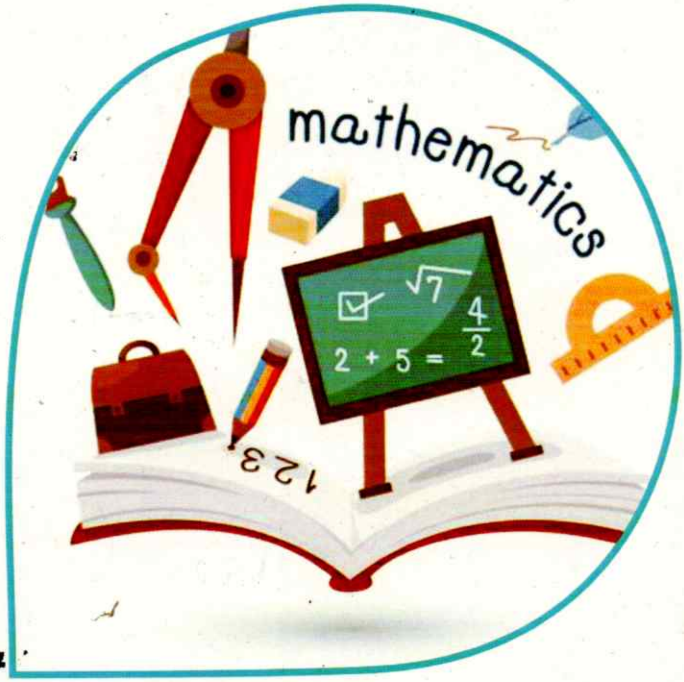


PENGANTAR ANALISIS REAL

Dr. Hj. NOOR FAJRIAH, M.Si
YUNI SURYANINGSIH, M.Pd

PENGANTAR ANALISIS REAL

Dr. Hj. NOOR FAJRIAH, M.Si

YUNI SURYANINGSIH, M.Pd

CV. IRDH

PENGANTAR ANALISIS REAL

Penulis : Dr. Hj. Noor Fajriah, M.Si
Yuni Suryaningsih, M.Pd
Editor : Mohammad Archi Maulida, S.Pd., M.Pd
Penata Letak : Elisa Octavia, S.Pd
Dito Aditia, S.Pi
Tinesa Fara Prihandini, S.Pd
Pracetak dan Produksi : Yohanes Handrianus Laka, S.E., M.A.P
Yulita, S.E., M.A.P
Perancang Sampul : Jois Rudiah Putiandini

Cetakan Pertama Desember, 2020
Penerbit CV. IRDH
Anggota IKAPI No. 159-JTE-2017
Office: Jl. Sokajaya No. 59, Purwokerto
Perum New Villa Bukit Sengkaling C9 No. 1 Malang
HP : 0813 5721 7319, WA : 089 621 424 412
www.irdhcenter.com
Email: buku.irdh@gmail.com

ISBN : 978-623-7718-51-2
i-vi + 212 hlm, 17,6 cm x 25 cm

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT karena atas rahmat-Nya penulis dapat menyelesaikan buku yang berjudul "Pengantar Analisis Real". Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Lambung Mangkurat yang telah memberikan dukungan secara penuh dalam menyelesaikan buku ini.

Buku yang berjudul "Pengantar Analisis Real" ini merupakan buku yang baik. Buku ini ditujukan bagi mahasiswa jurusan matematika, di manapun berada. Harapannya buku ini menjadi referensi untuk mengenal dan memahami analisis real.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penulisan buku ini belum sepenuhnya sempurna, sehingga penulis sangat mengharapkan masukan ataupun kritik dari pembaca guna perbaikan dan kesempurnaan buku ini.

Banjarmasin, 12 Desember 2020

Penulis

TINJAUAN MATA KULIAH

Pengantar Analisis Real merupakan cabang dari analisis matematika yang membahas bilangan real dan fungsi-fungsi dalam bilangan real. Analisis real dapat dianggap sebagai kalkulus lebih mendalam, artinya materi pada kalkulus akan dibahas lagi dengan sudut yang berbeda. Pengantar Analisis Real di program studi pendidikan matematika FKIP Universitas Lambung Mangkurat membahas himpunan, bilangan real, barisan, fungsi kontinu, derivatif, dan integral Riemann.

