anda tahu sedikit tentang sejarahnya serta apa yang dirancang untuk dilakukan dan diukur (Frank & Thompson, 2021).

Adapun kalkulus dikembangkan pada abad ke-17 oleh dua matematikawan, yaitu; Gottfried Leibniz dan Isaac Newton.

Newton pertama kali mengembangkan kalkulus dan menerapkannya secara langsung pada pemahaman sistem fisika (Simmons, 2021). Secara mandiri, Leibniz mengembangkan notasi yang digunakan dalam kalkulus. Sederhananya, sementara matematika dasar menggunakan operasi seperti plus, minus, waktu, dan pembagian (+, -, x, dan ;), kalkulus menggunakan operasi yang menggunakan fungsi dan integral untuk menghitung laju perubahan. Alat-alat itu memungkinkan Newton, Leibniz, dan matematikawan lain yang mengikutinya untuk menghitung hal-hal seperti kemiringan kurva yang tepat di titik mana pun (Hyder & Soliman, 2021). Kisah Matematika menjelaskan pentingnya teorema dasar kalkulus Newton:

> *"Tidak seperti geometri statis orang Yunani, kalkulus memungkinkan ahli matematika dan insinyur untuk memahami gerakan dan perubahan dinamis di dunia yang terus berubah di sekitar kita, seperti orbit planet, gerakan cairan, dll."*

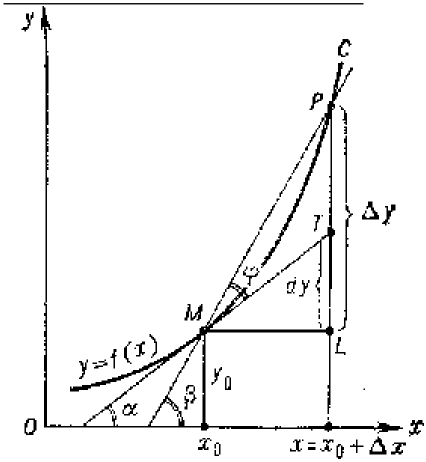
Dengan menggunakan kalkulus, para ilmuwan, astronom, fisikawan, matematikawan, dan ahli kimia sekarang juga dapat memetakan orbit planet dan bintang, serta jalur elektron dan proton pada tingkat atom. Ada dua cabang kalkulus: kalkulus diferensial dan integral. Cabang ini berkaitan dengan studi tentang laju perubahan fungsi sehubungan dengan variabelnya, terutama melalui penggunaan turunan dan diferensial. Turunan adalah kemiringan garis pada grafik (ALAM, 2020).

Kalkulus integral, sebaliknya, berusaha menemukan kuantitas di mana laju perubahan diketahui. Cabang ini berfokus pada konsep seperti kemiringan garis singgung dan kecepatan. Sementara kalkulus diferensial berfokus pada kurva itu sendiri, kalkulus integral berkaitan dengan ruang atau area di bawah kurva. Kalkulus integral digunakan untuk menghitung ukuran atau nilai total, seperti panjang, luas, dan volume. Kalkulus memainkan peran integral dalam pengembangan navigasi pada abad ke-17 dan ke-18 karena memungkinkan pelaut menggunakan posisi bulan untuk menentukan waktu setempat secara akurat. Untuk memetakan posisi mereka di laut, navigator harus mampu mengukur waktu dan sudut dengan akurat. Sebelum pengembangan kalkulus, navigator dan kapten kapal tidak dapat melakukan keduanya. Kalkulus baik turunan maupun integral membantu meningkatkan pemahaman konsep penting ini dalam hal kurva Bumi, jarak yang harus ditempuh kapal di sekitar kurva untuk mencapai lokasi tertentu, dan bahkan keselarasan Bumi, laut, dan kapal dalam kaitannya dengan bintang-bintang (Hyder, 2021).

Kalkulus memiliki banyak aplikasi praktis dalam kehidupan nyata. Beberapa konsep yang menggunakan kalkulus antara lain gerak, listrik, panas, cahaya, harmonik, akustik, dan astronomi. Kalkulus digunakan dalam geografi, visi komputer (seperti untuk mengemudi mobil secara otonom), fotografi, kecerdasan buatan, robotika, video game, dan bahkan film. Kalkulus juga digunakan untuk menghitung tingkat peluruhan radioaktif dalam kimia, dan bahkan untuk memprediksi tingkat kelahiran dan kematian, serta dalam studi gravitasi dan gerakan planet, aliran fluida, desain kapal, kurva geometris, dan teknik jembatan. Dalam fisika, misalnya, kalkulus digunakan untuk membantu mendefinisikan, menjelaskan, dan menghitung gerak, listrik, panas, cahaya, harmonik, akustik, astronomi, dan dinamika. Teori relativitas Einstein bergantung pada kalkulus, bidang matematika yang juga membantu para ekonom memprediksi berapa banyak keuntungan yang dapat diperoleh perusahaan atau industri. Dan dalam pembuatan kapal, kalkulus telah digunakan selama bertahun-tahun untuk menentukan baik kurva lambung kapal (menggunakan kalkulus diferensial), serta area di bawah lambung (menggunakan kalkulus integral), dan bahkan dalam desain umum kapal. . Selain itu, kalkulus digunakan untuk memeriksa jawaban untuk berbagai disiplin ilmu matematika seperti statistik, geometri analitik, dan aljabar (Tarasov, 2020).

1.1 Differensial

Kalkulus diferensial melibatkan pencarian turunan suatu fungsi dengan proses diferensiasi. Turunan suatu fungsi pada nilai tertentu akan memberikan laju perubahan fungsi yang mendekati nilai tersebut. Turunan digunakan untuk mengukur kemiringan garis singgung pada grafik suatu fungsi (Kidron, 2020).



Gambar 1.1 Grafik fungsi differensial

a. Istilah Terkait dalam Kalkulus Diferensial

Adapun dalam Kalkulus diferensial merupakan ilmu yang mempelajari laju perubahan suatu besaran terikat terhadap perubahan suatu besaran bebas. Misalnya, kecepatan suatu benda yang bergerak dapat diartikan sebagai laju perubahan jarak terhadap waktu. Jika $y = f(x)$ adalah fungsi yang terdiferensiasi maka, menurut kalkulus diferensial, notasinya diberikan sebagai $f'(x) = dy/dx$. Adapun beberapa istilah penting yang terkait dengan kalkulus diferensial tercantum di bawah ini:

- **Fungsi**

Fungsi didefinisikan sebagai relasi biner di mana setiap input dipetakan ke tepat satu output. $y = 4x + 3$ adalah contoh fungsi. Di sini, x (input) adalah variabel independen, dan y (output) adalah variabel dependen.

- **Variabel bebas**

Dalam suatu fungsi, variabel yang berperan sebagai input disebut dengan variabel bebas. Dalam model matematika, variabel yang dimanipulasi adalah variabel bebas.

- **Variabel tidak bebas**

Variabel dalam fungsi yang mewakili output dikenal sebagai variabel dependen. Nilai variabel ini berubah sehubungan dengan perubahan variabel dependen. Dengan kata lain, nilai suatu variabel terikat ditentukan oleh suatu variabel bebas.

- **Domain dan Range**

Dalam kalkulus diferensial, domain dapat didefinisikan sebagai daftar semua nilai input sedangkan range adalah semua nilai output yang diperoleh setelah menerapkan input ke suatu fungsi. Misal y = 2x + 3. Misalkan domainnya {0, 1, 2} maka rangenya adalah sebagai berikut:

$$y=2(0)+3=3$$

$$y=2(1)+3=5$$

$$y=2(2)+3=7$$

Maka range yang didapatkan adalah; $\{3,5,7\}$

- **Limit**

Turunan dapat didefinisikan dengan konsep limit. Dalam kalkulus diferensial, batas menggambarkan nilai suatu fungsi saat mendekati nilai input tertentu.

- **Derivatif**

Dalam kalkulus diferensial, turunan digunakan untuk mencari laju perubahan suatu fungsi. Jika garis singgung ditarik ke suatu titik yang terletak pada grafik suatu fungsi maka kemiringan garis singgung akan memberikan turunan fungsi pada titik di mana garis singgung menyentuh kurva. turunan dari suatu fungsi, $f(x)$, direpresentasikan sebagai $f'(x),\ dy/dx,\ df/dx$.

b. Contoh Dasar Kalkulus Diferensial

Misalkan ada fungsi yang diberikan sebagai $f(x)=5x^2$. Kemiringan fungsi ini pada titik tertentu, katakanlah 5, dapat ditentukan dengan menggunakan kalkulus diferensial. Turunan dari fungsi ini adalah $f'(x)=10x$. Maka kita dapat mensubtitusikan nilai 5 dalam persamaan ini untuk mendapatkan $f'(x)=50$. Jadi, kemiringan garis singgung di x = 5 adalah 10.

c. Rumus Kalkulus Diferensial

Rumus yang berbeda untuk kalkulus diferensial digunakan untuk menemukan turunan dari berbagai jenis fungsi. Menurut definisi, turunan dari suatu fungsi dapat ditentukan sebagai berikut:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f(x)}{h}$$

Adapun rumus kalkulus diferensial penting untuk berbagai fungsi diberikan di bawah ini:

- **Fungsi Dasar**

1) $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

2) $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a,$ dimana a > 0, dan a $\neq$ 0

3) $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x},$ dimana untuk x > 0

4) $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- **Fungsi Triginometri**

1) $\frac{d}{dx}$ sin x = cos x

2) $\frac{d}{dx}$ cos x = -sin x

3) $\frac{d}{dx}$ tan x = sec^2 x, x $\neq (2n+1)\pi/2$, n $\in 1$

4) $\frac{d}{dx}$ cot x = - cosec^{2}x, x $\neq n\pi$, n $\in 1$

5) $\frac{d}{dx}$ sec x = sec x tan x, x $\neq (2n+1)\pi/2$, n $\in 1$

6) $\frac{d}{dx}$ cosec x = -cosec x cot x, x $\neq n\pi$, n $\in 1$

- **Fungsi Hyperbolik**

1) $\frac{d}{dx}\text{sinhx} = \text{coshx}$

2) $\frac{d}{dx}\text{coshx} = \text{sinhx}$

3) $\frac{d}{dx}\tan\text{hx} = \sec\text{h}^2\text{x}$

4) $\frac{d}{dx}\cot\text{hx} = \text{-cosec h}^2\text{x}$

5) $\frac{d}{dx}\sec\text{hx} = \text{-sech hx}\tan\text{hx}$

6) $\frac{d}{dx}\text{cosec hx} = \text{-cosec hx}\cot\text{hx}$

- **Fungsi Invers Trigonometri**

1) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}\text{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$

2) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}\text{x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$

3) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\text{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

4) $\frac{d}{dx}\cot^{-1}\text{x} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

5) $\frac{d}{dx}\text{cosec}^{-1}\text{x} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

6) $\frac{d}{dx}\sec^{-1}\text{x} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

- **Fungsi Invers hiperbolik Trigonometri**

1) $\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

2) $\frac{d}{dx}\cosh^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3) $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \frac{1}{1-x^2}$

4) $\frac{d}{dx}\coth^{-1} x = -\frac{1}{x\left(1-x^2\right)}$

5) $\frac{d}{dx}\cos\text{ech}^{-1} x = -\frac{1}{x\left(\sqrt{1+x^2}\right)}$

6) $\frac{d}{dx}\text{sech}^{-1} x = -\frac{1}{x\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$

- **Derivatif Orde Tinggi**

Turunan digunakan untuk menyatakan laju perubahan suatu fungsi. Untuk mencari laju perubahan turunan ini, digunakan turunan orde tinggi (Avez, 2020). Tabel yang diberikan di bawah ini mencantumkan turunan orde tinggi yang paling umum digunakan untuk suatu fungsi, $y = f\left(x\right)$, dalam kalkulus diferensial:

Tabel 1.1 Turunan orde tinggi

Urutan Turunan	*Turunan Orde Pertama*	*Turunan Orde Kedua*	*Turunan Orde ketiga*
Notasi	$y = f'(x)$	$y = f''(x)$	$y = f'''(x)$
Interpretation	$\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2(f(x))}{dx^2}$	$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3(f(x))}{dx^3}$
Contoh: sinx	$f'(x) = \cos x$	$f''(x) = -\sin x$	$f'''(x) = -\cos x$

d. Persamaan Kalkulus Diferensial

Persamaan kalkulus diferensial atau persamaan diferensial sederhana adalah persamaan yang menghubungkan fungsi dengan turunannya. Ada dua jenis utama persamaan diferensial, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang hanya memiliki satu variabel bebas dan persamaan tersebut mengandung satu atau lebih turunan terhadap variabel tersebut. Persamaan diferensial parsial terdiri dari satu atau lebih variabel bebas dan turunan parsialnya.

Dalam kalkulus diferensial, ada tiga rumus umum untuk persamaan diferensial. Ini diberikan di bawah ini:

- $\frac{dy}{dx} = f(x)$
- $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
- $x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y$

e. Aturan Kalkulus Diferensial

Jika turunan dari fungsi sederhana tertentu diketahui maka aturan kalkulus diferensial dapat digunakan untuk mencari turunan dari fungsi yang rumit. Aturan kalkulus diferensial tercantum dalam tabel yang diberikan di bawah ini.

Tabel 1.2 Aturan Kalkulus Diferensial

Aturan Kalkulus Diferensial	***Fungsi***	***Interpretasi***
Aturan konstan	$y = c$	$\frac{dy}{dx} = 0$
Aturan multi Konstan	$y = cf(x)$	$\frac{dy}{dx} = cf'(x)$
Aturan pangkat	$y = x^n$	$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$
Generalisasi aturan pangkat	$y = \left[f(x)\right]^n$	$\frac{dy}{dx} = n\left[f(x)\right]^{n-1} f'(x)$
Jumlah Dua Fungsi	$y = f(x) + g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$
Perbedaan Dua Fungsi	$y = f(x) - g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x) - g'(x)$
Aturan Produk	$y = f(x)g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Aturan Hasil Bagi	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{\left[g(x)\right]^2}$
Aturan Rantai untuk Fungsi Komposit	$y = f\left[g(x)\right];\ y = f(u),\ u = g(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'\left[g(x)\right]g'(x)$

f. Soal latihan kalkulus differensial

1. Turunan fungsi pertama dari $f(x) = (4x^2 - 12x)(x+2)$ adalah...
2. Diketahui $f(x) = ax^2 + 2x + 4$ dan $g(x) = x^2 + ax - 2$.

   Jika $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ dengan $h'(0) = 1$ maka nilai a adalah...
3. Diketahui $f(x) = ax^2 - 4x + 1$ dan $g(x) = 3x^2 + ax + 2$, jika $h(x) = f(x) + g(x)$ dan $k(x) = f(x)g(x)$ dengan $h'(0) = -3$, maka nilai $k'(0)$ adalah...
4. Jika $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} + 1$ maka $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = ...$
5. Turunan pertama dari $f(x) = \dfrac{x^2 - 7}{x\sqrt{x}}$ adalah...
6. Turunan pertama fungsi $y = \dfrac{2}{\sqrt{\left(3x^2 + 5\right)^3}}$ adalah y'...
7. Diketahui $f(0) = 1$ dan $f'(0) = 2$, jika

   $g(x) = \dfrac{1}{\left(2f(x) - 1\right)^3}$ maka $g'(0) = \cdots$
8. Jika $f(x) = \dfrac{bx - a}{x + b}$, memenuhi $f(1) = 1$ dan $f'(1) = 2$ maka $f(2) = ...$
9. Jika $f(x) = \dfrac{ax + b}{x^2 + 1}$ dengan $f(0) = f'(0)$ dan $f'(-1) = 1$, maka a+b...

10. Jika f dan g adalah fungsi yang dapat diturunkan di R sehingga $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\left(g(x)-g(x+h)\right)}{k^2 h} = \frac{x-1}{k}$ dan $\lim_{h \to 0} \frac{g(x)\left(f(x)-f(x+h)\right)}{\left(k^2-1\right)h} = \frac{x-1}{k+1}$ untuk $k > 0,$ maka...

    $(1)\left(fg\right)'(0) = 2k-1$

    $(2)(fg)'(c) = \left(2k-1\right)\left(c-1\right)$

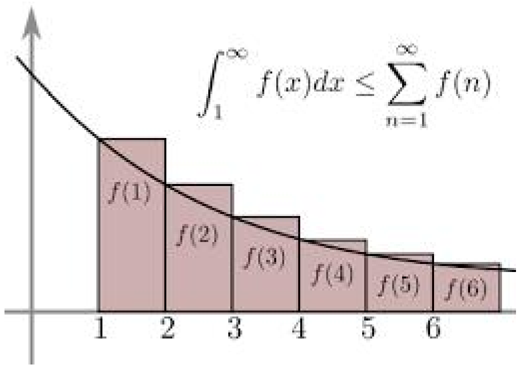
    $(3)(fg)'(x+1) = (1-2k)x$

    $(4)(fg)'(x^2) = \left(2k-1\right)\left(x^2-1\right)$

1.2 Integral

Kalkulus integral membantu dalam menemukan anti-turunan suatu fungsi. Anti-turunan ini juga disebut integral fungsi. Proses mencari anti turunan dari suatu fungsi disebut integrasi. Proses kebalikan dari mencari turunan adalah mencari integral. Integral suatu fungsi mewakili keluarga kurva (Vivas-Cortez et al., 2020). Menemukan turunan dan integral membentuk kalkulus dasar. Dalam topik ini, kita akan membahas dasar-dasar integral dan mengevaluasi integral. Integral adalah nilai-nilai fungsi yang ditemukan oleh proses integrasi. Proses mendapatkan f(x) dari f'(x) disebut integrasi. Integral menetapkan angka ke fungsi dengan cara yang menggambarkan masalah perpindahan dan gerak, masalah luas dan volume, dan sebagainya yang muncul dengan menggabungkan semua data kecil. Mengingat turunan f' dari fungsi f, kita dapat menentukan fungsi f. Di sini, fungsi f disebut antiturunan atau integral dari f' (Magnus & Neudecker, 2019).

F(x) disebut antiturunan atau integral Newton-Leibnitz atau primitif dari suatu fungsi f(x) pada interval I. F'(x) = f(x), untuk setiap nilai x dalam I. Integral adalah representasi luas daerah di bawah kurva. Kami memperkirakan nilai sebenarnya dari integral dengan menggambar persegi panjang. Integral tertentu dari suatu fungsi dapat dinyatakan sebagai luas daerah yang dibatasi oleh grafiknya dari fungsi yang diberikan antara dua titik pada garis. Luas suatu daerah ditemukan dengan memecahnya menjadi persegi panjang vertikal tipis dan menerapkan batas bawah dan atas, luas daerah dijumlahkan. Kami menentukan integral dari suatu fungsi selama interval di mana integral didefinisikan (Radmehr & Drake, 2020).



Gambar 1.2 Integral sebagai luas dibawah kurva

Kami mendefinisikan integral sebagai fungsi dari area yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, sumbu x, dan ordinat x = a dan x =b, di mana b>a. Misalkan x adalah titik tertentu di [a,b]. Kemudian mewakili fungsi area. Konsep fungsi area ini mengarah pada teorema dasar kalkulus integral.

a. Teorema Dasar Pertama Kalkulus Integral

$A(x) =$ untuk semua x $\geq$ a, dimana fungsi kontinu pada [a,b]. Kemudian $A'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$.

b. Teorema Dasar Kedua Kalkulus Integral

Jika f adalah fungsi kontinu dari x yang didefinisikan pada interval tertutup [a,b] dan F menjadi fungsi lain sedemikian sehingga $d/dxF(x) = f(x)$ untuk semua x dalam domain f, maka = f(b) -f(a). Ini dikenal sebagai integral tertentu dari f pada rentang [a,b], a adalah batas bawah dan b batas atas.

c. Jenis-Jenis Integral

Kalkulus integral digunakan untuk menyelesaikan masalah jenis berikut.

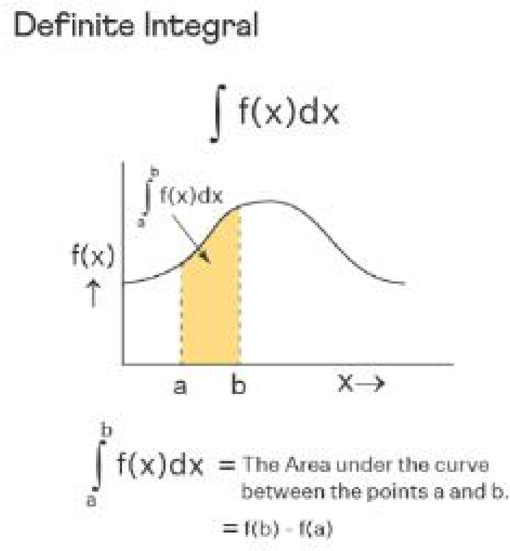
- masalah menemukan fungsi jika turunannya diberikan.
- masalah menemukan area yang dibatasi oleh grafik fungsi dalam kondisi tertentu. Dengan demikian kalkulus Integral dibagi menjadi dua jenis:
  1. Integral Pasti (nilai integralnya pasti)
  2. Integral tak tentu (nilai integral tak tentu dengan konstanta sembarang, C)

d. Integral tak tentu

Ini adalah integral yang tidak memiliki nilai limit yang sudah ada sebelumnya; sehingga membuat nilai akhir integral tak tentu. $\int g'(x)\,dx = g(x)+c$. Integral tak tentu termasuk dalam keluarga kurva paralel.

e. Integral tentu

Integral tertentu memiliki nilai batas yang sudah ada sebelumnya, sehingga membuat nilai akhir integral tertentu menjadi pasti. jika f(x) adalah fungsi kurva, maka



Gambar 1.3 Integral tertentu

f. Sifat-sifat Kalkulus Integral

Mari kita pelajari sifat-sifat integral tak tentu untuk mengerjakannya.