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah (CP-MK) Pengantar Analisis Real mahasiswa mampu: mensintesis definisi yang berhubungan dengan himpunan, bilangan real, barisan, fungsi kontinu, derivatif, dan integral Rieman yang merupakan dasar memahami materi selanjutnya (PP2, KU1); membuktikan teorema yang berhubungan dengan himpunan, bilangan real, barisan, fungsi kontinu, derivatif, dan integral Riemann secara mandiri dan bertanggung jawab (PP2, SU8); menerapkan definisi dan teorema yang berhubungan dengan himpunan, bilangan real, fungsi kontinu, derivatif, dan integral Riemann dalam menyelesaikan masalah yang sesuai (KU1, KK1). Prasyarat mata kuliah ini adalah lulus Pengantar Dasar Matematika.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

MODUL 1

HIMPUNAN DAN FUNGSI

A. Pendahuluan

Himpunan dan fungsi merupakan dasar pengetahuan dalam pengantar analisis real bahkan semua mata kuliah lainnya. Ibarat bandara maka himpunan merupakan landasan dan fungsi merupakan asesories pada landasan tersebut. Sehingga materi ini sangat penting sebagai landasan materi analisis real. Semesta himpunan dan fungsi terbatas pada bilangan real.

Setelah mempelajari materi dlam modul iini diharapkan mahasiswa memahami aljabar himpunan dan fungsi secara umum. Pada modul ini dibahas materi himpunan dan fungsi yang sering digunakan pada materi pengantar analisis real.

Tujuan yang diharapkan setelah mempelajari modul ini, mahasiswa dapat:

1. Menuliskan himpunan bagian dari bilangan real
2. Menentukan gabungan dari beberapa himpuan
3. Menentukan irisan dari beberapa himpunan
4. Menentukan komplemen suatu himpunan
5. Menentukan produk Cartesian dari himpunan yang diketahui
6. Membedakan antara domain, kodomain, dan range
7. Mengidentifikasi jenis fungsi jika diberikan suatu fungsi
8. Menentukan invers dari suatu fungsi
9. Menentukan fungsi komposisi
10. Menentukan invers dari fungsi komposisi

A. Kegiatan Belajar 1

1.1 Himpunan

Pertama-tama diperkenalkan simbol dari jika x anggota dalam himpunan A, ditulis $x \in A$ atau disebutkan bahwa x anggota A, atau x termuat dalam A. Jika x tidak di dalam A, ditulis $x \notin A$.

Jika setiap anggota dari himpunan A juga termuat dalam himpunan B, dikatakan bahwa A adalah himpunan bagian dari B dan ditulis $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$. Himpunan A adalah himpunan bagian sejati dari himpunan B jika A $\subseteq$ B, tapi ada setidaknya satu anggota dari B yang tidak termuat dalam A yang disimbolkan $A \subset B$.

Berikut ini mengenai definisi dari hubungan dari beberapa himpunan.

Definisi A-1

Dua himpunan A dan B dikatakan sama dan ditulis A = B, *jika keduanya memuat anggota-anggota yang sama.*

Jadi untuk membuktikan bahwa himpunan A dan B adalah sama maka harus dibuktikan bahwa $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Sebuah himpunan biasanya didefinisikan oleh salah satu daftar anggota-anggotanya secara eksplisit, atau dengan sifat khusus yang menentukan anggota-anggota sebuah himpunan.

Beberapa himpunan-himpunan khusus yang digunakan dilambangkan dengan :

Himpunan bilangan asli **N** ≔ {1, 2, 3, ...}

Himpunan bilangan bulat **Z** ≔ {...,-1,0, 1, ...}

Himpunan bilangan rasional **Q** := $\{m/n : m, n \in \mathbf{Z}$ and $n \neq 0\}$

Himpunan bilangan real **R**.

Contoh A-1

1. Suatu himpunan $\{x \in \mathbf{N} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ terdiri dari bilangan asli yang memenuhi persamaan yang ditetapkan. Himpunan tersebut dapat dinyatakan lebih sederhana dengan $\{1, 2\}$.
2. Suatu bilangan asli n disebut genap jika berbentuk $n = 2k$ untuk setiap $k \in \mathbf{N}$ Himpunan bilangan asli genap dapat ditulis $\{2k : k \in \mathbf{N}\}$, demikian pula, himpunan bilangan asli ganjil dapat ditulis $\{2k - 1 : k \in \mathbf{N}\}$.

Berdasarkan beberapa himpunan akan dibentuk himpunan baru. Adapun caranya dengan melakukan operasi didasarkan pada arti kata-kata "atau", "dan", dan "tidak".

Definisi A-2

(i) *Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan*

$$A \cup B \coloneqq \{x : x \in A \; atau \; x \in B\}$$

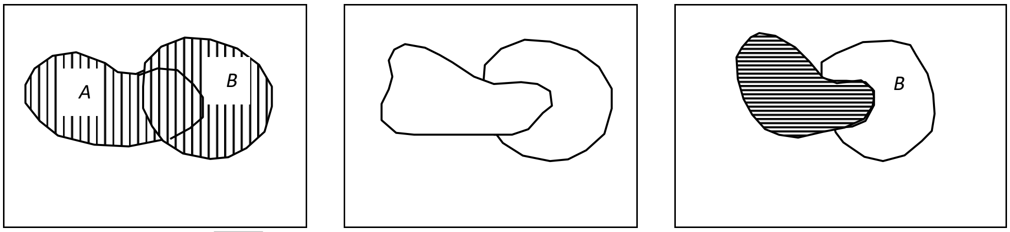
(ii) *Irisan himpunan A dan B adalah himpunan*

$$A \cap B \coloneqq \{x : x \in A \; dan \; x \in B\}$$

(iii) *Komplemen relatif B terhadap A adalah himpunan*

$$A \setminus B \coloneqq \{x : x \in A \; and \; x \in B\} \qquad /$$

Dengan diagram Venn yang disajikan pada Gambar 1.1-1 berikut ini.



(a) $A \cup B$ (b) $A \cap B$ (c) $A \setminus B$

Gambar A-1

Himpunan yang tidak memiliki anggota disebut himpunan kosong dan dilambangkan dengan symbol $\emptyset$. Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas jika keduanya tidak memiliki anggota yang sama, ini dapat dinyatakan dengan $A \cap B = \emptyset$.

Berikut ini salah satu hukum *De Morgan* untuk tiga himpunan.

Teorema A-1 *Jika A, B, C adalah* **himpunan**, *maka*

(i) $A\setminus(B \cup C) = (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$,

(ii) $A\setminus(B \cap C) = (A\setminus B) \cup (A\setminus C)$

Bukti:

(i) Akan ditunjukkan bahwa setiap anggota $A\setminus(B \cup C)$ termuat di $(A\setminus B)$ dan $(A\setminus C)$, dan sebaliknya. Jika x di dalam $A\setminus(B \cup C)$, maka x termuat di A, tapi x tidak termuat di $B \cup C$. Maka x termuat di A, tetapi x bukan termuat di B maupun di C. Oleh karena itu, x dalam A tetapi bukan B, dan x termuat di A tetapi tidak termuat di C. Jadi $x \in A\setminus B$ and $x \in A\setminus C$, yang menunjukkan bahwa $x \in (A\setminus B) \cap (A \setminus C)$……….(*)

Sebaliknya, jika $x \in (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$, maka $x \in (A\setminus B)$ dan $x \in (A\setminus C)$. Sehingga $x \in A$ dan keduanya $x \notin B$ and $x \notin C$.

Oleh karena itu, $x \in A$ and $x \notin (B \cup C)$ jadi $x \in A \setminus (B \cup C)$ ……….(**)

Berdasarkan (*) dan (**) maka $A\setminus(B \cup C) = (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$, (terbukti)

(ii) Latihan

Untuk kumpulan himpunan finit $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, gabungannya adalah himpunan A yang terdiri dari semua anggota yang termuat di salah satu set A_k, dan irisannya terdiri dari semua anggota yang termuat dalam setiap himpunan-himpunan A_k.

Ini diperluas ke sebuah kumpulan himpunan infinit $(A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots)$. Gabungannya adalah sebuah himpunan yang anggota-anggotanya dimiliki setidaknya salah satu himpunan A_n. Dalam hal ini ditulis

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : x \in A_n \text{ untuk beberapa } n \in \boldsymbol{N}\}$$

Demikian pula, irisannya adalah himpunan yang anggota-anggotanya milik semua himpunan A_n. Dalam hal ini ditulis

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x : x \in A_n \; untuk \; setiap \; n \in \boldsymbol{N}\}$$

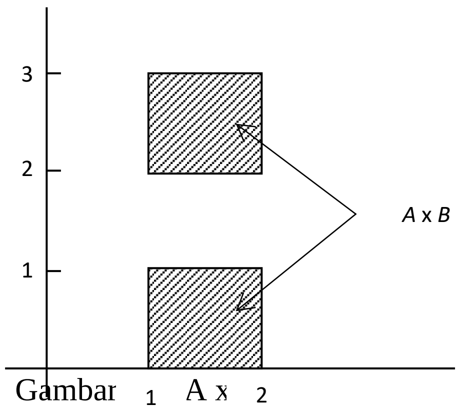
Berikut ini definisi dari produk Cartesian dari dua himpunan.