- Turunan integral adalah integral itu sendiri.

  $\int f(x)dx = f(x) + C$

- Dua integral tak tentu dengan turunan yang sama menghasilkan keluarga kurva yang sama sehingga keduanya ekuivalen. $\int\left[f(x)dx - g(x)dx\right] = 0$

- Integral dari jumlah atau selisih suatu bilangan berhingga fungsi sama dengan jumlah atau selisih integral dari masing-masing fungsi.

  $\int\left[f(x)dx + g(x)dx\right] = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

- Konstanta diambil di luar tanda integral.

  $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ dimana $\mathrm{k} \in R.$

- Dua properti sebelumnya digabungkan untuk mendapatkan formulir:

  $\int[kf(x) + kf(x) + \ldots kf(x)]\, dx = k\int f(x)dx + k\int f(x)dx + \ldots k\int f(x)dx$

g. Rumus Integral

Kita dapat mengingat rumus turunan dari beberapa fungsi penting. Berikut adalah integral yang sesuai dari fungsi-fungsi ini yang diingat sebagai rumus standar integral.

- $\int x^n\, dx = x^{n+1} / n + 1 + C,$ dimana $n \neq -1$
- $\int dx = x + C$
- $\int cosxdx = sinx + C$
- $\int sinxdx = -cosx + C$

- $\int sec^2 x dx = tan x + C$
- $\int cosec^2 x \ dx = -cot x + C$
- $\int sec^2 x dx = tan x + C$
- $\int sec x tan x dx = sec x + C$
- $\int csc x cot x dx = -csc x + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = sin^{-1} x + \ C$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \ cos^{-1} x \ + \ C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$
- $\int \frac{-1}{1+x^2} = cot^{-1} x + C$
- $\int \frac{1}{\left(x\sqrt{x^2 -1}\right)} = sec^{-1} x + \ C$
- $\int \frac{-1}{x\sqrt{x^2 -1}} = cosec^{-1} x + C$
- $\int \ e^x dx = e^x \ + C$
- $\int dx / x = ln|x| + C$
- $\int \ a^x \ dx = \frac{a^x}{ln \ a} + C$

h. Metode untuk Menemukan Integral

Ada beberapa metode yang digunakan untuk mencari integral tak tentu. Metode yang menonjol adalah:

- Menemukan integral dengan integrasi dengan metode substitusi

  Beberapa integral ditemukan dengan metode substitusi. Jika u adalah fungsi dari x, maka $u' = du/dx$. $\int f(u)u'\,dx = \int f(u)\,du$, dimana $u = g(x)$.

- Menemukan integral dengan integrasi dengan bagian

  Jika dua fungsi adalah bentuk produk, integral ditemukan dengan metode integrasi bagian. $\int f(x)g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int\left(f'(x)\int g(x)\,dx\right)dx.$

- Menemukan integral dengan integrasi dengan pecahan parsial.

  Integrasi fungsi aljabar rasional yang pembilang dan penyebutnya mengandung pangkat integral positif dari x dengan koefisien konstan dilakukan dengan menyelesaikannya menjadi pecahan parsial. Untuk mencari f(x)/g(x) dx, dekomposisikan fungsi rasional tak wajar ini menjadi fungsi rasional wajar, lalu integrasikan.

  $\int f(x)/g(x)\,dx = \int p(x)/q(x) + \int r(x)/s(x)$, Dimana $g(x) = a(x).\,s(x)$

i. Aplikasi Kalkulus Integral

Menggunakan integrasi, kita dapat menemukan jarak yang diberikan kecepatan. Integral tentu membentuk alat yang ampuh untuk menemukan area di bawah kurva sederhana, area yang dibatasi oleh kurva dan garis, area di antara dua kurva, volume padatan. Masalah perpindahan dan gerak juga menemukan aplikasi integralnya. Luas daerah yang dibatasi antara dua kurva y = f(x) dan y = g(x) dan garis x =a, x =b diberikan oleh

- **Area**

Mari kita cari luas yang dibatasi oleh kurva y = x dan y = x^2 yang berpotongan di (0,0) dan (1,1). Kurva yang diberikan adalah kurva garis dan parabola. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva

$$\text{Area}= \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$$

$$= 1/2-1/3$$

$$= 1/2-1/3$$

= 1/6 unit persegi.

✓ Catatan penting: (1) Nilai primitif dari fungsi yang ditemukan oleh proses integrasi disebut integral. (2) Integral adalah objek matematika yang dapat diartikan sebagai luas atau generalisasi dari luas.(3) Ketika fungsi polinomial terintegrasi, derajat integralnya bertambah 1.

j. Soal latihan kalkulus Integral

1. Tentukan hasil dari $\int (3x+7)^5 dx$ ...
2. Tentukan dengan menggunakan metode substitusi aljabar $\int (2x-10)^3 \, dx$ ...
3. Tentukan hasil dari $\int \sqrt{3x+6} dx$ ...
4. Tentukan hasil dari $\int \sqrt[3]{3x+6} dx$ ...
5. Tentukan hasil dari $\int \sqrt[3]{3x+6} dx$ ...

6. Tentukan hasil dari $\int (3x^3+5)^7 \, x^2 dx \ldots$
7. Tentukan hasil dari $\int (3x^3+5)^7 \, x^2 dx \ldots$
8. Tentukan hasil dari $\int \left(\sqrt[3]{12x^5-7}\right) x^4 dx \ldots$
9. Tentukan hasil dari $\int \frac{6x^2}{\sqrt{x^3-4}} dx$

BAB II
PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA ORDE SATU

Persamaan diferensial biasa, dalam matematika, persamaan yang menghubungkan fungsi f dari satu variabel dengan turunannya. (Kata sifat biasa di sini mengacu pada persamaan diferensial yang melibatkan satu variabel, yang dibedakan dari persamaan yang melibatkan beberapa variabel, yang disebut persamaan diferensial parsial) (Nascimento et al., 2020).

Turunan, yang ditulis f' atau df/dx, dari suatu fungsi f menyatakan laju perubahannya pada setiap titik yaitu, seberapa cepat nilai fungsi meningkat atau menurun ketika nilai variabel bertambah atau berkurang (Qin et al., 2020). Untuk fungsi $f = ax + b$ (mewakili garis lurus), laju perubahan hanyalah kemiringannya, yang dinyatakan sebagai $f' = a$. Untuk fungsi lain, laju perubahan bervariasi sepanjang kurva fungsi, dan cara yang tepat untuk mendefinisikan dan menghitungnya adalah subjek kalkulus diferensial. Secara umum, turunan dari suatu fungsi juga merupakan fungsi, dan oleh karena itu turunan dari turunan tersebut juga dapat dihitung, $(f')'$ atau hanya f'' atau d^2f/dx^2, dan disebut turunan orde kedua dari turunan aslinya. fungsi. Derivatif orde tinggi dapat didefinisikan dengan cara yang sama.

Orde persamaan diferensial didefinisikan sebagai turunan orde tertinggi yang dikandungnya. Derajat persamaan diferensial didefinisikan sebagai pangkat yang menaikkan turunan orde tertinggi (Waseem et al., 2020). Persamaan

$$\left(f''\right)^2+\left(f''\right)^4+f=x$$

adalah contoh persamaan diferensial tingkat dua orde tiga. Persamaan derajat pertama disebut linier jika fungsi dan semua turunannya terjadi pada pangkat pertama dan jika koefisien setiap turunan dalam persamaan hanya melibatkan variabel bebas x (Atangana & İğret Araz, 2020). Beberapa persamaan, seperti f = x^2, dapat diselesaikan hanya dengan mengingat fungsi mana yang memiliki turunan yang memenuhi persamaan, tetapi dalam banyak kasus penyelesaiannya tidak jelas dengan pemeriksaan, dan subjek persamaan diferensial sebagian terdiri dari mengklasifikasikan berbagai jenis persamaan yang dapat diselesaikan dengan berbagai teknik (Gerken et al., 2020).

2.1 Integral Langsung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=x^7$$

Persamaan diatas adalah contoh persamaan diferensial biasa (o.d.e.) karena hanya mengandung turunan biasa seperti $\frac{dy}{dx}$

dan bukan turunan parsial seperti $\frac{\partial y}{\partial x}$. Variabel terikat adalah y sedangkan variabel bebas adalah x (persamaan diferensial biasa hanya memiliki satu variabel bebas sedangkan diferensial parsial persamaan memiliki lebih dari satu variabel bebas) (Nielsen, 2020).

Contoh di atas adalah persamaan orde dua karena turunan orde tertinggi yang terlibat adalah dua (perhatikan adanya $\frac{d^2y}{dx^2}$)

a. Pengantar

persamaan diferensial biasa hanya linier jika setiap suku hanya memiliki y dan turunannya saja muncul untuk yang berkuasa. Munculnya istilah yang melibatkan hasil kali y dan $\frac{dy}{dx}$ juga akan membuat persamaan orde dua nonlinier. Dalam contoh di atas, istilah $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ membuat persamaan menjadi nonlinier.

Solusi umum dari n^{th} urutan ke o.d.e. memiliki n konstanta arbitrer yang dapat mengambil nilai apa pun. Dalam masalah nilai awal, seseorang memecahkan n^{th} urutan ke o.d.e. mencari solusi umum dan kemudian menerapkan n kondisi batas ("nilai/kondisi awal") untuk menemukan solusi tertentu yang tidak memiliki konstanta sembarang.

b. Teori

Persamaan diferdemsial biasa dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Teknik ini, yang disebut Integrasi Langsung, juga dapat diterapkan ketika ruas kiri merupakan turunan orde tinggi. Dalam hal ini, seseorang mengintegrasikan persamaan beberapa kali sampai y ditemukan.

c. Contoh soal

- Tunjukkan bahwa $y = 2e^{2x}$ adalah solusi khusus dari

  yang biasa persamaan diferensial: $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

-
- Tunjukkan bahwa y = A sin x + B cos x, di mana A dan B adalah sembarang konstanta, adalah solusi umum dari $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$
- Turunkan solusi umum dari $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$
- Turunkan solusi umum dari $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$
- Turunkan solusi umum dari $\frac{d^2y}{dx^2} = a,$ dimana a adalah konstan
- Turunkan solusi umum dari $\frac{d^3y}{dx^3} = 3x^2$

- Turunkan solusi umum dari $\dfrac{d^3y}{dx^3} = 3x^2$

d. Standar Integral

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	$[g(x)]^n g'(x)$	$\frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln \lvert g(x) \rvert$
e^x	e^x	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} \quad (a > 0)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$	$\tanh x$	$\ln \cosh x$
$\operatorname{cosec} x$	$\ln \left\lvert \tan \frac{x}{2} \right\rvert$	$\operatorname{cosech} x$	$\ln \left\lvert \tanh \frac{x}{2} \right\rvert$
$\sec x$	$\ln \lvert \sec x + \tan x \rvert$	$\operatorname{sech} x$	$2 \tan^{-1} e^x$
$\sec^2 x$	$\tan x$	$\operatorname{sech}^2 x$	$\tanh x$
$\cot x$	$\ln \lvert \sin x \rvert$	$\coth x$	$\ln \lvert \sinh x \rvert$
$\sin^2 x$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$	$\sinh^2 x$	$\frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2}$
$\cos^2 x$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$	$\cosh^2 x$	$\frac{\sinh 2x}{4} + \frac{x}{2}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$	$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert \quad (0 < \lvert x \rvert < a)$
	$(a > 0)$	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert \quad (\lvert x \rvert > a > 0)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\sin^{-1} \frac{x}{a}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\ln \left\lvert \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a} \right\rvert \quad (a > 0)$
	$(-a < x < a)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln \left\lvert \frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a} \right\rvert \quad (x > a > 0)$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$\frac{a^2}{2} \left[\sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2} \right]$	$\sqrt{a^2+x^2}$	$\frac{a^2}{2} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2} \right]$
		$\sqrt{x^2-a^2}$	$\frac{a^2}{2} \left[-\cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2} \right]$

Gambar 2.1 Rumus Standar Integral

2.2 Separasi Variabel

a. Teori

Jika seseorang dapat menyusun kembali persamaan diferensial biasa ke dalam bentuk standar berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

maka solusinya dapat ditemukan dengan teknik ***Pemisahan Dari Variabel***

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Hasil ini diperoleh dengan membagi bentuk standar dengan g(y), dan kemudian integralkan kedua ruas terhadap x.

b. Soal latihan

- Temukan solusi umum dari $\frac{dy}{dx} = 3x^2e^{-y}$ dan solusi khusus yang memenuhi kondisi y(0) = 1
- Carilah solusi umum dari $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$
- Sekesaikan persamaan $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1}$ diberikan kondisi batas: y = 1 di x = 0
- Selesaikan persamaan $y^2\frac{dy}{dx} = x$ dan temukan solusi khusus ketika y(0) = 1

- Carilah solusi $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ yang memiliki y = 0 ketika x = 0
- Temukan solusi umum dari $\frac{xy}{x+1} = \frac{dy}{dx}$
- Tentukan solusi umum dari x$\sin^2$ y. $\frac{dy}{dx} = \left(x+1\right)^2$
- Selesaikan persamaan $\frac{dy}{dx} = -2x \tan y$ tunduk pada kondisi: $y = \frac{\pi}{2}$, saat x=0
- Selesaikan persamaan $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ dan temukan solusi khusus ketika y(0) = 2
- Selesaikan persamaan $x\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$ dan temukan solusi khusus ketika y(1) = 1

2.3 Separasi Variabel

a. Definisi

Persamaan diferensial tipe:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

disebut persamaan diferensial eksak jika terdapat fungsi dari dua variabel u (x, y) dengan turunan parsial kontinu sehingga

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Solusi umum dari persamaan eksak diberikan oleh

$$u(x, y) = C,$$

Dimana C adalah konstanta

2.4 Differensial Keeksakan

Biarkan fungsi $P(x, y)$ dan $Q(x, y)$ turunan parsial kontinu dalam domain D. Persamaan diferensial $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ adalah persamaan eksak jika dan hanya jika:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{(Constanda, 2020)}$$

a. Algoritma untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Eksak

- Pertama-tama perlu dipastikan bahwa persamaan diferensialnya eksak menggunakan uji ketepatan:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

- Kemudian kami menulis sistem dua persamaan diferensial yang mendefinisikan fungsi $u(x, y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$$

- Integrasikan persamaan pertama di atas variabel x Alih-alih konstanta C, kami menulis fungsi yang tidak diketahui dari y:

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y).$$

- Diferensiasi sehubungan dengan y, kami mengganti fungsi u(x,y) ke dalam persamaan kedua:

- $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)dx + \varphi(y)\right] = Q(x,y)$$

  Dari sini kita mendapatkan ekspresi untuk turunan dari fungsi yang tidak diketahui $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) : Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)$$

- Dengan mengintegrasikan ekspresi terakhir, kami menemukan fungsi $\varphi(y)$ dan, karenanya, fungsi $u(x,y)$:

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$$

- Solusi umum persamaan diferensial eksak diberikan oleh:

$$u(x,y) = C$$

b. Soal latihan

- Selesaikan persamaan $2xydx + \left(x^2 + 3y^2\right)dy = 0$
- Tentukan penyelesaian persamaan diferensial $\left(6x^2 - y + 3\right)dx + \left(3y^2 - x - 2\right)dy = 0.$

2.5 Metode Faktor Integral

Pertimbangkan persamaan diferensial biasa (o.d.e.) yang ingin kita memecahkan untuk mengetahui bagaimana variabel y tergantung pada variabel x. Jika persamaan tersebut orde pertama maka turunan tertinggi yang terlibat adalah turunan pertama.

Jika juga merupakan persamaan linier maka ini berarti bahwa setiap suku dapat melibatkan y sebagai turunannya $\frac{dy}{dx}$ atau melalui satu faktor y (Arof et al., 2020). Orde pertama linier seperti itu o.d.e. dapat diatur kembali untuk memberikan bentuk standar berikut:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Dimana $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah fungsi dari x, dan dalam beberapa kasus mungkin konstanta.

Orde pertama linier o.d.e. dapat diselesaikan dengan menggunakan faktor integrasi metode. Setelah menulis persamaan dalam bentuk standar, P(x) dapat diidentifikasi. Satu kemudian mengalikan persamaan dengan "faktor integrasi" berikut:

$$IF = e^{\int P(x)dx}$$

Faktor ini didefinisikan sehingga persamaan menjadi setara dengan:

$$\frac{d}{dx}\left(IF\ y\right) = IF\ \mathrm{Q(x)}$$

Akhirnya, pembagian dengan faktor integrasi (IF) memberikan y secara eksplisit dalam suku x, yaitu memberikan solusi untuk persamaan.

a. Latihan soal

- Tentukan solusi dari $\frac{dy}{dx} + y = x;\ \mathrm{y(0)=2}$
- Tentukan solusi dari $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x};\ \mathrm{y(0)=1}$
- Tentukan solusi dari $x\frac{dy}{dx} + 2y = 10x^2;\ \mathrm{y(1)=3}$
- Tentukan solusi dari $x\frac{dy}{dx} - y = x^2;\ y(1) = 3$
- Tentukan solusi dari $x\frac{dy}{dx} - 2y = x^4 \sin x$

b. Notasi alternatif

Persamaan diferensial orde pertama linier:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

memiliki faktor integrasi $IF = e^{\int P(x)dx}$

Metode faktor integrasi kadang-kadang dijelaskan dalam istilah bentuk persamaan diferensial yang lebih sederhana.

Misalnya, ketika konstan koefisien a dan b yang terlibat, persamaan dapat ditulis sebagai:

$$a\frac{dy}{dx}+by=Q(x)$$

Dalam bentuk standar kami ini adalah:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{b}{a}y=\frac{Q(x)}{a}$$

dengan faktor integral dari:

$$IF=e^{\int\frac{b}{a}dx}=e^{\frac{bx}{a}}$$

2.6 Persamaan Differensial Linear

Persamaan diferensial linier adalah persamaan yang memiliki variabel, turunan dari variabel tersebut, dan beberapa fungsi lainnya Arof et al., (2020);Xin et al., (2020). Bentuk standar persamaan diferensial linier adalah dy/dx + Py = Q, dan mengandung variabel y, dan turunannya. P dan Q dalam persamaan diferensial ini adalah konstanta numerik atau fungsi dari x. Persamaan diferensial linier merupakan bentuk penting dari persamaan diferensial dan dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus. Mari kita pelajari rumus dan turunannya, untuk mencari solusi umum persamaan diferensial linier.

Persamaan diferensial linier berbentuk dy/dx + Py = Q, di mana P dan Q adalah konstanta numerik atau fungsi dalam x. Terdiri dari y dan turunan dari y. Diferensial tersebut merupakan diferensiasi orde satu dan disebut persamaan diferensial linier orde pertama. Persamaan diferensial linier ini dalam y. Demikian pula, kita dapat menulis persamaan diferensial linier dalam x juga. Persamaan diferensial linier dalam x adalah $dx/dy + P_1 x = Q_1$.

Linear Differential Equation in y

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

Linear Differential Equation in x

$$\frac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$$

Gambar 2.2 Persamaan differensial linear pada y (Atas), dan pada x (Bawah)

Beberapa contoh persamaan diferensial linier dalam y adalah $dy/dx + y = \cos x$, dy/dx+(-2y)/x=x$^2.e^{-x}$, Dan contoh persamaan diferensial linier dalam x adalah $\frac{dx}{dy} + x = \sin y$, $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y}$=ey. $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{\text{ylogy}} = \frac{1}{y}$

a. Derivasi untuk Solusi Persamaan Diferensial Linier

Derivasi untuk solusi umum persamaan diferensial linier dapat dipahami melalui urutan langkah-langkah di bawah ini. Persamaan diferensial orde pertama berbentuk.

$$\frac{dy}{dx} + Px = Q$$

Di sini kita kalikan kedua ruas persamaan dengan fungsi x, misalkan g(x) (Parasidis et al., 2020). Selanjutnya, fungsi ini dipilih sedemikian rupa sehingga ruas kanan persamaan adalah turunan dari y.g(x). d/dx(y.g(x)) = y.g(x).

$$g(x).\frac{dy}{dx}+P.g(x).y=Q.g(x)$$

Pilih g(x) sedemikian rupa sehingga RHS menjadi turunan dari y.g(x).

$$g(x).\frac{dy}{dx}+P.g(x)y=\frac{d}{dx}\left(y.g\left[x\right]\right)$$

Ruas kanan dari ekspresi di atas diturunkan menggunakan rumus turunan untuk produk fungsi.

$$g(x).\frac{dy}{dx}+P.g(x).y=g(x)\frac{dy}{dx}+y.g'(x)$$

$$p.g(x)=g'(x)$$

$$P=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

Mengintegrasikan kedua sisi terhadap x, kita dapatkan

$$\int P.dx=\int\frac{g'(x)}{g(x)}dx$$

$$\int P.dx=\log(g(x))$$

$$g(x)=e^{\int P.dx}$$

Fungsi ini $g(x)=e^{\int P.dx}$ disebut Faktor Integrasi dari persamaan diferensial linier yang diberikan. Mensubstitusi nilai g(x) dalam persamaan persamaan diferensial linier, diperoleh ekspresi berikut.

$$e^{\int P.dx}\frac{dy}{dx}+Pe^{\int P.dx}y=Q.e^{\int P.dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y.e^{\int P.dx}\right)=Qe^{\int P.dx}$$

Dengan Mengintegrasikan kedua sisi, terhadap x, diperoleh ekspresi berikut

$$y.e^{\int P.dx}=\int\left(Q.e^{\int P.dx}.dx\right)$$

$$y=e^{-\int P.dx}.\int\left(Q.e^{\int P.dx}.dx\right)+c$$

Ekspresi di atas adalah solusi umum dari persamaan diferensial linier.

b. Rumus untuk Solusi Umum Persamaan Diferensial Linier

Berikut ini adalah dua rumus penting untuk mencari solusi umum persamaan diferensial linier.

- Solusi umum persamaan diferensial $\frac{dy}{x}+Py=Q$, adalah sebagai berikut; $y.(IF)=\int(Q.(IF).dx)+C$, Di sini kita memiliki Faktor Integrasi $(IF)=e^{\int P.dx}$

- Juga solusi umum dari persamaan diferensial $\frac{dx}{y} + Px = Q$ adalah mengikuti $x(IF) = \int \left(Q(IF)dy \right) + C$ Di sini kita memiliki Faktor Integrasi $(IF) = e^{\int Pdy}$

c. Latihan soal

- Tentukan solusi umum persamaan diferensial $xdy - \left(y + 2x^2 \right)dx = 0$ ..
- Tentukan turunan dari dy/dx + Secx.y = Tanx

2.7 Persamaan differensial Homogen dan non-Homogen

Persamaan diferensial berbentuk f(x,y)dy = g(x,y)dx dikatakan persamaan diferensial homogen jika derajat f(x,y) dan g(x, y) sama. Fungsi bentuk F(x,y) yang dapat ditulis dalam bentuk kn F(x,y) dikatakan sebagai fungsi homogen berderajat n, untuk k≠0. Oleh karena itu, f dan g adalah fungsi homogen dengan derajat yang sama dari x dan y. Di sini, perubahan variabel y = ux mengarah ke persamaan bentuk;

$$\frac{dx}{x} = h(u)du$$

yang dapat dengan mudah diintegrasikan.

Sebaliknya, persamaan diferensial dikatakan homogen jika persamaan tersebut merupakan fungsi serupa dari fungsi anonim dan turunannya. Untuk persamaan diferensial linier, tidak ada istilah konstan. Solusi dari setiap persamaan diferensial biasa linier dengan derajat atau orde apa pun dapat dihitung dengan integrasi dari solusi persamaan homogen yang dicapai dengan menghilangkan suku konstan. Perhatikan fungsi-fungsi berikut dalam x dan y,

$$F_1(x,y) = 2x - 8y$$

$$F_2(x,y) = x^2 + 8xy + 9y^2$$

$$F_3(x,y) = sin(x/y)$$

$$F_4(x,y) = sin\ x + cos\ y$$

Jika kita mengganti x dan y masing-masing dengan vx dan vy, untuk nilai v yang bukan nol, kita dapatkan

$$F_1(vx,vy) = 2(vx) - 8(vy) = v(2x-8y) = vF_1(x,y)$$

$$F_2(vx,vy) = v^2x^2 + 8(vx)(vy) + 9v^2y^2 = v^2(x^2+8xy+9y^2) = v^2F_2(x,y)$$

$$F_3(vx,vy) = sin(vx/vy) = v^0 sin(vx/vy) = v^0F_3(x,y)$$

$$F_4(vx,vy) = sin(vx) + cos(vy) \neq v^nF_4(x,y)$$

Oleh karena itu, fungsi F_1, F_2, F_3 dapat ditulis dalam bentuk $v^nF(x,y)$, sedangkan F4 tidak dapat ditulis. Jadi tiga yang pertama adalah fungsi homogen dan fungsi terakhir tidak homogen.

a. Persamaan Diferensial Nonhomogen

Persamaan diferensial linier tak homogen orde kedua diwakili oleh;

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

di mana g(t) adalah fungsi bukan nol. Persamaan homogen terkait adalah;

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y \;=\; 0$$

yang juga dikenal sebagai persamaan komplementer. Ini semua tentang solusi persamaan diferensial homogen.

b. Langkah-Langkah Menyelesaikan Persamaan Diferensial Homogen

Anda pasti sudah belajar menyelesaikan persamaan diferensial pada bagian sebelumnya. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial homogen langkah-langkah berikut diikuti: - Diberikan persamaan diferensial jenis:

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) = g(\frac{y}{z})$$

- Langkah 1: Substitusikan y = vx ke dalam persamaan diferensial yang diberikan.
- Langkah 2: Membedakan, kita dapatkan,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

Sekarang substitusikan nilai dan y ke dalam persamaan diferensial yang diberikan, kita dapatkan

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

$$x\frac{dv}{dx} = g(v) - v$$

- Langkah 3: Memisahkan variabel, kita dapatkan

$$\frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

- Langkah 4: Mengintegrasikan kedua sisi persamaan, kita memiliki

$$\int \frac{dv}{g(v) - v} dv = \int \frac{dx}{x} + C$$

- Langkah 5: Setelah integrasi kita ganti v=y/x

c. Soal latihan

- Tentukan persamaan kurva yang melalui titik $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ ketika garis singgung di sembarang titik membentuk sudut $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x} - \sin^2\frac{y}{x}\right)$.
- Temukan persamaan kurva yang melalui titik (1,-2) ketika garis singgung di setiap titik diberikan oleh $\frac{y\left(x + y^3\right)}{x\left(y^3 - x\right)}$.

2.8 Persamaan differensial bernoulli

Persamaan diferensial Bernoulli dapat ditulis sebagai bentuk standar:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n}$$

di mana $n \neq 1$ (persamaannya tidak linier).

Untuk menemukan solusinya, ubah variabel dependen dari y ke z, di mana $z = y^{1-n}$. Ini memberikan persamaan diferensial dalam x dan z yaitu linear, dan dapat diselesaikan dengan menggunakan metode faktor integrasi.

- **Catatan:**

Membagi bentuk standar di atas dengan y^n memberikan:

$$\frac{1}{y^{n}}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$$

*Dimana kita menggunakan $\frac{dz}{dx}=\left(1-n\right)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

a. Soal latihan

Bentuk umum persamaan Bernoulli adalah

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{n},$$

di mana P dan Q adalah fungsi dari x, dan n adalah konstanta. Menunjukkan bahwa transformasi ke variabel dependen baru z = y^{1-n} berkurang persamaan menjadi satu yang linier di z (dan karenanya dapat dipecahkan menggunakan metode faktor integrasi).

- Tentukan solusi umum dari $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=xy^2$
- Tentukan solusi umum dari $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=y^2$
- Tentukan solusi umum dari $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}y=e^x y^4$
- Tentukan solusi umum dari $x\frac{dy}{dx}+y=xy^3$
- Tentukan solusi umum dari $2\frac{dy}{dx}+\tan x.y=\frac{(4x+5)^2}{\cos\ x}y^3$

BAB III

PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA ORDE DUA

Dalam Bagian ini kita mulai belajar bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial orde kedua dari jenis tertentu: yang linier dan memiliki koefisien konstan (Parasidis et al., 2020). Persamaan tersebut digunakan secara luas dalam pemodelan fenomena fisis, misalnya dalam analisis sistem getar dan analisis kelistrikan sirkuit. Solusi dari persamaan ini dicapai secara bertahap. Tahap pertama adalah menemukan apa yang disebut 'fungsi pelengkap'. Tahap kedua adalah menemukan 'integral tertentu' (Parasidis et al., 2020). Akhirnya komplementer fungsi dan integral tertentu digabungkan untuk membentuk solusi umum.

3.1 Koefisien konstan persamaan differensial linier orde kedua

Kami sekarang melanjutkan untuk mempelajari persamaan linier orde kedua yang memiliki koefisien konstan. Itu bentuk umum persamaan tersebut adalah:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$$

dimana a, b, c adalah konstanta. Bentuk homogen dari persamaan diatas adalah kasus ketika f(x) 0:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

Solusi umum dari persamaan adalah disebut fungsi komplementer dan akan selalu mengandung dua konstanta arbitrer.

3.2 Menemukan fungsi komplementer

Untuk menemukan fungsi komplementer kita harus menggunakan properti berikut. Jika $y_1(x)$, dan $y_2(x)$ adalah dua solusi (bebas linier) dari suatu linear, homogen orde kedua persamaan diferensial maka solusi umum $y_{cf}(x)$, adalah $y_{cf}(x)=Ay_1(x)+By_2(x)$, dimana A dan B adalah konstan (Parasidis et al., 2020).

Kita melihat bahwa persamaan diferensial biasa linier orde kedua memiliki dua konstanta arbitrer dalam solusi umum. Fungsi $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ bebas linier jika salah satu bukan kelipatan dari yang lain.

3.3 Integral tertentu

Diberikan ODE orde kedua:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=F(x),$$

integral tertentu adalah fungsi apa pun, $y_p(x)$, yang memenuhi persamaan. Artinya, fungsi apa pun yang bila disubstitusikan ke ruas kiri, menghasilkan ekspresi pada ruas kanan.

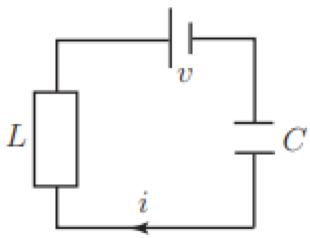
3.4 Menemukan solusi umum dari linear orde kedua ODE tidak homogen

Solusi umum persamaan linear tak homogen orde kedua adalah jumlah dari persamaan partikularnya integral dan fungsi komplementer. Anda mempelajari cara menemukan fungsi komplementer, dan juga telah Anda mempelajari cara mencari integral tertentu. Kami sekarang menempatkan ini bersama-sama untuk menemukan solusi umum.

3.5 Sirkuit LC dengan input sinusoidal

Persamaan diferensial yang mengatur aliran arus dalam rangkaian LC seri ketika dikenai tegangan yang diterapkan $v(t) = V_0 \sin \omega t$ adalah:

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{I}{C} i = \omega V_0 \cos \omega t$$



(Parasidis et al., 2020)

Gambar 3.1 Sirkuit LC

Persamaan homogennya adalah

$$L\frac{d^2 i_{cf}}{dt^2}+\frac{i_{cf}}{C}=0$$

Dengan memperhatikan bahwa $i_{cf}=e^{kt}$ kami menemukan persamaan bantu adalah $Lk^2+\frac{1}{c}=0$, sehingga karena itu $k=\pm\frac{i}{\sqrt{LC}}$. Karena itu, fungsi komplementernya adalah: $i_{cf}=A\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}+B\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$, Dimana A dan B adalah konstanta arbitrer. Untuk menemukan integral tertentu coba $i_p=E\cos\omega t+F\sin\omega t,$ dimana E, dan F adalah kontanta , sehingga kirta akan mendapatkan: $\frac{di_p}{dt}=-\omega E\sin\omega t+\omega F\cos\omega t$, $\frac{d^2 i_p}{dt^2}=-\omega^2 E\cos\omega t-\omega^2 F\sin\omega t$.
Substitusi ke persamaan tak homogen menghasilkan:

$$L\left(-\omega^2 E\cos\omega t-\omega^2 F\sin\omega t\right)+\frac{1}{C}\left(E\cos\omega t+F\sin\omega t\right)=\omega V_0\cos\omega t$$

Dimana $F=0,$ dan $\mathrm{E}=\frac{\mathrm{CV_0}\omega}{1-\omega^2 LC}$. Oleh karena itu integral tertentu adalah:

$$i_p=\frac{CV_0\omega}{1-\omega^2 LC}\cos\omega t.$$

Akhirnya, solusi umumnya adalah:

$$i = i_{cf} + i_p = A\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + B\sin\frac{t}{\sqrt{LC}} + \frac{CV_0\omega}{1-\omega^2 LC}\cos\omega t$$

3.6 Suku tidak homogen dalam fungsi komplementer

Kadang-kadang Anda akan menemukan persamaan diferensial $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$ untuk itu suku tak homogen, f(x), merupakan bagian dari fungsi komplementer. Salah satu contohnya adalah persamaan (Parasidis et al., 2020)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = e^{3x}$$

Anda harus memverifikasi sendiri bahwa mencoba integral tertentu dari bentuk $y_p(x) = \alpha e^{3x}$ tidak akan berfungsi dalam kasus seperti ini. Dapatkah Anda melihat mengapa? Sebagai gantinya, cobalah integral tertentu dari bentuk $y_p(x) = \alpha x e^{3x}$, verifikasi bahwa;

$$\frac{dy_p}{dx} = \alpha e^{3x}\left(3x+1\right),\ \text{dan}\ \frac{\mathrm{d}^2 y_p}{dx^2} = \alpha e^{3x}\left(9x+6\right)$$

Substitusikan ekspresi ini ke dalam persamaan diferensial untuk menemukan $\alpha = \frac{1}{5}$. Akhirnya, integral tertentu adalah $y_p(x) = \frac{1}{5}xe^{3x}$ dan solusi umum untuk persamaan diferensial

$$y = Ae^{3x} + Be^{-2x} + \frac{1}{5}xe^{3x}$$

Ini menunjukkan metode yang umumnya efektif - di mana istilah tidak homogen f(x) muncul dalam fungsi komplementer yang digunakan sebagai integral percobaan tertentu x kali apa yang seharusnya digunakan.

BAB IV
PERSAMAAN DIFFERENSIAL SEBAGIAN/PARSIAL

Persamaan diferensial parsial (atau singkatnya PDE) adalah persamaan matematika yang melibatkan dua atau lebih variabel independen, fungsi yang tidak diketahui (tergantung pada variabel tersebut), dan turunan parsial dari fungsi yang tidak diketahui sehubungan dengan variabel independen. Orde persamaan diferensial parsial adalah orde turunan tertinggi yang terlibat. Solusi (atau solusi tertentu) untuk persamaan diferensial parsial adalah fungsi yang menyelesaikan persamaan atau, dengan kata lain, mengubahnya menjadi identitas ketika disubstitusikan ke dalam persamaan (Li et al., 2020).

Suatu solusi disebut umum jika berisi semua solusi khusus dari persamaan yang bersangkutan. Istilah solusi eksak sering digunakan untuk PDE nonlinier orde kedua dan lebih tinggi untuk menunjukkan solusi tertentu (lihat juga Pernyataan pendahuluan pada Persamaan Diferensial Parsial Orde Kedua). Persamaan diferensial parsial digunakan untuk merumuskan secara matematis, dan dengan demikian membantu penyelesaian, masalah fisik dan masalah lain yang melibatkan fungsi beberapa variabel, seperti perambatan panas atau suara, aliran fluida, elastisitas, elektrostatika, elektrodinamika, dll (Folland, 2020).

Persamaan Diferensial Parsial yang biasa dilambangkan dengan PDE adalah persamaan diferensial yang mengandung turunan parsial dari variabel terikat (satu atau lebih) dengan lebih dari satu variabel bebas. PDE untuk fungsi u(x_1,……x_n) adalah persamaan berbentuk

$$F\left(X_1,...,X_n;\ u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial u}{\partial x_n};\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1},\ ...\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n};...\ \right)=0$$

PDE dikatakan linier jika f adalah fungsi linier dari u dan turunannya. PDE sederhana diberikan oleh;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=0$$

Hubungan di atas menyiratkan bahwa fungsi u(x,y) tidak bergantung pada x yang merupakan bentuk tereduksi dari rumus persamaan diferensial parsial di atas. Orde PDE adalah orde suku turunan tertinggi dari persamaan (Wang & Yamamoto, 2020).

4.1 Mewakili Persamaan Diferensial Parsial

Di PDE, kami mendeklarasikan turunan parsial menggunakan subskrip, seperti;

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Dalam beberapa kasus, seperti dalam Fisika ketika kita belajar tentang persamaan gelombang atau persamaan suara, turunan parsial ∂ , juga diwakili oleh ∇ (del atau nabla).

4.2 Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial

Setiap jenis PDE memiliki fungsionalitas tertentu yang membantu menentukan apakah pendekatan elemen hingga tertentu sesuai dengan masalah yang dijelaskan oleh PDE. Solusinya tergantung pada persamaan dan beberapa variabel mengandung turunan parsial sehubungan dengan variabel (Beck et al., 2020). Ada tiga jenis PDE orde kedua dalam mekanika, yaitu;

- PDE berbentuk elips
- PDE Parabola
- PDE hiperbolik

Perhatikan contoh, $au_{xx} + bu_{yy} + cu_{yy} = 0,\ u = u\left(x, y\right)$. Untuk suatu titik tertentu (x,y), persamaan dikatakan Elliptik jika $b^2 - ac < 0$ yang digunakan untuk menggambarkan persamaan elastisitas tanpa suku inersia. PDE hiperbolik menggambarkan fenomena perambatan gelombang jika memenuhi kondisi $b^2 - ac > 0$ (Flavin & Rionero, 2020). Untuk PDE parabola, harus memenuhi kondisi $b^2 - ac = 0$. Persamaan konduksi panas adalah contoh dari PDE parabola.

4.3 Jenis Persamaan Diferensial Parsial

Macam-macam persamaan diferensial parsial adalah:

- *Persamaan Diferensial Parsial Orde Pertama*

  Dalam Matematika, ketika kita berbicara tentang persamaan diferensial parsial orde pertama, maka persamaan tersebut hanya memiliki turunan pertama dari fungsi yang tidak diketahui yang memiliki variabel 'm'. Dinyatakan dalam bentuk;

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m,\ \mathbf{u},\mathbf{u}_{x1},\ldots,\mathbf{u}_{xm}\right)=\mathbf{0}$$

- *Persamaan Diferensial Parsial Linier*

  Jika variabel dependen dan semua turunan parsialnya muncul secara linier di sembarang PDE, maka persamaan tersebut disebut PDE linier atau PDE nonlinier.

- Jika *Persamaan Diferensial Parsial Linier Kuasi*

  semua suku pada PDE mengandung variabel terikat atau turunan parsialnya, maka PDE tersebut disebut persamaan diferensial parsial nonhomogen atau homogen sebaliknya.

- *Persamaan Diferensial Parsial Homogen*

  Beberapa contoh yang mengikuti PDE orde kedua diberikan sebagai:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$
2. $u_{xx}+u_{yy}=0$
3. $ux\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u^2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+uy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u^3=0$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$

4.4 Persamaan laplace

a. Pengantar

Definisi Transformasi Laplace yang akan kita gunakan disebut Transformasi Laplace "satu sisi" (atau unilateral) dan diberikan oleh:

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

(Duarte Ortigueira & Tenreiro Machado, 2020)

Transformasi Laplace tampaknya, pada awalnya, menjadi konsep yang cukup abstrak dan esoteris (Atangana & Akgül, 2020). Dalam praktiknya, ini memungkinkan seseorang untuk (lebih) dengan mudah memecahkan berbagai macam masalah yang melibatkan sistem linier, khususnya persamaan diferensial. Ini memungkinkan representasi sistem yang ringkas (melalui "Fungsi Transfer"), menyederhanakan evaluasi integral konvolusi, dan mengubah masalah yang melibatkan persamaan diferensial menjadi masalah aljabar. Seperti yang ditunjukkan oleh kutipan dalam animasi di atas (dari beberapa siswa di Swarthmore College), hampir secara ajaib menyederhanakan masalah yang sebaliknya sangat sulit untuk dipecahkan (Ruthotto & Haber, 2020).

Ada beberapa hal yang perlu diperhatikan tentang Transformasi Laplace.

- Fungsi f(t), yang merupakan fungsi waktu, ditransformasikan menjadi fungsi F(s). Fungsi F(s) adalah fungsi dari variabel Laplace, "s." Kami menyebutnya fungsi domain Laplace. Jadi Transformasi Laplace mengambil fungsi domain waktu, f(t), dan mengubahnya menjadi fungsi domain Laplace, F(s).

- Kami menggunakan huruf kecil untuk fungsi dalam domain waktu, dan menghapus huruf besar di domain Laplace.
- Kita katakan bahwa F(s) adalah Transformasi Laplace dari f(t),

$$\mathrm{L}\left(f\left(t\right)\right) = F(s)$$

atau f(t) adalah invers Transformasi Laplace dari F(s),

$$\mathrm{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right) = f(t)$$

atau f(t) dan F(s) adalah pasangan Transformasi Laplace,

$$f(t) \underset{\leftrightarrow}{\mathrm{L}} F(s)$$

- Untuk tujuan kita variabel waktu, t, dan fungsi domain waktu akan selalu bernilai nyata. Variabel Laplace, s, dan fungsi domain Laplace adalah kompleks.
- Karena integral bergerak dari 0 ke ∞, variabel waktu, t, tidak boleh muncul dalam hasil domain Laplace (jika ya, Anda membuat kesalahan). Perhatikan bahwa tidak ada Transformasi Laplace dalam tabel yang memiliki variabel waktu, t, di dalamnya.
- Batas bawah integral ditulis sebagai 0^-. Hal ini menunjukkan bahwa batas bawah integral adalah dari tepat sebelum t=0 ($t=0^-$ menunjukkan waktu yang sangat kecil sebelum nol). Ini adalah poin yang bagus, tetapi

Anda akan melihat bahwa ini sangat penting dalam dua hal:

- Ini memungkinkan kita berurusan dengan fungsi impuls, $\delta(t)$. Jika Anda belum tahu apa-apa tentang fungsi impuls, jangan khawatir, kami akan membahasnya lebih detail nanti.
- Ini memungkinkan kita mempertimbangkan kondisi awal sistem pada $t=0^-$. Ini seringkali jauh lebih mudah ditemukan daripada kondisi awal pada $t=0^+$ (yang dibutuhkan oleh beberapa teknik lain yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial)

- Karena batas bawah adalah nol, kita hanya akan tertarik pada perilaku fungsi (dan sistem) untuk $t \geq 0$.
- Kadang-kadang Anda akan melihat pembahasan tentang transformasi "dua sisi" (atau bilateral) (dengan batas bawah ditulis sebagai $-\infty$) atau transformasi satu sisi dengan batas bawah ditulis sebagai 0^+. Kami tidak akan menggunakan formulir ini dan tidak akan membahasnya lebih lanjut.
- Karena batas atas integralnya adalah ∞, kita harus bertanya pada diri sendiri apakah Transformasi Laplace, F(s), genap. Ternyata transformasi ada selama f(t) tidak tumbuh lebih cepat dari fungsi eksponensial. Ini mencakup semua fungsi yang menarik bagi kami, jadi kami tidak akan menyibukkan diri dengan keberadaan.