Definisi A-3

Jika A dan B adalah himpunan tak kosong, maka produk Cartesian A x B dari A dan B adalah himpunan semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ *dan* $b \in B$. *Artinya A x B* $:= \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Jadi, jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 5\}$, maka himpunan A x B adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah pasangan terurut $(1, 1), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5)$.

Sebagai contoh, jika $A := \{x \in R : 1 \leq x \leq 2\}$ dan $B := \{y \in R : 0 \leq y \leq 1 \text{ atau } 2 \leq y \leq 3\}$ maka digambarkan seperti di bawah ini.

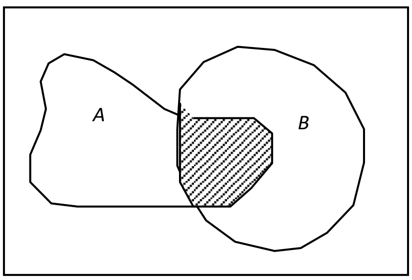


Gambar A x

B. Latihan

1. Jika A dan B adalah himpunan, tunjukkan bahwa $A \subseteq B$ jika dan hanya jika $A \cap B = A$!

   Kunci :



   Dilihat dari gambar, diperoleh bahwa $A \cup B = A + B - (A \cap B)$, sehingga :

$A \cap B = A + B - (A \cup B)$

- $A \cap B \Rightarrow A$

  $A \cap B = A + B - (A \cup B)$

  Asumsikan benar $A \cap B = A$, sehingga :

  $B - (A \cup B) = 0$
  $\Leftrightarrow A \cup B = B$

  Maka,

  $A \cup B = A + B - (A \cap B)$
  $\Leftrightarrow B = A + B - (A \cap B)$
  $\Leftrightarrow 0 = A - (A \cap B)$
  $\Leftrightarrow A \cap B = A$

  Terbukti benar bahwa $A \cap B = A$.

- $A \Rightarrow A \cap B$

  Dari rumus $A \cap B = A + B - (A \cup B)$, diperoleh :

  $A = (A \cap B) - B + (A \cup B)$

  Asumsikan benar $A = A \cap B$, sehingga :

  $-B + (A \cup B) = 0$
  $\Leftrightarrow A \cup B = B$

  Maka,

  $A = (A \cap B) - B + (A \cup B)$
  $\Leftrightarrow A = (A \cap B) - B + B$
  $\Leftrightarrow A = A \cap B$

  Terbukti benar bahwa $A = A \cap B$.

  Karena $A \cap B \Rightarrow A$ terbukti dan $A \Rightarrow A \cap B$ juga terbukti, maka $A \cap B \Leftrightarrow A$.

  Jadi, terbukti bahwa $A \subseteq B$.

2. Untuk setiap $n \in N$, diberikan $A_n = \{(n+1)k : k \in N\}$

   a. Apa $A_1 \cap A_2$?

   b. Tentukan himpunan $\bigcup\{A_n : n \in N\}$ dan $\bigcap\{A_n : n \in N\}$!

   Kunci :

   a. $A_n = \{(n+1)k : k \in N\}$

   $n \in N,$

   $n = 1 \rightarrow A_1 = \{2k : k \in N\}$

   $= \{2,4,6,8,10,12,14,...\}$

   $n = 2 \rightarrow A_2 = \{3k : k \in N\}$

   $= \{3,6,9,12,15,16,18,...\}$

   $\therefore A_1 \cap A_2 = \{6,12,18,24,30,...\} = \{6k : k \in N\}$

   b. $A_n = \{(n+1)k : k \in N\}$

   Maka,

   - $\bigcup\{A_n : n \in N\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n untukbeberapa\ n \in N$

     $= \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,...\}$

     $= \{2k : k \in N\}$

     $= A_1$

   - $n \in N,$

     $n = 1 \rightarrow A_1 = \{2k : k \in N\}$

     $= \{2,4,6,8,10,12,14,...\}$

     $n = 2 \rightarrow A_2 = \{3k : k \in N\}$

     $= \{3,6,9,12,15,16,18,...\}$

     $n = 3 \rightarrow A_3 = \{4k : k \in N\}$

$$= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \ldots\}$$

$$n = 4 \rightarrow A_4 = \{5k : k \in N\}$$

$$= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots\}$$

$$\vdots$$

$$n = k \rightarrow A_k = \{(k+1)k : k \in N\}$$

Sehingga,

$$\bigcap \{A_n : n \in N\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n untuksetiap\ n \in N$$

$$= \{(2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \cdots)k : k \in N\}$$
$$= \{n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3) \times (n+4) \times \cdots \times (n+k) : k \in N\}$$
$$= \left\{ n \prod_{k=1}^{\infty} (n+k) : k \in N \right\}$$

C. Rangkuman

Simbol dari jika *x* anggota dalam himpunan A, ditulis $x \in A$ atau disebutkan bahwa *x* anggota A, atau *x* termuat dalam A. Jika *x* tidak di dalam A, ditulis $x \notin A$. Jika setiap anggota dari himpunan A juga termuat dalam himpunan B, dikatakan bahwa A adalah himpunan bagian dari B dan ditulis $A \subseteq B$ atau $B \supseteq A$. Himpunan A adalah himpunan bagian sejati dari himpunan B jika $A \subseteq B$, tapi ada setidaknya satu anggota dari B yang tidak termuat dalam A yang disimbolkan $A \subset B$.