Sebelum kita menunjukkan bagaimana Transformasi Laplace berguna, kita perlu meletakkan beberapa dasar. Kita mulai dengan menemukan Transformasi Laplace dari beberapa fungsi dan dari sana beralih ke pencarian properti Transformasi Laplace. Dengan tabel Transformasi Laplace dari Fungsi dan Sifat Transformasi Laplace menjadi mungkin untuk menemukan Transformasi Laplace dari hampir semua fungsi yang diinginkan tanpa menggunakan integral yang ditunjukkan di atas. Aplikasi Transformasi Laplace dibahas selanjutnya - sebagian besar penggunaan Transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Akhirnya, Transformasi Laplace terbalik dibahas (meskipun ini adalah topik yang cukup besar sehingga memiliki halaman sendiri di tempat lain).

b. Fungsi Laplace

Untuk menggunakan Transformasi Laplace secara produktif, kita harus mampu mentransformasikan fungsi dari domain waktu ke domain Laplace. Kita dapat melakukan ini dengan menerapkan definisi Transformasi Laplace

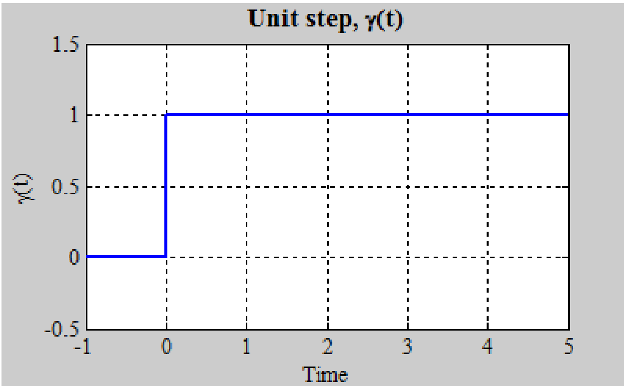
$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

tapi ini dengan cepat menjadi membosankan. Tujuan kami adalah untuk menghindari keharusan mengevaluasi integral dengan menemukan Transformasi Laplace dari banyak fungsi yang berguna dan mengompilasinya dalam sebuah tabel. Setelah itu, Transformasi Laplace dari fungsi hampir selalu dapat dilihat dengan menggunakan tabel tanpa perlu diintegrasikan. Tabel fungsi Transformasi Laplace tersedia di sini.

- **Fungsi Langkah Satuan**

  Fungsi langkah satuan didefinisikan sebagai

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



Untuk menemukan Transformasi Laplace, kami menerapkan definisi.

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_{0^-}^{\infty} \gamma(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_{0^-}^{\infty} \\ &= -\frac{1}{s}[0-1] \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned}$$

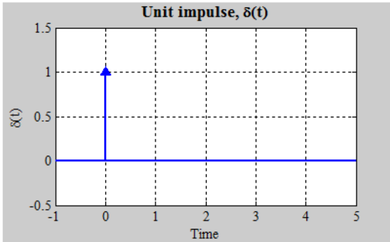
$$\gamma(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} = \Gamma(s)$$

- **Impuls Satuan**

Impuls unit dibahas di tempat lain, tetapi untuk ditinjau. Fungsi impuls ada di mana-mana tetapi pada t=0, di mana ia sangat besar. Area fungsi impuls adalah satu. Fungsi impuls digambarkan sebagai anak panah yang tingginya sama dengan luasnya.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \text{undefined}, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$



Untuk menemukan Transformasi Laplace, kami menerapkan definisi

$$\Delta(s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt$$

Sekarang kita menerapkan properti penyaringan impuls. Karena impuls adalah 0 di mana-mana tetapi t=0, kita dapat mengubah batas atas integral menjadi 0^+.

$$\Delta(s) = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)e^{-st}dt$$

Karena e^{-st} kontinu pada t=0, itu sama dengan mengatakan bahwa e^{-st} konstan dari $t=0^-$ hingga $t=0^+$. Jadi kita dapat mengganti e^{-st} dengan nilainya yang dievaluasi pada t=0.

$$e^{-st}\Big|_{t=0} = e^{-s\cdot 0} = 1$$

$$\Delta(s) = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\cdot 1\cdot dt = 1$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

Jadi Transformasi Laplace dari impuls unit hanya satu. Oleh karena itu fungsi impuls, yang sulit ditangani dalam domain waktu, menjadi mudah ditangani di domain Laplace. Ternyata unit impuls akan menjadi penting untuk banyak dari apa yang kita lakukan.

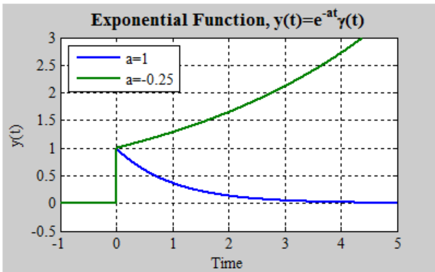
- **Eksponensial**

Pertimbangkan eksponensial kausal (yaitu, didefinisikan hanya untuk t>0):

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-at}, & t \geq 0 \end{cases}$$

or

$$y(t) = e^{-at}\gamma(t)$$



Beberapa catatan tentang fungsi ini:

- Fungsinya adalah 0 untuk t<0, dan kemudian mengikuti lintasan eksponensial setelahnya.
- Kita dapat mendefinisikan fungsi secara sepotong-sepotong (definisi pertama), atau sebagai eksponensial dikalikan dengan langkah unit (definisi kedua). Yang kedua lebih kompak, jadi kita biasanya

akan menggunakan yang itu. Karena semua fungsi kita sama dengan nol untuk t<0, perkalian dengan $\gamma(t)$ sering kali implisit dan kita tidak akan benar-benar menunjukkan $\gamma(t)$, kecuali dalam kasus di mana diperlukan untuk kejelasan. Jika a<0, fungsi bertambah tanpa batas.

- Jika a>0 fungsi meluruh ke nol - eksponensial meluruh jauh lebih umum dalam sistem yang kita pelajari. Untuk menemukan Transformasi Laplace, kami menerapkan definisi

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}\gamma(t)e^{-st}dt$$

Karena $\gamma(t)$ sama dengan satu untuk semua t positif, kita dapat menghapusnya dari integral

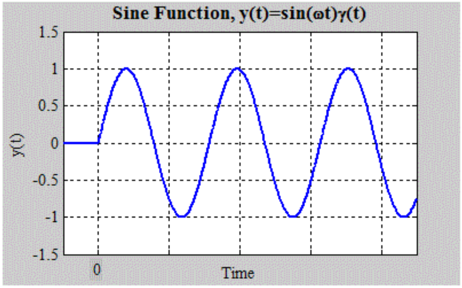
$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} 1 \cdot e^{-(s+a)t}dt = -\frac{1}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_{0^-}^{\infty} = -\frac{1}{s+a}\left[0-1\right] \\ &= \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

$$e^{-at} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}$$

Perhatikan bahwa perkalian dengan fungsi (t) tersirat di ruas kiri persamaan terakhir. Ini adalah bagaimana kita biasanya akan menulis fungsi kita.

- **Eksponensial**

$y(t) = \sin(\omega t)\gamma(t)$



Seperti sebelumnya, mulailah dengan definisi transformasi Laplace

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt$$

Di sini menjadi berguna untuk menggunakan identitas Euler untuk sinus

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st} dt = \frac{1}{2j}\int_{0^-}^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st} dt - \frac{1}{2j}\int_{0^-}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-st} dt$$

Tapi kita sudah melakukan integral ini (fungsi eksponensial, di atas)

$$Y(s) = \frac{1}{2j}\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s + j\omega}$$

Mari kita letakkan ini di atas penyebut yang sama

$$Y(s) = \frac{1}{2j}\frac{1}{(s-j\omega)}\frac{(s+j\omega)}{(s+j\omega)} - \frac{1}{2j}\frac{1}{(s+j\omega)}\frac{(s-j\omega)}{(s-j\omega)}$$

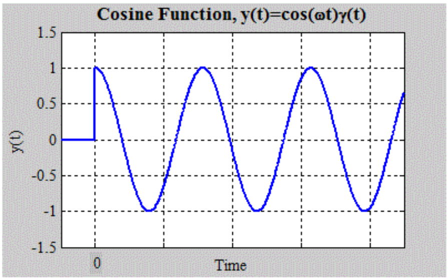
$$= \frac{1}{2j}\frac{(s+j\omega)-(s-j\omega)}{\left(s^2 - \cancel{sj\omega} + \cancel{sj\omega} - (j\omega)^2\right)} = \frac{1}{2j}\frac{2j\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\sin(\omega t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

- **Kosinus**

$y(t) = \cos(\omega t)\gamma(t)$



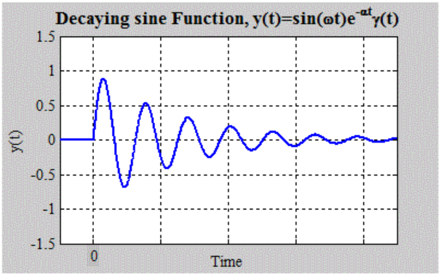
Kosinus dapat ditemukan dengan cara yang hampir sama, tetapi menggunakan identitas Euler untuk kosinus.

$$\cos(\omega t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

- **Sinus dan Cosinus yang Meluruh**

Sinus atau cosinus yang meluruh juga ditangani dengan cara yang sama. Pertimbangkan, pertama, gelombang sinus yang meluruh.

$$y(t) = e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\gamma(t)$$



$$y(t) = e^{-\alpha t}\sin(\omega t) = e^{-\alpha t}\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = \frac{e^{(j\omega-\alpha)t} - e^{-(j\omega+\alpha)t}}{2j} = \frac{1}{2j}e^{(j\omega-\alpha)t} - \frac{1}{2j}e^{-(j\omega+\alpha)t}$$

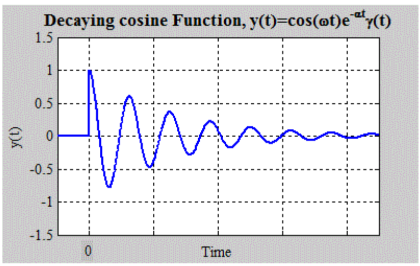
$$Y(s) = \frac{1}{2j}\frac{1}{(s-(j\omega-\alpha))} - \frac{1}{2j}\frac{1}{(s+(j\omega+\alpha))} = \frac{1}{2j}\frac{1}{(s+\alpha-j\omega)} - \frac{1}{2j}\frac{1}{(s+\alpha+j\omega)}$$

Derivasi selanjutnya mengikuti fungsi sinus (yaitu, letakkan di atas penyebut yang sama, dan selesaikan)

$$e^{-\alpha t}\sin(\omega t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

Prosedur serupa dapat diikuti untuk peluruhan kosinus

$$y(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\gamma(t)$$

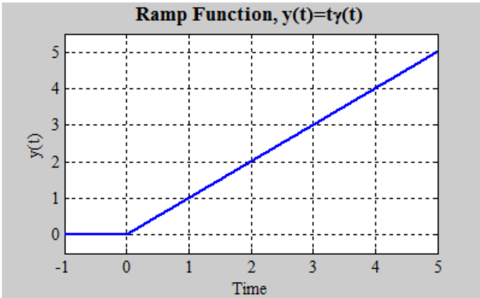


$$e^{-\alpha t}\cos(\omega t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$$

- **Fungsi lereng**

Sejauh ini (dengan pengecualian impuls), semua fungsi berhubungan erat dengan eksponensial. Dimungkinkan juga untuk menemukan Transformasi Laplace dari fungsi lain. Misalnya, fungsi ramp:

$y(t) = t \cdot \gamma(t)$



$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} t \cdot e^{-st} dt$$

Kita mulai seperti sebelumnya

$$Y(s) = \int_{0^-}^{\infty} t \cdot e^{-st} dt$$

Integrasi oleh bagian berguna pada saat ini

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

$$du = dt \qquad u = t$$

$$v = -\frac{1}{s}e^{-st} \quad dv = e^{-st}$$

$$Y(s) = \left[-\frac{t}{s} e^{-st} \right]_{0^-}^{\infty} - \left[\int_{0^-}^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot dt \right]$$

$$= [0-0] - \left[-\frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \cdot dt \right] = \frac{1}{s} \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \cdot dt = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

$$t \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2}$$

- **Fungsi komposit**

Seringkali cukup mudah untuk menemukan Transformasi Laplace dari fungsi yang tidak ada dalam tabel, dengan menyatakannya sebagai jumlah fungsi dalam tabel yang diskalakan dan/atau ditunda. Untuk memahami ini kita perlu menggunakan dua properti Transform Laplace yang diturunkan pada halaman berikutnya. Kita membutuhkan properti linearitas

$$a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$$

dan dengan properti waktu tunda

$$f(t-a) \cdot \gamma(t-a) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as} F(s)$$

c. Properti laplace

Bagian ini memperoleh beberapa properti yang berguna dari Transformasi Laplace. Sifat-sifat ini, bersama dengan fungsi yang dijelaskan pada halaman sebelumnya akan memungkinkan kita untuk Transformasi Laplace untuk menyelesaikan persamaan diferensial dan bahkan untuk melakukan analisis tingkat sistem yang lebih tinggi. Secara khusus, halaman berikutnya menunjukkan bagaimana

Transformasi Laplace dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Tabel dengan semua properti yang diturunkan di bawah ini ada di sini.

- **Linearitas**

Properti linearitas dari Transformasi Laplace menyatakan:

$$a \cdot f(t) + b \cdot g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$$

Ini mudah dibuktikan dari definisi Transformasi Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\right) &= \int_{0^-}^{\infty} \left(a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\right) e^{-st} dt \\ &= a\int_{0^-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt + b\int_{0^-}^{\infty} g(t) e^{-st} dt \\ &= a \cdot F(s) + b \cdot G(s) \end{aligned}$$

- **Waktu tunda**

Properti waktu tunda tidak jauh lebih sulit untuk dibuktikan, tetapi ada beberapa seluk-beluk yang terlibat dalam memahami bagaimana menerapkannya. Kita akan mulai dengan pernyataan properti, diikuti dengan bukti, dan kemudian diikuti dengan beberapa contoh. Properti pergeseran waktu menyatakan

$$f(t-a) \cdot \gamma(t-a) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-as} F(s)$$

Kami kembali membuktikan dengan kembali ke definisi asli Transformasi Laplace

$$\mathcal{L}\left(f(t-a) \cdot \gamma(t-a)\right) = \int_{0^-}^{\infty} \left(f(t-a) \cdot \gamma(t-a)\right) e^{-st} dt$$

Karena

$$\gamma(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t\geq a\end{cases}$$

kita dapat mengubah batas bawah integral dari 0^- ke a^- dan menghilangkan fungsi langkah (karena selalu sama dengan satu)

$$\mathcal{L}\left(f(t-a)\cdot\gamma(t-a)\right)=\int_{a^-}^{\infty}\left(f(t-a)\cdot\gamma(t-a)\right)e^{-st}dt=\int_{a^-}^{\infty}f(t-a)e^{-st}dt$$

Kita dapat membuat perubahan variabel

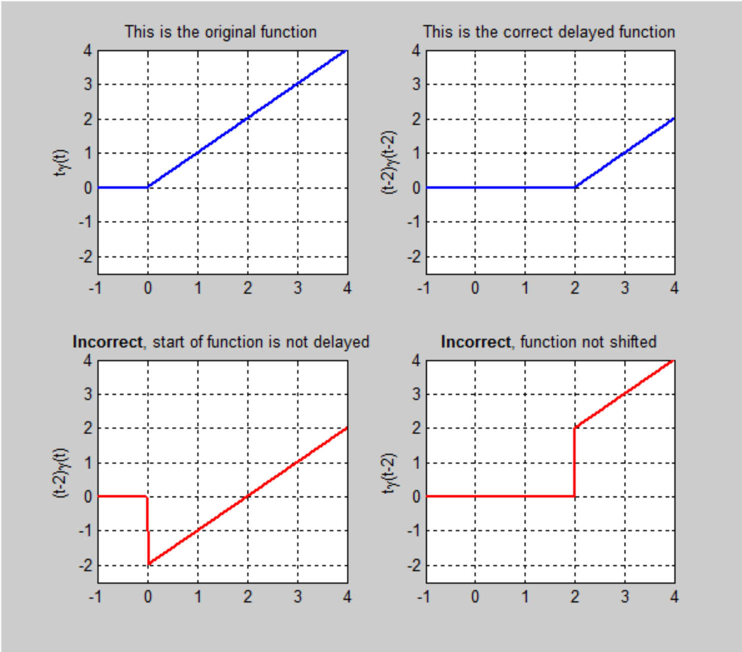
$$u=t-a;\quad t=u+a;\quad du=dt$$

$$\mathcal{L}\left(f(t-a)\cdot\gamma(t-a)\right)=\int_{0^-}^{\infty}f(u)e^{-s(u+a)}du=e^{-sa}\int_{0^-}^{\infty}f(u)e^{-su}du$$

Integral terakhir hanyalah definisi Transformasi Laplace, jadi kita memiliki properti waktu tunda

$$\mathcal{L}\left(f(t-a)\cdot\gamma(t-a)\right)=e^{-as}F(s)$$

Untuk menerapkan properti waktu tunda dengan benar, penting bahwa fungsi dan langkah yang mengalikannya digeser dengan jumlah yang sama. Sebagai contoh, perhatikan fungsi $f(t)=t\cdot\gamma(t)$. Jika kita tunda 2 detik, kita dapatkan $(t-2)\cdot\gamma(t-2)$, bukan $(t-2)t\cdot\gamma(t)$ atau $t\cdot\gamma(t-2)$. Keempat fungsi ini ditunjukkan di bawah ini



Yang benar persis seperti fungsi aslinya tetapi bergeser.

- **Turunan Pertama**

Properti turunan pertama dari status Transform Laplace

$$\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sF(s) - f(0^-)$$

Untuk membuktikan ini kita mulai dengan definisi Transformasi Laplace dan integrasikan dengan bagian

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st}dt$$

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

$$du = -s \cdot e^{-st}dt \qquad u = e^{-st}$$

$$v = f(t) \qquad dv = \frac{df(t)}{dt}dt$$

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st}dt = \left[e^{-st} \cdot f(t)\right]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} f(t) \cdot (-s) \cdot e^{-st}dt$$

$$= \left[e^{-st} \cdot f(\infty) - e^{-0^- t} \cdot f(0^-)\right] + s\int_{0^-}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}dt$$

Suku pertama dalam tanda kurung menjadi nol (selama f(t) tidak tumbuh lebih cepat dari eksponensial yang merupakan syarat adanya transformasi). Di suku berikutnya, eksponensialnya menjadi satu. Istilah terakhir hanyalah definisi Transformasi Laplace dikalikan dengan s. Jadi teorema terbukti.

$$\int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st}dt = \left[\cancel{e^{-st} \cdot f(\infty)} - \cancel{e^{-0^- t}} \cdot f(0^-)\right] + sF(s) = sF(s) - f(0^-)$$

Ada dua hal penting yang perlu diperhatikan tentang properti ini:

- Kami telah mengambil turunan dalam domain waktu, dan mengubahnya menjadi persamaan aljabar dalam domain Laplace. Ini berarti bahwa kita dapat mengambil persamaan diferensial dalam waktu, dan mengubahnya menjadi persamaan aljabar dalam domain Laplace. Kita dapat memecahkan persamaan

aljabar, dan kemudian mengubah kembali ke domain waktu (ini disebut Invers Laplace Transform).
- Kondisi awal diambil pada $t=0^-$. Artinya kita hanya perlu mengetahui kondisi awal sebelum input kita dimulai. Ini seringkali jauh lebih mudah daripada menemukannya di $t=0^+$.

- **Turunan Kedua**

Demikian pula untuk turunan kedua kita dapat menunjukkan:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^2F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$$

Dimana

$$\dot{f}(0^-) = \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{0^-}$$

- **Turunan orde ke-n**

Untuk turunan ke-n:

$$\frac{d^nf(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0^-) - s^{(n-2)}\dot{f}(0^-) - \cdots - s\overset{(n-2)}{f}(0^-) - \overset{(n-1)}{f}(0^-)$$

Atau

$$\frac{d^nf(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^nF(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{(n-i)}\overset{(i-1)}{f}(0^-)$$

Dimana

$$\overset{(n)}{f}(0^-) = \left.\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right|_{0^-}$$

- **Integrasi**

Teorema integrasi menyatakan bahwa

$$\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(s)}{s}$$

Kami membuktikannya dengan memulai dengan integrasi per bagian

$$\mathcal{L}\left(\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\right) = \int_{0^-}^{\infty}\left(\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\right)e^{-st}dt$$

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$$

$$du = f(t)dt \quad u = \int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda$$

$$v = -\frac{1}{s}e^{-st} \qquad dv = e^{-st}dt$$

$$\int_{0^-}^{\infty}\left(\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\right)e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\right]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)f(t)dt$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\right]_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s}\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

$$= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\right]_{0^-}^{\infty} + \frac{1}{s}F(s)$$

$$= -\frac{1}{s}\left(e^{-s\infty}\int_{0^-}^{\infty} f(\lambda)d\lambda - e^{-s0^-}\int_{0^-}^{0^-} f(\lambda)d\lambda\right) + \frac{1}{s}F(s)$$

Suku pertama dalam kurung menjadi nol jika f(t) tumbuh lebih lambat daripada eksponensial (salah satu syarat keberadaan Transformasi Laplace), dan suku kedua menjadi nol karena batas integralnya sama. Jadi teorema terbukti

$$\mathcal{L}\left(\int_{0^-}^{t} f(\lambda)d\lambda\right) = \frac{1}{s}F(s)$$

- **Konvolusi**

Teorema konvolusi menyatakan (jika Anda belum mempelajari konvolusi, Anda dapat melewati teorema ini)

$$f(t) * g(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s) \cdot G(s)$$

Kami memulai pembuktian kami dengan definisi Transformasi Laplace

$$\mathcal{L}\left(f(t) * g(t)\right) = \int_{0^-}^{\infty}\left(f(t) * g(t)\right)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda\right)e^{-st}dt$$

Dari sana kami melanjutkan:

$$\mathcal{L}\left(f(t) * g(t)\right) = \int_{0^-}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)g(t-\lambda)e^{-st}d\lambda dt$$

Kita dapat mengubah urutan integrasi.