Dua himpunan A dan B dikatakan sama dan ditulis A = B, jika keduanya memuat anggota-anggota yang sama. Jadi untuk membuktikan bahwa himpunan A dan B adalah sama maka harus dibuktikan bahwa $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$.

Jenis – jenis himpungan bilangan diantaranya adalah himpunan bilangan asli **N**:= {1, 2, …}, himpunan bilangan bulat **Z**:= {…, -1, 0, 1, …}, himpunan bilangan rasional $\boldsymbol{Q} \coloneqq \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbf{Z}, \mathrm{n} \neq 0\right\}$, dan himpunan bilangan real **R**.

Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan $A \cup B \coloneqq \{x : x \in A \; atau \; x \in B\}$. Irisan himpunan A dan B adalah himpunan $A \cap B \coloneqq \{x : x \in A \; dan \; x \in B\}$, komplemen relatif B terhadap A adalah himpunan $A \setminus B \coloneqq \{x : x \in A \; and \; x \in B\}$. Himpunan yang tidak memiliki anggota disebut himpunan kosong dan dilambangkan dengan simbol $\emptyset$. Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas jika keduanya tidak memiliki anggota yang sama, ini dapat dinyatakan dengan $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.

Jika A dan B adalah himpunan tak kosong, maka produk Cartesian *A x B* dari A dan B adalah himpunan semua pasangan terurut *(a, b)* dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Artinya,

$$A \times B \coloneqq \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

D. Tes Formatif 1

Pilihlah salah satu sebagai jawaban yang tepat menurut kalian

1. Himpunan bagian di bawah ini merupakan himpunan bagian dari bilangan real, kecuali:
   a. Himpunan bilangan asli
   b. Himpunan bilangan irrasional
   c. Himpunan bilangan rasional

d. Himpunan bilangan kompleks

2. Jika ***N*** adalah himpunan bilangan asli dan **R** adalah himpunan bilangan real, maka irisan dan gabungan dari dua himpunan tersebut adalah...
   a. Himpunan kosong dan himpunan bilangan real
   b. Himpunan bilangan asli dan himpunan kosong
   c. Himpunan bilangan asli dan himpunan bilangan real
   d. Himpunan bilangan kosong dan himpunan bilangan asli
3. Banyak anggota dari produk Cartesian dari $A = \{x < 10: x\ bilangan\ ganjil\}$ dan $B = \{x < 10: x\ bilangan\ genap\}$ adalah...
   a. 25
   b. 10
   c. 5
   d. 0
4. Diberikan himpunan bilangan rasional dan irrasional maka irisannya adalah,,,
   a. Himpunan bilangan rasional
   b. Himpunan bilangan irrasional
   c. Himpunan bilangan real
   d. Himpunan kosong
5. Diberikan himpunan bilangan rasional dan irrasional maka gabungannya adalah,,,
   a. Himpunan bilangan rasional
   b. Himpunan bilangan irrasional
   c. Himpunan bilangan real
   d. Himpunan kosong

Cocokkanlah jawaban kalian untuk soal-soal di atas dengan kunci jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitung jumlah jawaban yang benar dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui penguasaan kalian terhadap materi Kegiatan Belajar 1

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{10}\ x\ 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai:

90% - 100%	Baik sekali
80% - 89%	Baik
70% - 79%	Cukup
< 70%	Kurang

Kalau kalian belum memcapai penguasaan minimal 80% sebaiknya ulangi kegiatan belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai, tetapi jika sudah mencapai penguasaan minimal 80% maka lanjutkan belajar ke kegiatan selanjutnya.

E. Kegiatan Belajar 2

1.1 Fungsi

Untuk ahli matematika pada awal abad ke sembilan belas, kata "fungsi" berarti formula yang pasti, seperti $f(x) := x^2 + 3x - 5$, yang menghubungkan masing-masing bilangan real x bilangan $f(x)$ lain. (Di sini, $f(0) = -5$, $f(1) = -.1$, $f(5) = 35$}.