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0^-}^{\infty} f(\lambda)g(t-\lambda)e^{-st}dtd\lambda$$

Sekarang, kita tarik f(λ) keluar karena itu konstan terhadap variabel integrasi, t

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\int_{0^-}^{\infty} g(t-\lambda)e^{-st}dtd\lambda$$

Sekarang kita membuat perubahan variabel

$$u = t-\lambda; \quad du = dt; \quad t = u+\lambda$$

$$\mathcal{L}\left(f(t) * g(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\int_{-\lambda}^{\infty} g(u)e^{-s(u+\lambda)}dud\lambda$$

Karena g(u) adalah nol untuk u<0, kita dapat mengubah batas bawah integral dalam ke 0-.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\int_{0}^{\infty} g(u)e^{-su}e^{-s\lambda}dud\lambda$$

Kita dapat menarik e-s keluar (konstan sehubungan dengan

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-s\lambda} \int_{0^-}^{\infty} g(u)e^{-su} du d\lambda$$

integrasi).
Kita dapat memisahkan integral karena integral dalam tidak bergantung pada λ.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{-s\lambda} d\lambda \int_{0^-}^{\infty} g(u)e^{-su} du$$

Kita dapat mengubah batas bawah pada yang pertama integral karena f(λ) adalah kausal.

$$= \int_{0^-}^{\infty} f(\lambda)e^{-s\lambda} d\lambda \int_{0^-}^{\infty} g(u)e^{-su} du$$

Akhirnya kita mengakui bahwa dua integral hanyalah Transformasi Laplace.

$$\mathcal{L}\left(f(t) * g(t)\right) = F(s)G(s)$$

Teorema terbukti

- **Teorema Nilai Awal**

Teorema nilai awal menyatakan

$$\lim_{s\to\infty}\left(sF\left(s\right)\right) = f\left(0^+\right)$$

Untuk menunjukkan ini, pertama-tama kita mulai dengan Aturan Derivatif:

$$\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sF\left(s\right) - f\left(0^-\right)$$

Kami kemudian memanggil definisi Transformasi Laplace, dan membagi integral menjadi dua bagian:

$$sF(s) - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt$$
$$= \int_{0^-}^{0^+} \dot{f}(t) e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt$$

Kita ambil limitnya sebagai s→∞:

$$\lim_{s\to\infty}\left(sF(s) - f(0^-)\right) = \lim_{s\to\infty}\left(\int_{0^-}^{0^+} \dot{f}(t) dt + \int_{0^+}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt\right)$$

Beberapa penyederhanaan dilakukan. Dalam ekspresi tangan kiri, kita dapat mengeluarkan suku kedua dari limit, karena tidak bergantung pada 's.' Dalam ekspresi tangan kanan, kita dapat mengeluarkan suku pertama dari limit untuk alasan yang sama, dan jika kita mengganti tak terhingga untuk 's' pada suku kedua, suku eksponensial menjadi nol:

$$\lim_{s\to\infty}\left(sF(s)\right) - f(0^-) = \int_{0^-}^{0^+} \dot{f}(t) dt + \int_{0^+}^{\infty} \dot{f}(t) 0 dt$$
$$= \int_{0^-}^{0^+} \dot{f}(t) dt$$
$$= f(0^+) - f(0^-)$$

Kedua suku $f(0^-)$ saling meniadakan, dan tersisa Teorema Nilai Awal

$$\lim_{s\to\infty}\left(sF(s)\right) = f(0^+)$$

Teorema ini hanya bekerja jika F(s) adalah pecahan murni yang polinomial pembilangnya lebih rendah daripada polinomial penyebutnya. Dengan kata lain is akan bekerja untuk F(s)=1/(s+1) tetapi tidak untuk F(s)=s/(s+1).

- **Teorema Nilai Akhir**

Teorema nilai akhir menyatakan bahwa jika ada nilai akhir dari suatu fungsi, maka

$$\lim_{s\to 0}\left(sF\left(s\right)\right) = \lim_{t\to\infty} f\left(t\right)$$

Namun, kita hanya dapat menggunakan nilai akhir jika nilainya ada (fungsi seperti sinus, kosinus, dan fungsi ramp tidak memiliki nilai akhir). Untuk membuktikan teorema nilai akhir, kita mulai seperti yang kita lakukan untuk teorema nilai awal, dengan Transformasi Laplace dari turunannya,

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st}dt = sF(s) - f(0^-)$$

Kita biarkan s→0,

$$\lim_{s\to 0}\left(\int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st}dt\right) = \lim_{s\to 0}\left(sF(s) - f(0^-)\right)$$

Saat s→0 suku eksponensial menghilang dari integral. Juga, kita dapat mengeluarkan $f(0^-)$ dari limit (karena tidak bergantung pada s)

$$\lim_{s\to 0}\left(\int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} dt\right) = \lim_{s\to 0}\left(sF(s)\right) - f(0^-)$$

Kita dapat mengevaluasi integral

$$\lim_{s\to 0}\left(f(\infty) - f(0^-)\right) = \lim_{s\to 0}\left(sF(s)\right) - f(0^-)$$

Tidak ada suku di sebelah kiri yang bergantung pada s, jadi kita dapat menghilangkan limit dan menyederhanakannya, menghasilkan teorema nilai akhir

$$f(\infty) - \cancel{f(0^-)} = \lim_{s\to 0}\left(sF(s)\right) - \cancel{f(0^-)}$$

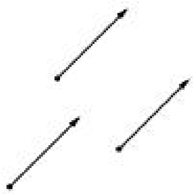
$$f(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(sF(s)\right)$$

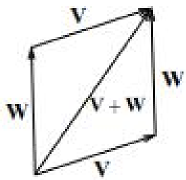
Contoh fungsi yang teorema ini tidak dapat digunakan adalah peningkatan eksponensial (seperti e^{at} di mana a adalah bilangan positif) yang menuju tak hingga saat t meningkat, dan fungsi osilasi seperti sinus dan kosinus yang tidak memiliki nilai akhir.

BAB V
ANALISIS VEKTOR

5.1 Dasar Aljabar Vektor

Vektor V pada bidang atau ruang adalah panah: ditentukan oleh panjangnya, dilambangkan $|V|$ dan arah. Dua anak panah mewakili vektor yang sama jika mereka memiliki panjang yang sama dan sejajar (Marini et al., 2020). Kami menggunakan vektor untuk mewakili entitas yang dijelaskan oleh besaran dan arah. Sebagai contoh, gaya yang diterapkan pada suatu titik adalah vektor: itu sepenuhnya ditentukan oleh besarnya gaya dan arah di mana itu diterapkan. Sebuah benda yang bergerak dalam ruang memiliki, pada waktu tertentu, arah gerak, dan sebuah kecepatan. Ini diwakili oleh vektor kecepatan gerak. Lebih tepatnya, vektor kecepatan di suatu titik adalah panah panjang kecepatan (ds/dt), yang terletak pada garis singgung lintasan. Itu keberhasilan dan pentingnya aljabar vektor berasal dari interaksi antara interpretasi geometris dan perhitungan aljabar. Dalam catatan ini, kami akan mendefinisikan konsep yang relevan secara geometris, dan biarkan ini membawa kita ke formulasi aljabar (Brand, 2020).





Newton tidak menulis dalam bentuk vektor, tetapi melalui diagramnya kita melihat bahwa dia dengan jelas memikirkan kekuatan dalam istilah ini. Misalnya, ia mendalilkan bahwa dua gaya yang bekerja secara bersamaan dapat diperlakukan sebagai bertindak secara berurutan. Jadi misalkan dua gaya, diwakili oleh vektor V dan W, bekerja pada sebuah benda di a Titik tertentu. Apa yang dirasakan benda adalah resultan dari kedua gaya tersebut, yang dapat dihitung dengan menempatkan vektor ujung ke ujung. Maka resultannya adalah vektor dari titik awal vektor pertama ke titik akhir vektor kedua. Jelas, ini sama jika kita membalik urutan vektor. Kami menyebutnya jumlah dari dua vektor, dilambangkan V + W. Misalnya, jika sebuah benda bergerak dalam fluida di ruang angkasa dengan kecepatan V, sedangkan fluida bergerak dengan kecepatan W, maka benda tersebut bergerak (relatif terhadap titik tetap) dengan kecepatan V + W (Wyld, 2020).

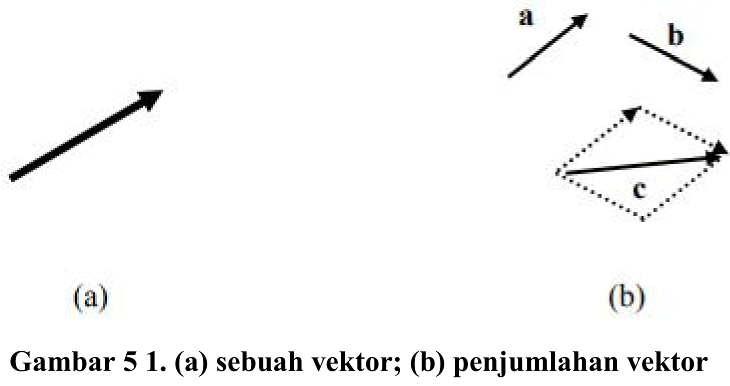
a. Skalar

Besaran fisis yang dinyatakan secara lengkap oleh satu bilangan real disebut skalar. Secara fisik, itu adalah sesuatu yang memiliki besaran, dan dijelaskan secara lengkap oleh besarnya ini. Contohnya adalah suhu, massa jenis dan massa. Berikut ini, huruf kecil (biasanya Yunani), mis. α, β, γ akan digunakan untuk menyatakan skalar.

b. Vektor

Konsep vektor digunakan untuk menggambarkan besaran fisis yang memiliki a besarnya dan arah yang terkait dengannya. Contohnya adalah gaya, kecepatan, perpindahan dan percepatan. Secara geometris, sebuah vektor diwakili oleh panah; panah menentukan arah vektor dan besarnya vektor dilambangkan dengan panjang anak panah. Secara analitis, vektor akan direpresentasikan dengan huruf kecil huruf Latin tebal, mis**. a, r, q.**

Besar (atau panjang) suatu vektor dilambangkan dengan $|a|$ atau a. Ini adalah skalar dan harus non-negatif. Setiap vektor yang panjangnya 1 disebut vektor satuan; vektor satuan akan biasanya dilambangkan dengan e



Gambar 5 1. (a) sebuah vektor; (b) penjumlahan vektor

c. Aljabar Vektor

Operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian yang dikenal dalam aljabar angka (atau skalar) dapat diperluas ke aljabar vektor(Mhailan et al., 2020).

Definisi dan properti berikut secara mendasar mendefinisikan vektor:

- **Jumlah Vektor**

Penjumlahan vektor a dan b adalah vektor c yang dibentuk dengan menempatkan titik awal b pada titik terminal a dan kemudian menghubungkan titik awal a ke terminal titik b. Jumlahnya ditulis $c = a + b$. Definisi ini disebut hukum jajaran genjang untuk penjumlahan vektor karena, dalam interpretasi geometris penjumlahan vektor, c adalah diagonal jajar genjang yang dibentuk oleh dua vektor a dan B. Sifat-sifat berikut berlaku untuk penjumlahan vektor:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \qquad \ldots \text{ commutative law}$$

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \qquad \ldots \text{ associative law}$$

- **Vektor Negatif**

Untuk setiap vektor a terdapat vektor negatif. Vektor ini memiliki arah berlawanan dengan vektor a tetapi memiliki besar yang sama; itu dilambangkan dengan -a.

- **Pengurangan Vektor dan Vektor Nol**

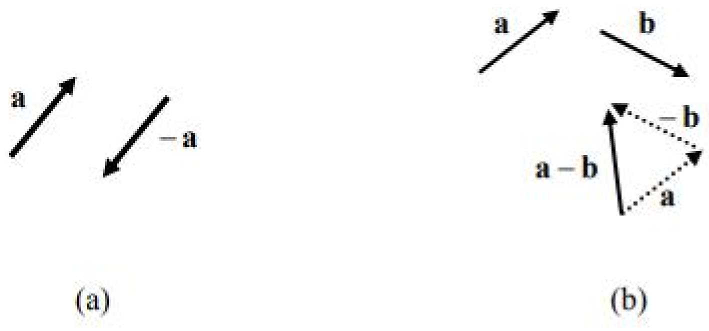
Pengurangan dua vektor a dan b didefinisikan oleh $a - b = a + (-b)$. Jika a=b maka a-b didefinisikan sebagai vektor nol (atau vektor nol) dan adalah dilambangkan dengan simbol o. Ini memiliki besaran nol dan arah yang tidak ditentukan. SEBUAH vektor yang tepat adalah vektor apa pun selain vektor nol. Dengan demikian:

$$\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$$
$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}$$

- **Perkalian Skalar**

Hasil kali vektor a dengan skalar α adalah vektor $\alpha\,\mathbf{a}$ dengan besar $|\alpha|$ kali besarnya **a** dan dengan arah yang sama atau berlawanan dengan **a**, sesuai α dengan positif atau negatif. Jika $\alpha = 0$, $\alpha\,\mathbf{a}$ adalah vektor nol. Itu sifat-sifat berikut berlaku untuk perkalian skalar:

$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ … distributive law, over addition of scalars
$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ … distributive law, over addition of vectors
$\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$ … associative law for scalar multiplication



Gambar 5.2 (a) negatif dari suatu vektor; (b) pengurangan vektor

Perhatikan bahwa ketika dua vektor **a** dan **b** adalah sama, mereka memiliki arah yang sama dan besarnya, terlepas dari posisi titik awalnya. Jadi **a=b** sebuah posisi tertentu dalam ruang tidak ditugaskan di sini untuk vektor - itu hanya memiliki besaran dan arah. Vektor semacam itu disebut bebas, untuk membedakannya dari vektor khusus tertentu untuk di mana posisi tertentu dalam ruang benar-benar ditetapkan.

Gambar 5.3 Vektor yang sama

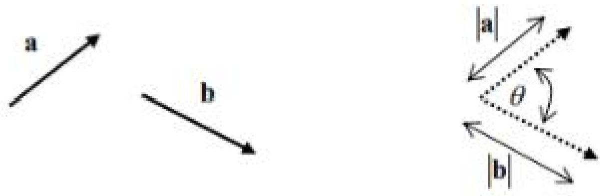
Vektor sebagai sesuatu dengan "besar dan arah" dan didefinisikan oleh aturan di atas adalah elemen dari satu kasus struktur matematika, ruang vektor.

d. Produk Titik (Dot Product)

Produk titik dari dua vektor a dan b (juga disebut produk skalar) dilambangkan dengan **a.b** Ini adalah skalar yang didefinisikan oleh

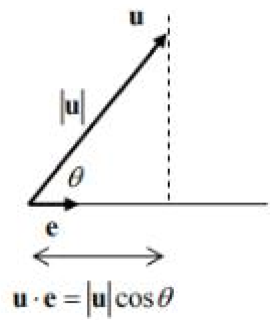
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta \,.$$

θ di sini adalah sudut antara vektor ketika titik awalnya bertepatan dan dibatasi ke kisaran $0 \leq \theta \leq \pi$,



Gambar 5.4 Dot Product

Sifat penting dari hasil kali titik adalah jika untuk dua vektor (benar) a dan b, relasi **a.b**=0 , maka a dan b tegak lurus. Kedua vektor tersebut dikatakan ortogonal. Sehingga $a.a = |a||a|\cos(0)$, sehingga panjang vektor adalah $|a| = \sqrt{a.a}$ Sifat penting lainnya adalah proyeksi vektor **u** sepanjang arah **a**, vektor satuan e diberikan oleh **u.e** .



Gambar 5.5 Proyeksi vektor sepanjang arah vektor satuan

Oleh karena itu, setiap vektor u dapat didekomposisi menjadi komponen yang sejajar dengan (satuan) vektor e dan komponen lain yang tegak lurus terhadap e, menurut

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + [\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}]$$

Produk titik memiliki sifat-sifat berikut (yang dapat dibuktikan dengan menggunakan di atas definisi)

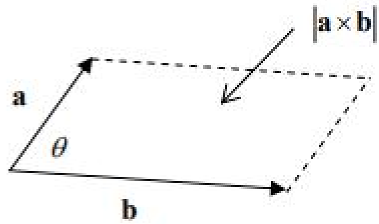
$$\begin{array}{lll}(1) & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} & \text{(commutative)}\\ (2) & \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \text{(distributive)}\\ (3) & \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{b}) & \\ (4) & \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\geq 0\text{; and } \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0 \text{ if and only if } \mathbf{a}=\mathbf{o} & \end{array}$$

e. Produk silang (Cross Product)

Perkalian silang dua vektor a dan b (disebut juga perkalian vektor) dilambangkan dengan sebuah $a \times b$. Ini adalah vektor dengan besaran;

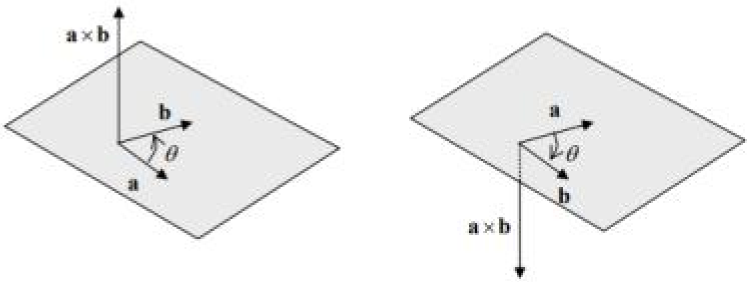
$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$$

dengan θ didefinisikan sebagai produk titik. Dari gambar dapat dilihat bahwa besar $a \times b$ sama dengan luas jajar genjang yang ditentukan oleh dua vektor a dan b.



Gambar 5.6 Proyeksi vektor sepanjang arah vektor satuan

Arah vektor baru ini tegak lurus terhadap a dan b. Apakah poin $a \times b$ "naik" atau "turun" ditentukan dari fakta bahwa tiga vektor a, b dan $a \times b$ membentuk sistem tangan kanan. Ini berarti bahwa jika ibu jari tangan kanan menunjuk ke arah $a \times b$, dan tangan terbuka diarahkan ke arah a, lalu kelengkungan jari-jari tangan kanan sehingga menutup harus menggerakkan jari melalui sudut θ, $0 \le \theta \le \pi$, membawa mereka ke b.



Gambar 5.7 Contoh perkalian silang

Perkalian silang memiliki sifat-sifat berikut (yang dapat dibuktikan dengan menggunakan definisi di atas):

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (*not* commutative)

(2) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (distributive)

(3) $\alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b})$

(4) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}$ if and only if **a** and **b** $(\neq \mathbf{o})$ are parallel ("linearly dependent")

f. Produk Skalar Tiga Kali Lipat

Hasil kali skalar rangkap tiga, atau hasil kali kotak, dari tiga vektor u, v, w didefinisikan oleh

$$\boxed{(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}}$$

Pentingnya terletak pada kenyataan bahwa, jika tiga vektor membentuk triad tangan kanan, maka volume V dari paralelepiped yang direntang oleh tiga vektor sama dengan produk kotak.

Untuk melihat ini, misalkan e adalah vektor satuan dalam arah $u \times v$. Kemudian proyeksi dari w pada $u \times v$ adalah h= $w \times e$, dan;

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{w} \cdot (|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|\mathbf{e}) \\ &= |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|h \\ &= V \end{aligned}$$

5.2 Differensial Vektor

a. Fungsi bernilai vektor

Ini adalah fungsi bernilai skalar dalam arti bahwa hasil penerapan fungsi tersebut adalah bilangan real, yang merupakan besaran skalar. Kami sekarang ingin pertimbangkan fungsi bernilai vektor $f : D \to \mathbb{R}^m$. Pada prinsipnya, m dapat berupa bilangan bulat positif apa pun, tetapi kita hanya akan pertimbangkan kasus di mana m = 2 atau 3, dan hasil penerapan fungsi adalah vektor 2D atau 3D (Biswas et al., 2020).

b. Persamaan kurva parametrik

Jenis paling sederhana dari fungsi bernilai vektor memiliki bentuk $f : I \to \mathbb{R}^2$, dimana $I \subset \mathbb{R}$. Fungsi seperti itu kembali vektor 2D f(t) untuk masing-masing $t \in I$, yang dapat dianggap sebagai vektor posisi beberapa titik pada bidang. Misalnya, Ini menyatakan bahwa vektor posisi titik mana pun P pada garis yang melalui titik A dan B adalah

$$\mathbf{p} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha + \beta},$$

untuk setiap skalar α, β. Jika kita mendefinisikan t = /(α+), maka ini dapat ditulis ulang sebagai $t = \beta/(\alpha + \beta)$, maka ini dapat ditulis ulang sebagai;

$$\mathbf{p}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

Ketika t berubah, kita mendapatkan titik yang berbeda pada garis yang melalui A dan B dan khususnya, $p(0) = a$,dan $p(1) = b$

Kita mungkin menganggap p sebagai fungsi bernilai vektor;

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

gambar yang merupakan seluruh garis, atau;

$$p : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

bayangan yang merupakan ruas garis dari A ke B.

Secara umum, sebuah kurva, dalam ruang 2D atau 3D, dapat direpresentasikan sebagai gambar dari fungsi bernilai vektor pada interval I; vektor posisi suatu titik pada kurva adalah

$$r = f(t), \quad t \in \text{I}.$$

Ini disebut deskripsi parametrik kurva dan t disebut parameter. Ini juga dapat ditulis dalam bentuk komponen; jika ;

$$x = f1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t),\ \ \mathrm{t} \in \mathrm{I}.$$

- Jenis standar kurva parametrik
- Lingkaran dan elips

Lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, memiliki pusat (a, b) dan jari-jari r, dapat diparametrikan menggunakan koordinat kutub $x - a = rcos\theta$ dan $y - b = rsin\theta.$ Ingat bahwa θ adalah sudut antara jari-jari dan sumbu x positif, diukur dalam arah berlawanan arah jarum jam. Oleh karena itu lingkaran memiliki bentuk parametrik

$$x = a + rcos\theta,\ y = b + rsin\theta,\ \ \theta \in [0,\ 2\pi).$$

Jika lingkaran ini dianggap sebagai kurva pada bidang xy dalam ruang 3D, maka itu akan menjadi

$$x = a + rcos\theta,\ y = b + rsin\theta,\ z = 0,\ \ \theta \in [0,\ 2\pi).$$

Dengan cara yang sama, elips

$$\frac{(x-a)^2}{A^2} + \frac{(y-b)^2}{B^2} = 1$$

memiliki bentuk parametrik

$$x = a + Acos\theta,\ y = b + Bsin\theta,\ \ \theta \in [0, 2\pi).$$

- **Parabola**

Parabola $y^2 = 4ax$ dapat diparametrisasi sebagai

$$x = at^2,\ y = 2at, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Untuk menunjukkan bahwa kurva parametrik identik dengan parabola, kita harus membuktikan bahwa setiap titik pada kurva parametrik terletak pada parabola dan sebaliknya. Untuk setiap t, mari $x = at^2$, dan $y = 2at$ maka $y^2 = 4a^2t^2 = 4a\left(at^2\right) = 4ax$ sehingga setiap titik pada kurva parametrik terletak pada parabola. Juga, diberikan setiap titik (x, y) pada parabola, tentukan t = y/2a sehingga y = 2at dan kemudian $x = y^2/4a = at^2$, sehingga (x,y) juga terletak pada kurva parametrik.

- **Garis**

Kita dapat memperhatikan bahwa;

$$\mathbf{r} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad t \in [0,1],$$

Yang merupakan bentuk parametrik dari ruas garis yang menghubungkan $A(a_1, a_2, a_3)$ dan $B(b_1, b_2, b_3)$. Ini juga dapat ditulis dalam bentuk komponen sebagai;

$$x = (1-t)a_1 + b_1,\ y = (1-t)a_2 + b_2,\ z = (1-t)a_3 + b_3, \quad t \in [0,1].$$

Juga, jika diberikan titik a pada garis dan vektor arah d untuk garis tersebut, maka bentuk parametriknya adalah;

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

c. Diferensiasi fungsi bernilai vektor

Kurva C didefinisikan oleh r = r(t), sebuah fungsi bernilai vektor dari satu variabel (skalar). Mari kita bayangkan bahwa C adalah lintasan yang ditempuh partikel dan t adalah waktu. Vektor r(t) adalah vektor posisi partikel pada waktu t dan r(t + h) adalah vektor posisi di kemudian hari t + h. Kecepatan rata-rata partikel dalam selang waktu [t, t + h] maka

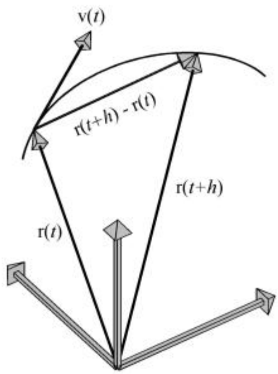
$$\frac{\text{displacement vector}}{\text{length of time interval}} = \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}.$$

Dalam hal komponen r ini adalah

$$\left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \frac{z(t+h) - z(t)}{h}\right).$$

Jika masing-masing fungsi skalar x, y dan z terdiferensialkan, maka vektor ini memiliki limit

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$



Gambar 5.8 Contoh perkalian silang

yang merupakan kecepatan sesaat partikel v(t). Artinya (jika gerakannya halus) maka;

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Vektor ini terletak di sepanjang garis singgung kurva di r dan memiliki panjang $v(t) = |v(t)|$ yang seketika kecepatan partikel.

Dengan cara yang sama, kita mendefinisikan percepatan,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t).$$

Lebih umum, untuk setiap kurva r = r(α) yang diparametrisasikan oleh α (say), vektor

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{d\alpha}$$

disebut vektor tangen kurva dan vektor satuan

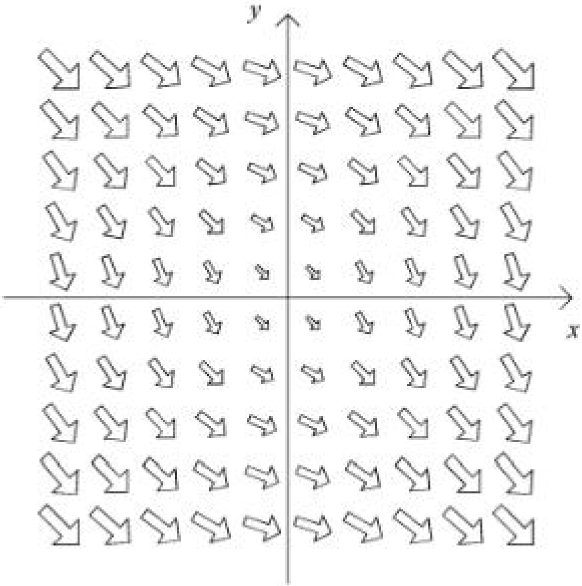
$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|},$$

disebut vektor tangen satuan.

d. Bidang vektor dan skalar

Fungsi dari dua atau tiga variabel yang dipetakan ke vektor disebut medan vektor. Sebaliknya, fungsi dari dua atau tiga variabel yang dipetakan ke skalar disebut medan skalar.

seseorang dapat merepresentasikan grafik medan skalar sebagai kurva atau permukaan. Medan vektor F(x, y) (atau F(x, y, z)) sering direpresentasikan dengan menggambar vektor F(r) di titik r untuk titik-titik perwakilan dalam domain. Contoh yang baik dari medan vektor adalah kecepatan pada suatu titik dalam fluida; di setiap titik kita menggambar panah (vektor) mewakili kecepatan (kecepatan dan arah) aliran fluida. Panjang anak panah mewakili kecepatan fluida di setiap titik.



Gambar 5.9 Medan vektor mewakili kecepatan fluida

e. Berbagai jenis turunan differensial

Kita telah membahas turunan dan turunan parsial dari fungsi skalar. Selanjutnya kita akan mempertimbangkan diskusikan berbagai jenis "turunan" lain dari fungsi skalar dan vektor;

dalam beberapa kasus hasilnya adalah skalar dan kadang-kadang vektor.

Ingat bahwa jika u, v, w adalah vektor dan α adalah skalar, ada sejumlah produk berbeda yang dapat dibuat;

Name of product	Formula	Type of result
Scalar multiplication	$\alpha\mathbf{u}$	Vector
Scalar or dot product	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$	Scalar
Vector or cross product	$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$	Vector

Sekarang perhatikan operator diferensial vektor

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Ini dibaca sebagai del atau nabla dan jangan disamakan dengan Δ, huruf kapital Yunani delta. Seseorang dapat membentuk "produk" dari vektor ini dengan vektor dan skalar lain, tetapi karena ini adalah operator, itu harus selalu istilah pertama jika produknya masuk akal. Misalnya, jika f adalah medan skalar, kita dapat membentuk skalar "perkalian" dengan ketentuan ∇

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

hasilnya adalah vektor. Di bawah ini kami akan memperkenalkan "turunan" yang sesuai dengan produk vektor.

f. Gradient ("perkalian dengan skalar")

Ini hanya contoh yang diberikan di atas. Kami mendefinisikan gradien medan skalar f menjadi

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

Kami akan menggunakan notasi grad f dan ∇f secara bergantian.

- Arah turunan

Ini adalah laju perubahan medan skalar f dalam arah vektor satuan u = (u_1, u_2, u_3). Seperti halnya turunan normal, itu didefinisikan oleh batas hasil bagi perbedaan, dalam hal ini turunan arah f di p dalam arah u didefinisikan sebagai;

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{p})}{h},$$

(jika limit ada) dan dilambangkan

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{p}).$$

Definisi ini jarang digunakan secara langsung. Rumus kunci untuk turunan arah dari f dalam arah u adalah;

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot \nabla f = u_1 \frac{\partial f}{\partial x} + u_2 \frac{\partial f}{\partial y} + u_3 \frac{\partial f}{\partial z}}$$

Untuk membuktikan ini, perhatikan terlebih dahulu bahwa

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{p}+t\mathbf{u}) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(\mathbf{p}+(t+h)\mathbf{u}) - f(\mathbf{p}+t\mathbf{u})}{h}$$

sehingga (∗) dapat diperoleh sebagai

$$\left.\frac{d}{dt}f(\mathbf{p}+t\mathbf{u})\right|_{t=0}.$$

Juga, dengan menggunakan aturan rantai, kita memiliki

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{p}+t\mathbf{u}) = u_1\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}+t\mathbf{u}) + u_2\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}+t\mathbf{u}) + u_3\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}+t\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla f(\mathbf{p}+t\mathbf{u}).$$

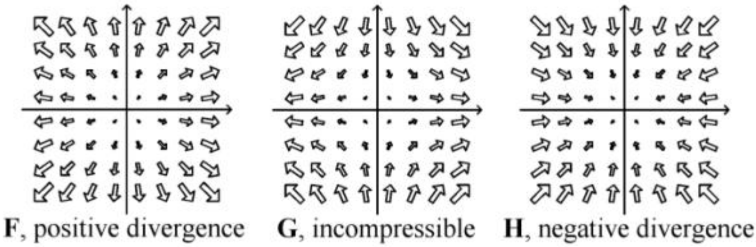
Menggabungkan hasil ini memberikan formula yang diperlukan.

g. Divergensi medan vektor ("produk skalar")

Divergensi medan vektor F = (F_1, F_2, F_3) adalah skalar yang diperoleh sebagai "produk skalar" dari ∇ dan F

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}}$$

Disebut demikian, karena mengukur kecenderungan medan vektor untuk divergen (divergensi positif) atau konvergen (divergensi negatif). Secara khusus, medan vektor dikatakan incompressible (atau solenoidal) jika divergensinya adalah nol.



Gambar 5.10 Divergensi positif dan negatif

medan vektor $F = (x, y, 0)$, $G = (x, -y, 0)$ dan $H = (-x, -y, 0)$ pada bidang xy. Kita memiliki;

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2 > 0$$

dan dengan cara yang sama, div G = 0 dan div H = 2 < 0. Perhatikan bagaimana panah pada plot F berbeda dan pada plot H konvergen.

BAB VI
FUNGSI KHUSUS

Pada subbab ini adalah tentang fungsi khusus dan propertinya. Banyak fungsi yang diketahui bisa disebut istimewa. Mereka tentu saja menyertakan fungsi dasar seperti eksponensial dan banyak lagi secara umum, trigonometri, fungsi hiperbolik dan inversnya, fungsi logaritma dan poli-logaritma, tetapi kelas juga berkembang menjadi fungsi transendental seperti Lam´e dan fungsi Mathieu. Biasanya seseorang berurusan terlebih dahulu dengan fungsi khusus dari satu variabel sebelum masuk ke studi generalisasi multi-variabelnya, yang tidak unik dan yang terbuka up link dengan teori sistem terintegrasi. Kami akan membatasi diri pada fungsi hipergeometrik yang biasanya didefinisikan oleh deret representasi.

- **Definisi 1.1:** *Deret hipergeometrik adalah deret* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dengan $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *fungsi rasional dari n.*

Fungsi Bessel, Legendre, Jacobi, fungsi silinder parabola, simbol 3j dan 6j muncul dalam mekanika kuantum dan banyak lagi fungsi khusus klasik adalah kasus parsial dari fungsi hipergeometrik. Namun, fungsi transendental "berbaring di tanah" luar Bessel" berada di luar kelas hipergeormetrik dan, dengan demikian, tidak akan dipertimbangkan dalam kursus ini. Euler, Pfaff dan Gauss pertama kali memperkenalkan dan mempelajari deret hipergeometrik, membayar khusus memperhatikan kasus-kasus ketika deret dapat dijumlahkan menjadi fungsi dasar. Ini memberi salah satu motivasi untuk mempelajari deret hipergeometrik, yaitu fakta bahwa fungsi dan beberapa fungsi penting lainnya dalam matematika dapat dinyatakan dalam istilah fungsi hipergeometrik (Iandiorio & Salvini, 2020).

Fungsi hipergeometrik juga dapat digambarkan sebagai solusi persamaan diferensial khusus, persamaan diferensial hipergeometrik. Riemann adalah orang pertama yang mengeksploitasi ide ini dan memperkenalkan simbol khusus untuk mengklasifikasikan fungsi hipergeometrik berdasarkan singularitas dan eksponen persamaan diferensial mereka memenuhi. Dengan cara ini kami menemukan alternatif definisi fungsi hipergeometrik (Zhao et al., 2020)

- **Definisi 1.2:** *Fungsi hipergeometrik adalah solusi dari persamaan diferensial Fuchsian yang memiliki paling banyak tiga singularitas reguler.*

Perhatikan bahwa fungsi khusus transendental dari kelas Heun, yang disebut fungsi Heun yang "di luar Bessel", didefinisikan sebagai solusi khusus dari orde kedua linier generik Persamaan diferensial Fuchsian dengan empat singularitas reguler. Tentu saja, ketika berbicara tentang 3 atau 4 singularitas reguler, itu berarti jumlah singularitas bisa kurang dari itu, baik dengan meremehkan persamaan atau dengan menggabungkan dua singularitas reguler untuk mendapatkan titik singular tidak beraturan sehingga mengarah ke kasus konfluen yang sesuai dari fungsi hipergeomerik atau Heun. Jadi, Bessel dan silinder parabola fungsi adalah kasus khusus dari fungsi hipergeometrik konfluen dan konfluen ganda, sedangkan fungsi Lam´e dan Mathieu adalah kasus khusus dari fungsi Heun dan konfluen Heun, masing-masing. Ketika jumlah singularitas maksimum yang diizinkan dari persamaan diferensial tumbuh itu menghasilkan fungsi khusus yang lebih transendental yang terkait dengannya. Perkenalan singkat untuk teori persamaan Fuchsian dengan n singularitas reguler akan diberikan nanti di kursus (Şahin & Yağcı, 2020).

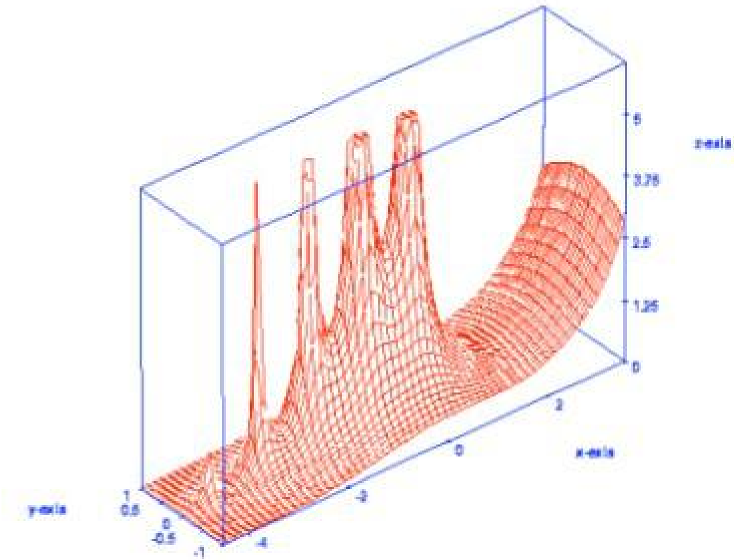
Pada dekade pertama abad XX E.W. Barnes memperkenalkan pendekatan lain untuk fungsi hipergeometrik berdasarkan representasi integral kontur. Representasi seperti itu adalah penting karena dapat digunakan untuk menurunkan banyak hubungan antara hipergeometrik fungsi dan juga untuk mempelajari asimtotiknya. Seluruh kelas fungsi hipergeometrik sangat berbeda dibandingkan dengan yang lain fungsi khusus, karena hanya untuk kelas ini yang dapat memiliki deret eksplisit dan representasi integral, hubungan bersebelahan dan koneksi, rumus penjumlahan dan transformasi, dan banyak persamaan indah lainnya yang menghubungkan satu fungsi hipergeometrik dengan fungsi hipergeometrik lainnya. Ini adalah kelas fungsi di mana seseorang mungkin dapat mengatakan bahwa setiap rumus yang berarti dapat menjadi ditulis secara eksplisit; itu tidak mengatakan bahwa selalu mudah untuk menemukannya. Juga untuk itu alasan ini adalah kelas fungsi untuk memulai dan menempatkan sebagai dasar pengantar kursus dalam fungsi khusus.

Alasan utama dari banyak aplikasi fungsi hipergeometrik dan fungsi khusus secara umum adalah kegunaannya. Rumus penjumlahan menemukan jalannya dalam kombinatorik; klasik polinomial ortogonal memberikan basis eksplisit di beberapa ruang dan timah Hilbert yang penting untuk Analisis Hamonik konstruktif dengan aplikasi dalam fisika kuantum dan kimia; deret qhipergeometrik terkait dengan fungsi eliptik dan fungsi theta dan oleh karena itu temukan aplikasi dalam integrasi sistem persamaan diferensial non-linier dan di beberapa daerah analisis numerik dan matematika diskrit.

6.1 Fungsi Gamma

Fungsi Gamma $\Gamma(x)$ ditemukan oleh Euler pada akhir tahun 1720-an dalam upaya untuk menemukan kelanjutan analitik dari fungsi faktorial. Fungsi ini merupakan landasan dari teori fungsi khusus.

Jadi $\Gamma(x)$ adalah fungsi meromorfik yang sama dengan (x−1)! ketika x adalah bilangan bulat positif. Euler menemukan representasinya sebagai integral tak hingga dan sebagai limit dari produk hingga. Biarkan kami turunkan representasi terakhir mengikuti generalisasi Euler dari faktorial (Augustyniak et al., 2020).



Gambar 6.1 Grafik nilai absolut fungsi Gamma dari variabel kompleks z = x + iy dari sistem aljabar komputer MuPAD. Ada kutub terlihat di z = 0, 1, 2, 3, 4, ...

Misalkan x dan n bilangan bulat tak negatif. Untuk setiap $a \in$ □ tentukan faktorial yang digeser $(a)_n$ oleh:

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) \qquad \text{for} \quad n > 0, \qquad (a)_0 = 1.$$

Kemudian, jelas,

$$x! = \frac{(x+n)!}{(x+1)_n} = \frac{n!(n+1)_x}{(x+1)_n} = \frac{n!n^x}{(x+1)_n} \cdot \frac{(n+1)_x}{n^x}.$$

Sejak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)_x}{n^x} = 1,$$

Kita dapat menyimpulkan bahwa;

$$x! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n}.$$

Limit ada pada $\forall x \in \square$, seperti yang $x \neq -1, -2, -3, \ \ldots,$ untuk

$$\frac{n!n^x}{(x+1)_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^x \prod_{j=1}^{n} \left(1+\frac{x}{j}\right)^{-1} \left(1+\frac{1}{j}\right)^x$$

Dan

$$\left(1+\frac{x}{j}\right)^{-1} \left(1+\frac{1}{j}\right)^x = 1 + \frac{x(x-1)}{2j^2} + O\left(\frac{1}{j^3}\right).$$

- **Definisi 1.3:** *Untuk* $\forall x \in \square$, $x \neq 0, \ -1, -2, \ldots,$ *fungsi gamma* $\Gamma(x)$ *didefinisikan oleh;*

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{k!k^{x-1}}{(x)_k}.$$

Maka tiga konsekuensi langsung adalah

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{and} \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa fungsi gamma memiliki kutub di nol dan negatif bilangan bulat, tetapi $\dfrac{1}{\Gamma(x)}$ adalah seluruh fungsi dengan nol pada titik-titik ini. Setiap seluruh fungsi memiliki representasi produk.

- **Teorema 1.4**

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\right\},$$

di mana γ adalah konstanta Euler yang diberikan oleh

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log\, n\right).$$

Bukti

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{n!n^{x-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x\log n} \\
&= \lim_{n\to\infty} xe^{x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)}\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right\} \\
&= xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\right\}.
\end{aligned}$$

Hasil kali tak hingga ada karena;

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}\cdots\right) = 1-\frac{x^2}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

6.2 Fungsi beta

- **Definisi 1.5:** Integral beta didefinisikan untuk $\Re x > 0,\ \Re y > 0$ oleh

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Kita juga dapat berbicara tentang fungsi beta B(x, y), yang diperoleh dari integral dengan kelanjutan analitik. Fungsi beta dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi gamma.

- **Teorema 1.6:**

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Bukti. Dari definisi integral beta kita memiliki hubungan bersebelahan berikut: antara tiga fungsi (Kumar, 2020)

$$B(x,y+1) = B(x,y) - B(x+1,y), \qquad \Re x > 0, \quad \Re y > 0.$$

Namun, integrasi dengan bagian integral di sisi kiri memberikan

$$B(x,y+1) = \frac{y}{x} B(x+1,y).$$

Menggabungkan dua yang terakhir kita mendapatkan persamaan fungsional dari bentuk

$$B(x,y) = \frac{x+y}{y} B(x,y+1).$$

Iterasi persamaan ini kita peroleh

$$B(x,y) = \frac{(x+y)_n}{(y)_n} B(x, y+n).$$

Tulis ulang hubungan ini sebagai

$$B(x,y) = \frac{(x+y)_n}{n!n^{x+y-1}} \frac{n!n^{y-1}}{(y)_n} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+y-1} dt.$$

Dimana kita mengetahui bahwa $n \to \infty$, maka kita punya

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt.$$

Tetapkan y = 1 untuk sampai di

$$\frac{1}{x} = \int_0^1 t^{x-1} dt = B(x,1) = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(x+1)} \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt.$$

Karenanya

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt, \qquad \Re x > 0.$$

Ini adalah representasi integral untuk fungsi gamma, yang muncul di sini sebagai produk sampingan. Sekarang gunakan untuk membuktikan teorema untuk $\Re x > 0$, dan $\Re y > 0$ dan kemudian gunakan argumen standar dari kelanjutan analitik untuk menyelesaikan bukti.