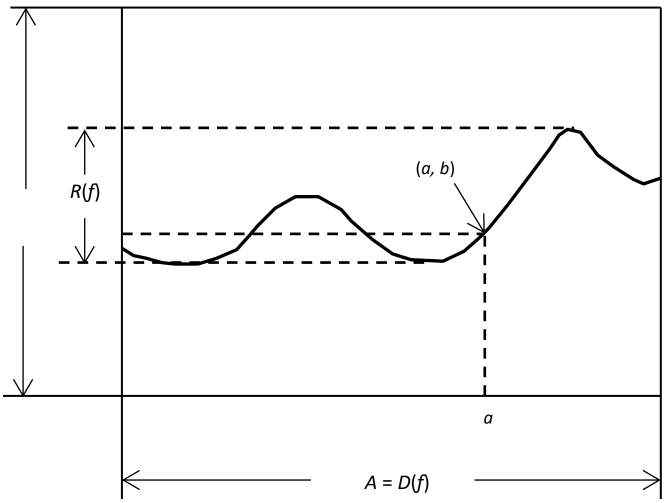
Definisi yang ditinjau kembali seperti : Sebuah fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan korespondensi yang memberikan untuk setiap anggota x di A, sebuah keunikan ditentukan $f(x)$ di B.

Definisi E-1

Misalkan A dan B sebuah himpunan. Kemudian fungsi dari A ke B adalah f pasangan terurut di A x B di mana x sedemikian rupa sehingga untuk setiap $a \in A$ *terdapat sebuah kekhususan* $b \in B$ *dengan* $(a,b) \in f$ *. (Dengan kata lain, jika* $(a,b) \in f$ *dan* $(a,b') \in f$ *,maka* $b = b'$ **).**

Himpunan *A* dari anggota-anggota pertama fungsi *f* disebut **domain** *f* dan sering dilambangkan dengan $D(f)$. Himpunan semua anggota kedua di *f* disebut **range** dari *f* dan sering dilambangkan dengan $R(f)$. Perhatikan bahwa, meskipun $D(f) = A$, kita hanya memiliki $R(f) \subseteq B$. (Lihat Gambar 1.2.1.)

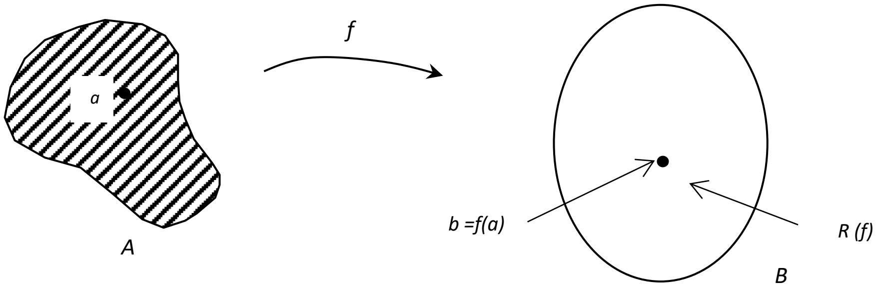
Simbolnya $f : A \to B$



Gambar E-1 Sebuah Fungsi sebagai Grafik

Jika $b = f(a)$, kita sering menyebut *b* sebagai nilai dari f di a, atau sebagai gambar di bawah *f*.

Selain menggunakan grafik, fungsi dapat digambarkan sebagai suatu transformasi dari himpunan $D(f)=A$ ke himpunan $R(f)\subseteq B$. Dalam ungkapan ini, jika $(a,b)\in f$, kita berpikir tentang *f* mengambil anggota dari A dan "mengubah" atau "memetakan" itu menjadi sebuah anggota $b=f(a)$ dalam $R(f)\subseteq B$. Kita sering menggambar diagram, seperti Gambar 1.2.2, bahkan ketika himpunan A dan B bukan himpunan bagian dari bidang.



Gambar E-2 Fungsi sebagai Transformasi

Misalkan $f: A\to B$ menjadi fungsi dengan domain $D(f)=A$ dan range $R(f)\subseteq B$

Definisi E-2

Jika E adalah himpunan bagian dari A, maka direct image dari E di f adalah himpunan bagian f(E) dari B yang diberikan oleh $R(E):=\{f(x): x\in E\}$.

Jika H adalah himpunan bagian dari B, maka inverse image H di f adalah himpunan bagian $f^{-1}(H)$ *dari A diberikan oleh* $f^{-1}(H):=\{x\in A: f(x)\in H\}$.