- **Akibat wajar 1.7:** Untuk $\Re x > 0$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Gunakan untuk secara eksplisit mewakili kutub dan kelanjutan analitik dari $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+x)n!} + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Integral adalah fungsi inti dan jumlah memberikan kutub di $x = -n,\ n = 0,1,2,...$ dengan residu sama dengan $(-1)^n / n!$.

Beberapa bentuk lain yang berguna dari integral beta dapat diturunkan dengan perubahan variabel. Misalnya, ambil $t = \sin^2 \theta$, untuk mendapatkan

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta \, d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)}.$$

Masukkan x = y = 1/2. Hasilnya adalah

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Substitusi t = (u-a)/(b-a) memberikan

$$\int_a^b (b-u)^{x-1}(u-a)^{y-1} du = (b-a)^{x+y-1} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}:$$

yang dapat ditulis ulang dalam bentuk alternatif:

$$\int_a^b \frac{(b-u)^{x-1}}{\Gamma(x)} \frac{(u-a)^{y-1}}{\Gamma(y)} du = \frac{(b-a)^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)}.$$

6.3 Integral beta lainnya

Ada beberapa jenis representasi integral untuk fungsi beta. Semuanya bisa dibawa ke bentuk berikut:

$$\int_C [\ell_1(t)]^p [\ell_2(t)]^q dt,$$

di mana $l_1(t)$, dan $l_2(t)$ adalah fungsi linier dari t, dan C adalah kurva yang sesuai. Representasi disebut integral beta pertama Euler. Untuk itu, kurva terdiri dari segmen garis menghubungkan dua nol dari fungsi l. Kami memperkenalkan sekarang empat integral beta lagi. Untuk integral beta kedua, kurva adalah setengah garis yang menghubungkan satu nol dengan tak terhingga sementara yang lain nol tidak pada baris ini. Untuk integral beta ketiga (Cauchy), ini adalah garis dengan nol di sisi yang berlawanan. Untuk dua integral beta terakhir, kurva adalah kontur kompleks. Kasus pertama, itu dimulai dan berakhir pada satu nol dan mengelilingi nol lainnya dalam arah positif. Dalam kasus kedua, kurva adalah loop ganda yang berkelok-kelok di sekitar dua nol, sekali dalam arah positif dan kedua kalinya ke arah negatif.

a. Integral beta kedua

Atur $t = s/(s+1)$ untuk mendapatkan integral beta kedua dengan integrasi lebih dari setengah garis

$$\int_0^{\infty} \frac{s^{x-1}}{(1+s)^{x+y}} \, ds = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \, .$$

b. Integral beta ketiga (Cauchy)

Integral beta karena Cauchy didefinisikan oleh;

$$C(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+it)^x (1-it)^y} = \frac{\pi 2^{2-x-y} \Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}, \qquad \Re(x+y) > 1.$$

Bukti. Untuk membuktikan ini, pertama tunjukkan bahwa integrasi dengan bagian memberikan

$$C(x, y+1) = -\frac{x}{y} C(x+1, y).$$

Yang juga

$$C(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1-it)+2}{(1+it)^x (1-it)^{y+1}} = 2C(x,y) - C(x-1, y+1).$$

Dua terakhir bergabung untuk memberikan persamaan fungsional

$$C(x,y) = \frac{2y}{x+y-1} C(x, y+1) \, .$$

Iterasi memberikan

$$C(x,y) = \frac{2^{2n}(x)_n(y)_n}{(x+y-1)_{2n}}\, C(x+n, y+n)\,.$$

Sekarang

$$C(x+n, y+n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n(1+it)^x(1-it)^y}\,.$$

Atur $t \to t/\sqrt{n}$ dan ambil n $\to \infty$

Substitusi $t = tan\theta$ mengarah ke integral:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{x+y-2}\theta\, \cos(x-y)\theta\, d\theta = \frac{\pi 2^{1-x-y}\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}, \quad \Re(x+y) > 1.$$

c. Kontur kompleks untuk integral beta

Perhatikan integralnya

$$I_{x,y} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{(1+)} w^{x-1}(w-1)^{y-1}dw,$$

Dengan $\Re x > 0$ dan $y \in \square$. Kontur dimulai dan berakhir di titik asal, dan mengelilingi titik 1 ke arah positif. Fase w-1 adalah nol pada titik positif yang lebih besar dari 1. Ketika $\Re y > 0$ kita dapat mengubah bentuk kontur sepanjang (0, 1). Kemudian kita peroleh $I_{x,y} = B(x,\ y)\ sin(\pi y)/\pi.$ Dia mengikuti itu

$$B(x,y) = \frac{1}{2i \sin \pi y}\int_0^{(1+)} w^{x-1}(w-1)^{y-1}dw.$$

Integral didefinisikan untuk setiap nilai kompleks y. Untuk y = 1,2,..., integral menghilang; ini dibatalkan oleh nilai-nilai tak terbatas dari istilah di depan integral.

Ada integral kontur serupa yang mewakili fungsi gamma. Mari kita buktikan dulu Integral kontur Hankel untuk fungsi gamma timbal balik, yang merupakan salah satu representasi paling indah dan berguna untuk fungsi ini. Ini memiliki bentuk berikut:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L s^{-z} e^s ds, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Kontur integrasi L adalah kontur Hankel yang membentang dari $-\infty$, $arg\ s = -\pi$, mengelilingi asal dalam arah positif dan berakhir di , sekarang dengan arg s = $+\pi$. Untuk ini kami juga menggunakan notasi $\int_{-\infty}^{(0+)}$. Fungsi bernilai banyak s^{-z} diasumsikan nyata untuk nyata nilai z dan s, s > 0. langsung dari teori transformasi Laplace: dari integral terkenal

$$\frac{\Gamma(z)}{s^z} = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-st} dt$$

berikut sebagai kasus khusus dari rumus inversi. Bukti langsung mengikuti dari spesial pilihan kontur L: sumbu real negatif. Saat $\Re z < 1$. kita dapat menarik kontur ke sumbu negatif, di mana kita memiliki

$$\frac{1}{2\pi i}\left[-\int_{\infty}^{0}(se^{-i\pi})^{-z}e^{-s}ds-\int_{0}^{\infty}(se^{+i\pi})^{-z}e^{-s}ds\right]=\frac{1}{\pi}\sin\pi z\,\Gamma(1-z).$$

Menggunakan rumus refleksi

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x},$$

Pada langkah terakhir prinsip analitik lanjutan Yaitu, baik sisi kiri maupun sisi kanan. adalah seluruh fungsi dari z.

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_{L}s^{z-1}e^{s}ds.$$

d. Rumus refleksi Euler

Rumus refleksi Euler menghubungkan fungsi gamma dengan fungsi sinus. Di pengertian, itu menunjukkan bahwa 1/Γ(x) adalah 'setengah dari fungsi sinus'. Untuk membuktikan rumus , maka atur y = 1 x, 0 < x < 1, untuk mendapatkan

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\int_{0}^{\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}dt.$$

Untuk menghitung integral, perhatikan integral kontur berikut:

$$\int_{C}\frac{z^{x-1}}{1-z}dz,$$

di mana C terdiri dari dua lingkaran tentang asal-usul jari-jari R dan ∈ masing-masing, yaitu bergabung di sepanjang sumbu real negatif dari -R ke -$\in$. Bergerak di sepanjang lingkaran luar yang berlawanan arah jarum jam, dan sepanjang lingkaran dalam searah jarum jam. Oleh teorema residu

$$\int_C \frac{z^{x-1}}{1-z}\,dz = -2\pi i,$$

Pada saat z^{x-1} memiliki nilai pokoknya. Dengan demikian

$$-2\pi i = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{iR^x e^{ix\theta}}{1-Re^{i\theta}}\,d\theta + \int_R^{\epsilon} \frac{t^{x-1}e^{ix\pi}}{1+t}\,dt + \int_{\pi}^{-\pi} \frac{i\epsilon^x e^{ix\theta}}{1-\epsilon e^{i\theta}}\,d\theta + \int_{\epsilon}^{R} \frac{t^{x-1}e^{-ix\pi}}{1+t}\,dt.$$

Kita ambil $R \to \infty$ dan $\in \to 0$, sehingga integral pertama dan ketiga cenderung nol dan integral kedua dan gabungan keempat untuk 0 < x < 1. Hasil lengkap mengikuti kelanjutan analitik.

e. Integral kontur ganda

Kita telah melihat bahwa adalah mungkin untuk mengganti integral untuk $\Gamma(z)$ sepanjang setengah garis dengan sebuah kontur integral yang konvergen untuk semua nilai z. Proses serupa dapat dilakukan untuk beta integral.

Biarkan P menjadi sembarang titik antara 0 dan 1. Kami memiliki ekstensi Pochhammer berikut dari integral beta:

$$\int_P^{(1+,0+,1-,0-)} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{-4\pi^2 e^{\pi i(x+y)}}{\Gamma(1-x)\Gamma(1-y)\Gamma(x+y)}.$$

Di sini kontur dimulai dari P, melingkari titik 1 dalam arah positif (berlawanan arah jarum jam), kembali ke P, lalu mengelilingi titik asal ke arah positif, dan kembali ke P. 1−, 0− menunjukkan bahwa sekarang jalur integrasi searah jarum jam, pertama sekitar 1 dan lalu 0. Rumus dibuktikan dengan metode yang sama dengan rumus Hankel. Perhatikan bahwa itu adalah benar untuk setiap kompleks x dan y: kedua ruas adalah seluruh fungsi dari x dan y.

6.4 Fungsi hipergeometrik

Definisi dan sifat utama Gauss $\left(F = {}_2F_1\right)$, fungsi hipergeometrik dan secara singkat menyebutkan generalisasinya, ${}_pF_q$ digeneralisasi dan ${}_p\phi_q$ dasar (atau q-) fungsi hipergeometrik. Pertama-tama kita akan menurunkan representasi integral pecahan Euler untuk hipergeometrik Gauss fungsi F, dari mana banyak identitas dan transformasi akan mengikuti. Kemudian kita berbicara tentang persamaan diferensial hipergeometrik, sebagai persamaan diferensial orde dua linier umum memiliki tiga titik singular reguler. Kami memperoleh hubungan bersebelahan yang dipenuhi oleh fungsi F. Akhirnya, kami menjelaskan pendekatan Barnes untuk fungsi hipergeometrik dan representasi integral kontur BarnesMellin untuk fungsi F (Kumar, 2020).

a. Definisi

Langsung dari definisi deret hipergeometrik $\sum c_n$, tentang memfaktorkan polinomial di n, kita peroleh:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+a_1)(n+a_2)\cdots(n+a_p)x}{(n+b_1)(n+b_2)\cdots(n+b_q)(n+1)}.$$

Oleh karena itu, kita bisa mendapatkan definisi yang lebih eksplisit.

- **Definisi 2.1:** *Deret hipergeometrik (umum) didefinisikan oleh representasi deret berikut:*

  $${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1,\ldots,a_p \\ b_1,\ldots,b_q \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{x^n}{n!}.$$

  Jika kita menerapkan uji rasio untuk menentukan konvergensi deret tersebut,

  $$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leq \frac{|x|n^{p-q-1}(1+|a_1|/n)\cdots(1+|a_p|/n)}{|(1+1/n)(1+b_1/n)\cdots(1+b_q/n)|},$$

  maka kita dapatkan teorema berikut.

- **Teorema 2.2:** *Deret* ${}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; x)$ *konvergen mutlak untuk semua x jika* $p \leq q$ *dan untuk* $|x| < 1$ *jika* $p = q+1$*, dan itu berbeda untuk semua* $x \neq 0$ jika p>q+1 *dan seri tidak mengakhiri.*

Pembuktian: Jelas bahwa $|c_{n+1} + c_n| \to 0$, dimana $n \to \infty$ jika $p \leq q$. untuk p=q+1, $\lim_{n\to\infty} |c_{n+1}/c_n| = |x|$, dan untuk $p > q+1, |c_{n+1}/c_n| \to \infty$ dimana $n \to \infty$. Ini membuktikan teorema.

Kasus bahwa $|x|=1$ saat $p=q+1$ menarik. Di sini kita memiliki kondisi berikut untuk konvergensi.

- **Teorema 2.3:** *Bahwa deret* ${}_{q+1}F_q\left(a_1,...,a_{q+1};b_1,...,b_q;x\right)$ *dengan* $|x|=1$ *konvergen secara mutlak jika* $\Re\left(\sum b_i-\sum a_i\right)>0$. *Deret konvergen bersyarat jika* $x=e^{i\theta}\neq 1$ *dan* $0\geq\Re\left(\sum b_i-\sum a_i\right)>-1$ *dan deret divergen jika* $\Re\left(\sum b_i-\sum a_i\right)\leq -1$.

Pembuktian: Perhatikan bahwa faktorial yang digeser dapat dinyatakan sebagai rasio dari dua fungsi gamma:

$$(x)_n=\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}.$$

Dengan definisi fungsi gamma

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n+x)}{\Gamma(n+y)}n^{y-x}=\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)}\lim_{n\to\infty}\frac{(x)_n}{(y)_n}n^{y-x}=\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(y)}\cdot\frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)}=1.$$

Koefisien suku ke-n dalam ${}_{q+1}F_q$

$$\frac{(a_1)_n\cdots(a_{q+1})_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n n!}\sim\frac{\prod\Gamma(b_i)}{\prod\Gamma(a_i)}n^{\sum a-\sum b-1}$$

Dimana $n\to\infty$. Pernyataan tentang konvergensi dan divergensi mutlak segera menyusul. Bagian dari teorema tentang konvergensi bersyarat dapat dibuktikan dengan penjumlahan oleh bagian. Deret ${}_2F_1$ dipelajari secara ekstensif oleh Euler, Pfaff, Gauss, Kummer dan Riemann. Contoh:

$$\log(1+x) = x\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\2\end{matrix};-x\right);$$

$$\tan^{-1} x = x\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2,1\\3/2\end{matrix};-x^2\right);$$

$$\sin^{-1} x = x\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2,1/2\\3/2\end{matrix};x^2\right);$$

$$(1-x)^{-a} = {}_1F_0\left(\begin{matrix}a\\-\end{matrix};x\right);$$

$$\sin x = x\,{}_0F_1\left(\begin{matrix}-\\3/2\end{matrix};-x^2/4\right);$$

$$\cos x = {}_0F_1\left(\begin{matrix}-\\1/2\end{matrix};-x^2/4\right);$$

$$\mathrm{e}^x = {}_0F_0\left(\begin{matrix}-\\-\end{matrix};x\right).$$

Kumpulan contoh berikutnya menggunakan batasan:

$$\mathrm{e}^x = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,b\\1\end{matrix};x/b\right);$$

$$\cosh x = \lim_{a,b\to\infty} {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\1/2\end{matrix};x^2/(4ab)\right);$$

$${}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix};x\right) = \lim_{b\to\infty} {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};x/b\right);$$

$${}_0F_1\left(\begin{matrix}-\\c\end{matrix};x\right) = \lim_{a,b\to\infty} {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};x/(ab)\right)$$

Sebagai contoh $log(1-x)=-x_2F_1(1,\ 1;2;x)$ menunjukkan bahwa meskipun deret tersebut konvergen untuk $|x|<1$, ia memiliki kelanjutan sebagai fungsi bernilai tunggal di bidang kompleks dari mana garis yang menghubungkan 1 ke ∞ dihapus. Ini menggambarkan situasi umum; fungsi ${}_2F_1$ memiliki kelanjutan ke bidang kompleks dengan titik cabang di 1 dan ∞.

- **Definisi 2.4:** *Fungsi hipergeometrik (Gauss)* ${}_2F_1(a,b;c;x)$ ditentukan oleh deret

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!} x^n$$

Untuk $|x|<1$, dan dengan kelanjutan di tempat lain.

6.5 Representasi integral Euler

- **Teorema 2.5:** *Jika* $\Re_c > \Re_b > 0$, *maka:*

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt$$

Pada bidang x yang dipotong sepanjang sumbu nyata dari 1 sampai ∞. Di sini dipahami bahwa arg t = arg(1 - t) = 0 dan (1 - xt)$^{-a}$ memiliki nilai pokoknya.

Pembuktian: Dengan memperkirakan $|x|<1$. ekspansikan $(1-xt)^{-a}$ dengan teorema binomial

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}x^n\int_0^1 t^{n+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt.$$

Sejak untuk $\Re b>1,\ \Re(c-b)>1$ dan deret $|x|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_n(t),\qquad U_n(t)=x^n\frac{(a)_n}{n!}t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}$$

konvergen seragam terhadap $t\in[0,1]$, kita dapat menukar urutan integrasi dan penjumlahan untuk nilai-nilai b, c dan x. Sekarang, gunakan integral beta untuk membuktikan hasil untuk $|x|<1$. Karena integralnya analitik di bidang potong, teorema berlaku untuk x di wilayah ini juga; juga kami menerapkan analitik kelanjutan sehubungan dengan b dan c untuk sampai pada kondisi yang diumumkan dalam rumusan teorema.

- **Teorema 2.6:** Untuk $\Re(c-a-b)>0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}={}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};1\right)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Pembuktian: Perhatikan bahwa $x\to 1^-$ dalam integral Euler untuk ${}_2F_1$. Maka saat $\Re c>\Re b>0$ dan $\Re(c-a-b)>0$ kita akan mendapatkan:

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}dt=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Kondisi $\Re c>\Re b>0$ dapat dihapus dengan kontinu.

6.6 Dua hubungan fungsional

Fungsi hipergeometrik memenuhi sejumlah besar relasi. Yang paling sederhana dan yang jelas adalah simetrinya $a \leftrightarrow b$. Mari kita buktikan dua hubungan lagi

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};x\right) = (1-x)^{-a}{}_2F_1\left(\begin{matrix} a,c-b \\ c \end{matrix};\frac{x}{x-1}\right) \qquad \text{(Pfaff)}, $$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};x\right) = (1-x)^{c-a-b}{}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a,c-b \\ c \end{matrix};x\right) \qquad \text{(Euler)}. $$

Hubungan pertama dibuktikan melalui perubahan variabel t = 1-s dalam rumus integral Euler. Relasi kedua mengikuti dengan menggunakan relasi pertama dua kali

Deret kanan dalam transformasi Pfaff konvergen untuk $\left|x/(x-1)\right| < 1$. Ini kondisi tersirat oleh $\Re x < 1/2$; jadi kami memiliki kelanjutan dari deret ${}_2F_1(a,b;c;x)$ ke daerah ini dengan rumus Pfaff.

Sekarang, mari kita tulis ulang transformasi Euler sebagai;

$$ (1-x)^{a+b-c}{}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};x\right) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} c-a,c-b \\ c \end{matrix};x\right). $$

Samakan koefisien x^n di kedua sisi untuk mendapatkan

$$ \sum_{j=0}^{n} \frac{(a)_j(b)_j(c-a-b)_{n-j}}{j!(c)_j(n-j)!} = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{n!(c)_n}. $$

- **Teorema 2.8:** $(Pfaff - Saalschütz)$

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a, b \\ c, 1+a+b-c-n \end{matrix}; 1\right) = \frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n}. $$

Identitas $(Pfaff - Saalschütz)$ dapat ditulis sebagai

$$ (c)_n(c+a+b)_n\, {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, -a, -b \\ c, 1-a-b-c-n \end{matrix}; 1\right) = (c+a)_n(c+b)_n. $$

Ini adalah identitas polinomial dalam a, b, c. Dougall (1907) mengambil pandangan bahwa kedua sisi ini persamaan adalah polinomial derajat n di a. Oleh karena itu, identitasnya benar jika kedua belah pihak sama untuk n + 1 nilai yang berbeda dari a. Dengan metode yang sama ia membuktikan identitas yang lebih umum:

$$ {}_7F_6\left(\begin{matrix} a, 1+\frac{1}{2}a, -b, -c, -d, -e, -n \\ \frac{1}{2}a, 1+a+b, 1+a+c, 1+a+d, 1+d+e, 1+a+n \end{matrix}; 1\right) $$

$$ = \frac{(1+a)_n(1+a+b+c)_n(1+a+b+d)_n(1+a+c+d)_n}{(1+a+b)_n(1+a+c)_n(1+a+d)_n(1+a+b+c+d)_n}, $$

Dimana 1 + $2a+b+c+d+e+n=0$ dan n adalah bilangan bulat positif. Mengambil batas $n \to \infty$, maka kita akan mendapatkan;

$$ {}_5F_4\left(\begin{matrix} a, 1+\frac{1}{2}a, -b, -c, -d \\ \frac{1}{2}a, 1+a+b, 1+a+c, 1+a+d \end{matrix}; 1\right) $$

$$ = \frac{\Gamma(1+a+b)\Gamma(1+a+c)\Gamma(1+a+d)\Gamma(1+a+b+c+d)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+a+b+c)\Gamma(1+a+b+d)\Gamma(1+a+c+d)} $$

Pada saat $\Re(a+b+c+d+1)>0$, sekarang kita dapat mengambil $d=-a/2$ untuk mendapatkan Rumus penjumlahan Dixon.