Contoh E-1

1. Misalkan $f : R \to R$ didefinisikan oleh $f(x) := x^2$. Maka *direct image* dari himpunan $E := \{x : 0 < x < 2\}$ adalah himpunan $f(E) := \{y : 0 < y < 4\}$.

   Jika $G := \{y : 0 < y < 4\}$ maka *direct image* dari *G* adalah himpunan $f^{-1}(G) := \{x : -2 < y < 2\}$. Jadi, dalam hal inidapat dilihat bahwa $f^{-1}(f(E)) \neq E$.

   Di sisi lain, $f\left(f^{-1}(G)\right) = G$. Tetapi jika $H := \{y : -1 < y < 1\}$ maka $f\left(f^{-1}(H)\right) := \{y : 0 \le y \le 1\} \neq H$.

2. Misalkan $f : A \to B$, dan misalkan *G, H* menjadi himpunan bagian dari *B*.

   Akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$

   Bukti :

   Jika $x \in f^{-1}(G \cap H)$, maka *f(*x) ∈ *G* ∩ *H*, sehingga *f(*x) ∈ *G* dan *f(*x) ∈ *H*. Tapi ini menyiratkan bahwa $x \in f^{-1}(G)$x dan $x \in f^{-1}(H)$, di mana $x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$

Definisi-definisi berikut mengidentifikasi beberapa jenis fungsi yang sangat penting.

Definisi E-3 *Misalkan* $f : A \to B$ *adalah fungsi dari A ke B.*

(i) *Fungsi f dikatakan* ***injektif*** *(atau menjadi* ***satu-satu****) jika untuk setiap* $x_1 \neq x_2$ *maka* $f(x_1) \neq f(x_2)$*. Jika f adalah fungsi injektif dapat dikatakan bahwa f adalah sebuah* ***injeksi****.*

(ii) *Fungsi f dikatakan* ***surjektif*** *(atau memetakan ke B) jika f(A) = B, yaitu, jika range R(f) = B. Jika f adalah fungsi surjektif, dikatakan bahwa f sebuah* ***surjeksi***

(iii) *Jika f adalah injektif dan surjektif, maka f dikatakan* ***bijektif****. Jika f adalah bijektif maka f adalah* ***bijeksi****.*

Untuk membuktikan bahwa fungsi f adalah injektif dapat juga dengan membuktikan untuk setiap x_1, x_2 di A, jika $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$

Untuk membuktikan bahwa fungsi f adalah surjektif, cukup buktikan untuk setiap b ∈ B terdapat setidaknya satu x ∈ A sedemikian sehingga f(x) = b.

Contoh E-2

Misalkan $A := \{x \in R : x \neq 1\}$ dan didefinisikan $f(x) := 2x/(x-1)$ untuk semua x ∈ A. Untuk menunjukkan bahwa f adalah injektif, ambil sebarang x_1 dan x_2 di A dan mengasumsikan bahwa $f(x_1) = f(x_2)$ sehingga $\frac{2x}{x_1-1} = \frac{2x_2}{x_2-1}$ yang menyiratkan bahwa $x_1 (x_2 - 1) = x_2 (x_1 - 1)$, dan $x_1 = x_2$. Oleh karena itu f adalah injektif.

Untuk menentukan range dari f, diselesaikan persamaan $y = 2x/(x-1)$ untuk x dalam y. Kita memperoleh $x = y/(y-2)$, yang mengandung arti untuk $y \neq 2$. Jadi range dari f adalah himpunan $y := \{y \in R : y \neq 2\}$. Jadi, f adalah bijeksi A ke B.

Jika f adalah bijeksi, kemudian pertukaran ini menjadikan sebuah fungsi, disebut "invers fungsi" dari f.

Definisi E-4

Jika f: A $\rightarrow$ B adalah bijeksi dari A ke B, maka g:= {(b, a) $\in$ B $\times$ A: (a, b) $\in$ f} adalah fungsi pada B ke A. Fungsi ini disebut ***invers fungsi*** *dari f, dan dilambangkan dengan f^{-1}. Fungsi f^{-1} juga disebut* ***invers*** *dari f.*

Kami juga dapat mengungkap hubungan antara f dan invers f^{-1}nya, dengan mencatat bahwa $D(f) = R(f^{-1})$ dan $R(f) = D(f^{-1})$ dan bahwa $b = f(a)$ jika dan hanya jika $a = f^{-1}(b)$.

Contoh E-3

Berdasarkan contoh di atas bahwa fungsi $f(x) := -\frac{2x}{x-1}$ adalah bijeksi $A := \{x \in \mathbf{R}: x \neq 1\}$ ke himpunan $B := \{y \in \mathbf{R}: y \neq 2\}$. Invers fungsi untuk f diberikan oleh $f^{-1}(y) := \frac{y}{y-2}$ untuk $y \in B$.