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} a,-b,-c \\ 1+a+b,1+a+c \end{matrix};1\right) = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2}a)\Gamma(1+a+b)\Gamma(1+a+c)\Gamma(1+\frac{1}{2}a+b+c)}{\Gamma(1+a)\Gamma(1+\frac{1}{2}+b)\Gamma(1+\frac{1}{2}a+c)\Gamma(1+\frac{1}{2}a+b+c)}. $$

6.7 Representasi integral kontur

Representasi integral yang lebih umum untuk fungsi hipergeometrik ${}_2F_1$ adalah integral loop yang didefinisikan oleh;

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};x\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(1+b-c)}{2\pi i\Gamma(b)} \int_0^{(1+)} t^{b-1}(t-1)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt, \quad \Re b>0. $$

Kontur dimulai dan berakhir pada t = 0 dan mengelilingi titik t = 1 di positif arah. Titik 1/x harus berada di luar kontur. Fungsi bernilai banyak dari integrand mengasumsikan cabang utamanya: arg(1-xt) cenderung nol ketika x → 0, dan arg t, arg(t-1) adalah nol pada titik di mana kontur memotong sumbu positif nyata (di sebelah kanan 1).

Representasi alternatif melibatkan kontur yang mengelilingi titik 0:

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix};x\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(1-b)}{2\pi i\Gamma(c-b)} \int_1^{(0+)} (-t)^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt, \quad \Re c>\Re b. $$

Menggunakan integral kontur loop ganda (atau Pochhammer) dapat diturunkan sebagai berikut: perwakilan

$$\frac{1}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};x\right) = -\frac{e^{-i\pi c}}{4\Gamma(b)\Gamma(c-b)\sin\pi b\,\sin\pi(c-b)}$$

$$\times \int_P^{(1+,0+,1-,0-)} t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}dt.$$

6.8 Persamaan diferensial hipergeometrik

Mari kita perkenalkan operator diferensial $\vartheta = x\dfrac{d}{dx}$, kita mempunyai

$$\vartheta(\vartheta + c - 1)x^n = n(n + c - 1)x^n$$

Sehingga

$$\vartheta(\vartheta + c - 1)\;{}_2F_1(a,b;c;x) = x(\vartheta + a)(\vartheta + b)\;{}_2F_1(a,b;c;x).$$

Dalam bentuk eksplisit tertulis

$$x(1-x)F'' + [c - (a+b+1)x)F' - abF = 0,$$

$$F = F(a,b;c;x) = {}_2F_1(a,b;c;x).$$

Ini adalah persamaan diferensial hipergeometrik, yang diberikan oleh Gauss.

Sangat mudah untuk menunjukkan bahwa, selain F(a,b;c;x), solusi kedua diberikan oleh;

$$x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; x).$$

Ketika c = 1 tidak memberikan solusi baru, tetapi, secara umum, solusi kedua ternyata bentuknya

$$PF(a,b;c;x) + Qx^{1-c}F(a-c+1, b-c+1; 2-c; x),$$

Dimana P dan Q bebas dari x. Untuk mencari P dan Q kita substitusikan z = 0 dan z = 1. Jika kita juga menggunakan Pfaff dan Euler transformasi kita bisa mendapatkan daftar hubungan berikut:

$$\begin{aligned} F(a,b;c;x) &= AF(a,b;a+b-c+1;1-x) \\ &\quad +B(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-x) \\ &= C(-x)^{-a}F(a,1-c+a;1-b+a;1/x) \\ &\quad +D(-x)^{-b}F(b,1-c+b;1-a+b;1/x) \\ &= C(1-x)^{-a}F(a,c-b;a-b+1;1/(1-x)) \\ &\quad +D(1-x)^{-b}F(b,c-a;b-a+1;1/(1-x)) \\ &= Ax^{-a}F(a,a-c+1;a+b-c+1;1-1/x) \\ &\quad +Bx^{a-c}(1-x)^{c-a-b}F(c-a,1-a;c-a-b+1;1-1/x). \end{aligned}$$

Dimana

$$A = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \qquad B = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)};$$

$$C = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}, \qquad D = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}.$$

6.9 Pemisahan variabel dan fungsi khusus

Pada sub bab ini adalah tentang beberapa aplikasi fungsi khusus. Ini juga akan memberikan beberapa jawaban untuk pertanyaan: Dari mana fungsi khusus berasal? Fungsi khusus biasanya muncul ketika memecahkan persamaan diferensial parsial linier (PDE), seperti persamaan panas, atau ketika memecahkan masalah spektral yang muncul dalam mekanika kuantum, seperti menemukan fungsi eigen dari Sch¨odinger operator. Banyak persamaan semacam ini, termasuk banyak PDE fisika matematika dapat diselesaikan dengan metode Separation of Variables (SoV). Kami akan memberikan pengantar untuk metode yang sangat kuat ini dan juga akan melihat bagaimana itu cocok dengan teori fungsi khusus.

- **Definisi 1:** *Pemisahan Variabel M adalah transformasi yang membawa fungsi* $\psi\left(x_1,...,x_n\right)$ *dari banyak variabel ke dalam bentuk faktor*

  $$M : \psi \mapsto \varphi_1(y_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(y_n).$$

  Fungsi dari $\varphi_j\left(y_j\right)$ *biasanya beberapa fungsi khusus yang diketahui dari satu variabel. Transformasi M dapat berupa perubahan variabel dari {x} menjadi {y}, tetapi juga dapat berupa integral mengubah. Biasanya fungsi* ψ *memenuhi PDE linier sederhana.*

a. Pemisahan Variabel untuk persamaan panas

Biarkan fungsi bernilai kompleks q(x, t) memenuhi persamaan panas

$$iq_t + q_{xx} = 0, \qquad x, t \in [0, \infty).$$

$$q(x, 0) = q_1(x), \qquad q(0, t) = q_2(t),$$

di mana $q_1(x)$ dan $q_2(t)$ diberikan fungsi yang meluruh cukup cepat untuk x besar dan t besar, masing-masing. Bagi persamaan dengan q(x, t) dan tulis ulang sebagai;

$$iq_t = k^2 q, \qquad q_{xx} = -k^2 q,$$

yang merupakan pemisahan variabel, karena ada solusi faktorisasi dari dua persamaan terakhir:

$$q_k(x, t) = \mathrm{e}^{-ikx - ik^2 t}.$$

Perhatikan bahwa ini memberikan solusi $\forall k \in \square$. Karena persamaan kami linier, berikut: integral juga merupakan solusi dari persamaan

$$q(x, t) = \int_L \mathrm{e}^{-ikx - ik^2 t} \rho(k) dk,$$

di mana L adalah beberapa kontur dalam bidang-k kompleks, dan fungsi ρ(k) (‘data spektral’) dapat dinyatakan dalam transformasi integral tertentu dari $q_1(x)$ dan $q_2(t)$, untuk memenuhi data awal. Ini hanyalah demonstrasi sederhana dari metode Pemisahan Variabel, juga disebut Prinsip Ehrenpreis bila diterapkan pada masalah semacam itu.

b. Pemisahan Variabel untuk masalah kuantum

Sekarang perhatikan masalah sederhana lain yang berasal dari mekanika kuantum, yaitu: masalah spektral linier untuk operator *Schödinger* stasioner yang menggambarkan keadaan terikat dari osilator harmonik 2 dimensi. Artinya, pertimbangkan $\psi(x_1, x_2) \in L^2(\square^2)$ yang merupakan fungsi eigen dari operator diferensial berikut:

$$H = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + x_1^2 + x_2^2,$$

$$H\psi(x_1, x_2) = h\psi(x_1, x_2).$$

Masalah ini dapat diselesaikan dengan aplikasi langsung dari metode SoV tanpa setiap transformasi perantara. Kita mendapatkan

$$H_1\psi = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1^2\right)\psi(x_1, x_2) = h_1\psi(x_1, x_2),$$

$$H_2\psi = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + x_2^2\right)\psi(x_1, x_2) = h_2\psi(x_1, x_2),$$

$$h_1 + h_2 = h.$$

Kemudian

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2),$$

Dimana

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_i^2\right)\psi(x_i) = h_i\psi(x_i).$$

Solusi kuadrat-terintegrasi dinyatakan dalam polinomial Hermite

$$\psi(x_i) \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \psi(x_i) = \mathrm{e}^{-x_i^2/2}H_n(x_i), \quad h = 2n_i + 1, \quad n_i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Perhatikan itu

$$[H_1, H_2] = 0.$$

Oleh karena itu, kita mendapatkan dasar dalam $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2+x_2^2)/2} H_{n_1}(x_1) H_{n_2}(x_2),$$

$$h = 2(n_1 + n_2) + 2.$$

Fungsi $\{\psi_{n_1 n_2}\}$ merupakan himpunan fungsi ortogonal dalam $\mathbb{R}^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) \psi_{m_1 m_2}(x_1, x_2) = a_{n_1 n_2} \delta_{n_1 m_1} \delta_{n_2 m_2}.$$

Setiap fungsi $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dapat didekomposisi menjadi seri sehubungan dengan dasar ini fungsi:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} f_{mn} \psi_{mn}(x_1, x_2).$$

c. Pemisahan Variabel lain untuk masalah kuantum

Mungkin mengejutkan pada awalnya, tetapi SoV tidak unik. Untuk menunjukkan ini, mari kita membangun solusi lain dari masalah osilator yang sama.

Pertimbangkan fungsi $\Theta(u)$:

$$\Theta(u) = \frac{x_1^2}{u-a} + \frac{x_2^2}{u-b} - 1 = -\frac{(u-u_1)(u-u_2)}{(u-a)(u-b)},$$

DAFTAR PUSTAKA

ALAM, A. (2020). Challenges and Possibilities in Teaching and Learning of Calculus : A Case Study of India. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists*, *8*(1), 407–433. https://doi.org/10.17478/jegys.660201

Arof, S., Noor, N. M., Alias, M. F., Noorsal, E., Mawby, P., & Arof, H. (2020). Digital Proportional Integral Derivative (PID) Controller for Closed-Loop Direct Current Control of an Electric Vehicle Traction Tuned Using Pole Placement. In *Progress in Engineering Technology II* (pp. 73–89). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-46036-5_8

Atangana, A., & Akgül, A. (2020). Can transfer function and Bode diagram be obtained from Sumudu transform. *Alexandria Engineering Journal*, *59*(4), 1971–1984. https://doi.org/10.1016/j.aej.2019.12.028

Atangana, A., & İğret Araz, S. (2020). RETRACTED: New numerical method for ordinary differential equations: Newton polynomial. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *372*, 112622. https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112622

Augustyniak, I., Lamperska, W., Masajada, J., Płociniczak, Ł., & Popiołek-Masajada, A. (2020). Off-axis vortex beam propagation through classical optical system in terms of Kummer confluent hypergeometric function. *Photonics*, *7*(3), 60.

Avez, A. (2020). *Differential calculus*. Courier Dover Publications.

Beck, C., Hutzenthaler, M., Jentzen, A., & Kuckuck, B. (2020). An overview on deep learning-based approximation methods for partial differential equations. *ArXiv Preprint ArXiv:2012.12348*.

Biswas, S. K., Ghosh, U., & Sarkar, S. (2020). Mathematical model of zika virus dynamics with vector control and sensitivity analysis. *Infectious Disease Modelling*, *5*, 23–41. https://doi.org/10.1016/j.idm.2019.12.001

Brand, L. (2020). *Vector and tensor analysis*. Courier Dover Publications.

Constanda, C. (2020). *Direct and Indirect Boundary Integral Equation Methods*. Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/9780367812959

Duarte Ortigueira, M., & Tenreiro Machado, J. (2020). Revisiting the 1D and 2D Laplace Transforms. *Mathematics*, *8*(8), 1330. https://doi.org/10.3390/math8081330

Flavin, J. N., & Rionero, S. (2020). *Qualitative Estimates for Partial Differential Equations*. CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781003069010

Folland, G. B. (2020). Introduction to partial differential equations. In *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton university press.

Frank, K., & Thompson, P. W. (2021). School students' preparation for calculus in the United States. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 549–562. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01231-8

Gerken, J. E., Kleinschmidt, A., & Schlotterer, O. (2020). All-order differential equations for one-loop closed-string integrals and modular graph forms. *Journal of High Energy Physics*, *2020*(1), 64. https://doi.org/10.1007/JHEP01(2020)064

Hyder, A.-A. (2021). The influence of the differential conformable operators through modern exact solutions of the double Schrödinger-Boussinesq system. *Physica Scripta*, *96*(11), 115211. https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac169f

Hyder, A.-A., & Soliman, A. H. (2021). A new generalized θ-conformable calculus and its applications in mathematical physics. *Physica Scripta*, *96*(1), 015208. https://doi.org/10.1088/1402-4896/abc6d9

Iandiorio, C., & Salvini, P. (2020). Large displacements of slender beams in plane: Analytical solution by means of a new hypergeometric function. *International Journal of Solids and Structures*, *185–186*, 467–484. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.09.006

Kidron, I. (2020). Calculus Teaching and Learning. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 87–94). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_18

Kumar, A. (2020). Single server multiple vacation queue with discouragement solve by confluent hypergeometric function. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 1–12.

Li, Z., Kovachki, N., Azizzadenesheli, K., Liu, B., Bhattacharya, K., Stuart, A., & Anandkumar, A. (2020). Fourier neural operator for parametric partial differential equations. *ArXiv Preprint ArXiv:2010.08895*.

Magnus, J. R., & Neudecker, H. (2019). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley & Sons.

Marini, E., Campa, F., Buffa, R., Stagi, S., Matias, C. N., Toselli, S., Sardinha, L. B., & Silva, A. M. (2020). Phase angle and bioelectrical impedance vector analysis in the evaluation of body composition in athletes. *Clinical Nutrition*, *39*(2), 447–454.

Mhailan, M., Hammad, M. A., Horani, M. Al, & Khalil, R. (2020). On fractional vector analysis. *J. Math. Comput. Sci.*, *10*(6), 2320–2326.

Mkhatshwa, T. P. (2020). Calculus students' quantitative reasoning in the context of solving related rates of change problems. *Mathematical Thinking and Learning*, *22*(2), 139–161. https://doi.org/10.1080/10986065.2019.1658055

Nascimento, R. G., Fricke, K., & Viana, F. A. C. (2020). A tutorial on solving ordinary differential equations using Python and hybrid physics-informed neural network. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, *96*, 103996. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2020.103996

Nielsen, O. A. (2020). *Direct Integral Theory*. CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781003072607

Parasidis, I. N., Providas, E., & Zaoutsos, S. (2020). On the Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations of Order n and 2n with General Boundary Conditions. In J. Gorodkin (Ed.), *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)* (Vol. 10, Issue 2, pp. 299–314). http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-44625-3_17

Qin, C., Wu, Y., Springenberg, J. T., Brock, A., Donahue, J., Lillicrap, T., & Kohli, P. (2020). Training generative adversarial networks by solving ordinary differential equations. *Advances in Neural Information*

Processing Systems, *33*, 5599–5609.

Radmehr, F., & Drake, M. (2020). Exploring Students' Metacognitive Knowledge: The Case of Integral Calculus. *Education Sciences*, *10*(3), 55. https://doi.org/10.3390/educsci10030055

Ruthotto, L., & Haber, E. (2020). Deep Neural Networks Motivated by Partial Differential Equations. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, *62*(3), 352–364. https://doi.org/10.1007/s10851-019-00903-1

Şahin, R., & Yağcı, O. (2020). Fractional calculus of the extended hypergeometric function. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, *5*(1), 369–384.

Simmons, C. R. (2021). *Investigation into the development of a quantitatively based summation conception of the definite integral*. https://hdl.handle.net/11244/333777

Tarasov, V. E. (2020). Mathematical Economics: Application of Fractional Calculus. *Mathematics*, *8*(5), 660. https://doi.org/10.3390/math8050660

Utari, R. S., & Utami, A. (2020). Kemampuan Pemahaman Konsep Mahasiswa dalam mengidentifikasi penyelesaian soal integral tak tentu dan tentu. *Jurnal Pendidikan Matematika*, *14*(1), 39–50.

Vivas-Cortez, M., Aamir Ali, M., Kashuri, A., Bashir Sial, I., & Zhang, Z. (2020). Some New Newton's Type Integral Inequalities for Co-Ordinated Convex Functions in Quantum Calculus. *Symmetry*, *12*(9), 1476. https://doi.org/10.3390/sym12091476

Wang, H., & Yamamoto, N. (2020). Using a partial differential equation with Google Mobility data to predict COVID-19 in Arizona. *ArXiv Preprint ArXiv:2006.16928*.

Waseem, W., Sulaiman, M., Kumam, P., Shoaib, M., Raja, M. A. Z., & Islam, S. (2020). Investigation of singular ordinary differential equations by a neuroevolutionary approach. *PLOS ONE*, *15*(7), e0235829. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0235829

Wyld, H. W. (2020). *Mathematical Methods for Physics* (G. Powell (ed.)). CRC Press. https://doi.org/10.1201/9781003037460

Xin, T., Wei, S., Cui, J., Xiao, J., Arrazola, I., Lamata, L., Kong, X., Lu, D., Solano, E., & Long, G. (2020). Quantum algorithm for solving linear differential equations: Theory and experiment. *Physical Review A*, *101*(3), 032307. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.032307

Zhao, T.-H., He, Z.-Y., & Chu, Y.-M. (2020). On some refinements for inequalities involving zero-balanced hypergeometric function. *AIMS Math*, *5*(6), 6479–6495.

BIONARASI

Misbah mendapatkan gelar magister pendidikan di Universitas Negeri Yogyakarta. Sampai saat ini penulis masih aktif sebagai seorang dosen di Universitas Lambung Mangkurat. Penulis aktif mengikuti berbagai pertemuan ilmiah baik seminar nasional maupun internasional. Selain itu penulis juga merupakan editor in chief dari Jurnal Ilmiah Pendidikan Fisika, dan aktif jadi menjadi editor dan reviewer di berbagai jurnal ilmiah nasional terakreditasi.

Samuel Juliardi Sinaga, dilahirkan di Sawit Hulu kabupaten Langkat, pada tanggal 22 Juli 1992, Putera pertama dari empat bersaudara dari pasangan Bapak B. Sinaga dan Ibu D. Br.Manalu. Penulis memulai Pendidikan S1 Pendidikan Matematika di Universitas HKBP Nommensen selesai pada tahun 2013, pada tahun 2014 melanjutkan studi Magister S2 pada Program Studi Pendidikan Matematika di Program Pascasarjana Universitas Negeri Medan selesai pada tahun 2016. Penulis aktif mengikuti kegiatan-kegiatan public speaking. Sekarang Penulis aktif sebagai penulis artikel ilmiah, penulis sebagai Dosen di Universitas HKBP Nommensen dan menjabat sebagai sekretaris program studi Pendidikan Matematika, 2021-2022. Penulis juga sebagai Reviewer DE_JOURNAL (Dharmas Education Journal) dan sebagai Editor di Jurnal Ilmu Sosial Mamangan (Sinta 3).

Nurlaela Muhammad. Lulus S1 di Program Studi Pendidikan Fisika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Khairun tahun 2005. Lulus S2 di Program Studi Pendidikan Fisika Universitas Negeri Yogyakarta tahun 2012. Mulai tahun 2006 sampai sekarang aktif sebagai Dosen Fisika pada Universitas Khairun.

Nadrah mendapatkan gelar megister dan Doktor pada Universitas Negeri Makassar, sampai sekarang penulis masih aktif sebagai dosen pada Universitas Muhammadiyah Makassar, aktif mengikuti seminar nasional dan internasional, pernah menjadi salah satu presenter pada International Conference on Sosial Science (ICSS 2022). Penulis juga aktif menulis beberapa artikel di jurnal Internasional bereputasi

Ismadi Sihombing memperoleh gelar magister pendidikan fisika di Universitas Negeri Medan. Sampai saat ini, penulis masih aktif sebagai seorang Dosen dan menjabat sekretaris program studi di Prodi D-III Radiodiagnostik dan radioterapi di STIKes Senior Medan. Penulis juga menjabat sebegai anggota di Sistem Penjaminan Mutu Internal STIKes Senior Medan.

Kevin William Andri Siahaan, lahir di Pematangsiantar pada tanggal 24 Juli 2000. Saat ini sedang menempuh pendidikan dan mengabdi di Universitas HKBP Nommensen Pematangsiantar. Penulis juga seorang Reviewer dan Editor juga di beberapa Jurnal Nasional Sinta terkemuka (Sinta 2-5) dan Jurnal Internasional bereputasi. Beberapa publikasi di bidang Pendidikan Sains dengan konsentrasi Kimia khususnya telah dipublikasikan baik di jurnal nasional maupun internasional. Dan berdomisili di Kota Pematangsiantar, Sumatera Utara.
Email: kevinsiahaan52@gmail.com,
Id Orcid : https://orcid.org/0000-0001-9020-4792

Ruben Cornelius Siagian, lahir di Kota Medan pada 17 April 2002. Saat ini sedang menempuh pendidikan di Universitas Negeri Medan, Jurusan Fisika, Fakultas MIPA, di kota Medan, Sumatera Utara. Penulis memiliki pengalaman dalam menulis karya ilmiah, dan juga telah melatih beberapa kali mahasiswa dalam penulisan karya tulis ilmiah. Penulis memiliki beberapa prestasi dalam Olimpiade Fisika Nasional. Penulis juga telah menulis beberapa karya ilmiah yang diterbitkan di Jurnal Nasional dan Internasional bereputasi. Ia juga seorang guru yang memiliki pengalaman di bidang matematika dan fisika di tingkat SMA. saat ini ia sedang menulis dan telah menulis 2 buku yang berkaitan dengan ilmu astronomi, antara lain; Memahami alam semesta dengan dasar teori astronomi dan kosmologi, serta sejarahnya, dan buku Metode Matematika relativitas untuk perguruan tinggi.

PERSAMAAN DIFFERENSIAL MATEMATIKA FISIKA

IKAPI
IKATAN PENERBIT INDONESIA

Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia
Pondok Karisma Residence
Jalan Raflesia VI D.151
Panglayungan, Cipedes Tasikmalaya – 085223186009

ISBN 978-623-448-203-4

9 786234 482034