Dua fungsi f, g pertama kali menemukan $f(x)$ dan kemudian menerapkan g untuk mendapatkan $g(f(x))$, namun, ini hanya mungkin ketika $f(x)$ termuat dalam domain g. Untuk dapat melakukan ini untuk semua $f(x)$, kita harus mengasumsikan bahwa range f yang terkandung dalam domain g. (Lihat Gambar 1.2.3)

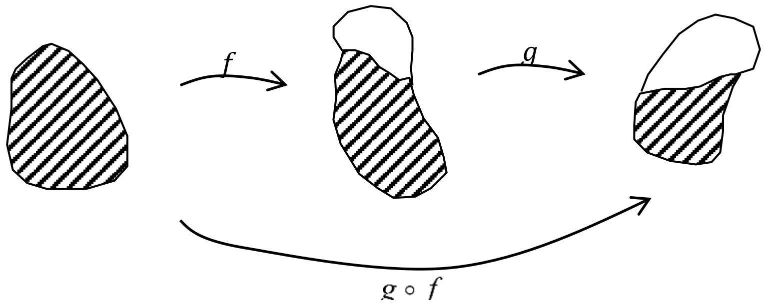
Definisi E-5

Jika $f : A \to B$ *dan* $f : B \to C$, *dan jika R(f)* $\subseteq$ *D(g) = B, maka fungsi komposit* $g \circ f$ *adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh (g o f) (x) : = g(f (x)) untuk semua x* $\in$ *A.*

Contoh E-4

1. Urutan komposisi harus dicatat hati-hati. Sebab, misalkan f dan g adalah fungsi yang nilai-nilainya pada x ∈ **R** diberikan oleh f(x): = 2x dan g(x): = $3x^2$ - 1.

   Karena *D*(g) = *R* dan *R*(f) $\subseteq$ *R* = *D* (g), maka *D* domain $(G \circ F)$ juga sama dengan *R*, dan fungsi komposit $G \circ F$ diberikan oleh $(g\ o\ f)\ (x)\ =\ 3\ (2x)^2\ -\ 1\ =\ 12x^2 - 1$



Gambar E-3 Komposisi f dan g

   Di sisi lain, domain dari fungsi komposit *f* o *g* adalah R juga, namun (*f* o *g*)(*x*) 2(3x^2 - 1) = 6x^2 – 2.

   Jadi, dalam hal ini, $g \circ f \neq f \circ g$.

2. Dalam mempertimbangkan $g \circ f$, beberapa ketelitian harus dilakukan untuk memastikan bahwa range *f* yang termuat dalam domain *g*. Sebagai contoh, jika

$f(x) := 1 - x^2$ dan $g(x) := \sqrt{x}$

dimana $D(g) = \{x : x \geq 0\}$, fungsi komposit $g \circ f$ diberikan oleh rumus

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

hanya untuk $x \in D(f)$ yang memenuhi $f(x) \geq 0$, yaitu, untuk x memenuhi $-1 \leq x \leq 1$. Jika komposisi f o g diberikan oleh rumus
$(f \ o \ g)(x) = 1 - x$
tapi hanya untuk x dalam domain $D(g) = \{x : x \geq 0\}$.

Teorema berikut ini memberikan hubungan antara fungsi komposisi dan *inverse image*.

Teorema E-1

Misalkan $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ fungsi dan misalkan H himpunan bagian dari C. Maka $(g \ o \ f)^{-1}(H) = f^{-}\left(g^{-1}(H)\right)$

Bukti : Latihan

Jika $f : A \to B$ adalah fungsi dan jika $A_1 \subset A$, kita dapat mendefinisikan fungsi $f_1 : A_1 \to B$ oleh $f_1(x) := f(x)$ untuk $x \in A_1$. Fungsi f_1 disebut pembatasan f ke A_1. Kadang-kadang disimbolkan oleh $f_1 = f \mid A_1$. Sebagai contoh, jika $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ adalah fungsi kuadrat : $f(x) := x^2$ untuk $x \in \mathbf{R}$, maka f tidak injektif, sehingga f tidak dapat memiliki fungsi invers. Namun, jika membatasi f untuk himpunan $A_1 := \{x : x \geq 0\}$, maka pembatasan $f | A_1$ adalah bijeksi A_1 onto A_1. Oleh karena itu, pembatasan ini memiliki fungsi invers, yang merupakan fungsi akar kuadrat positif.

F. Latihan

Misalkan $S := \{1,2\}$ and $T := \{a, b, c\}$

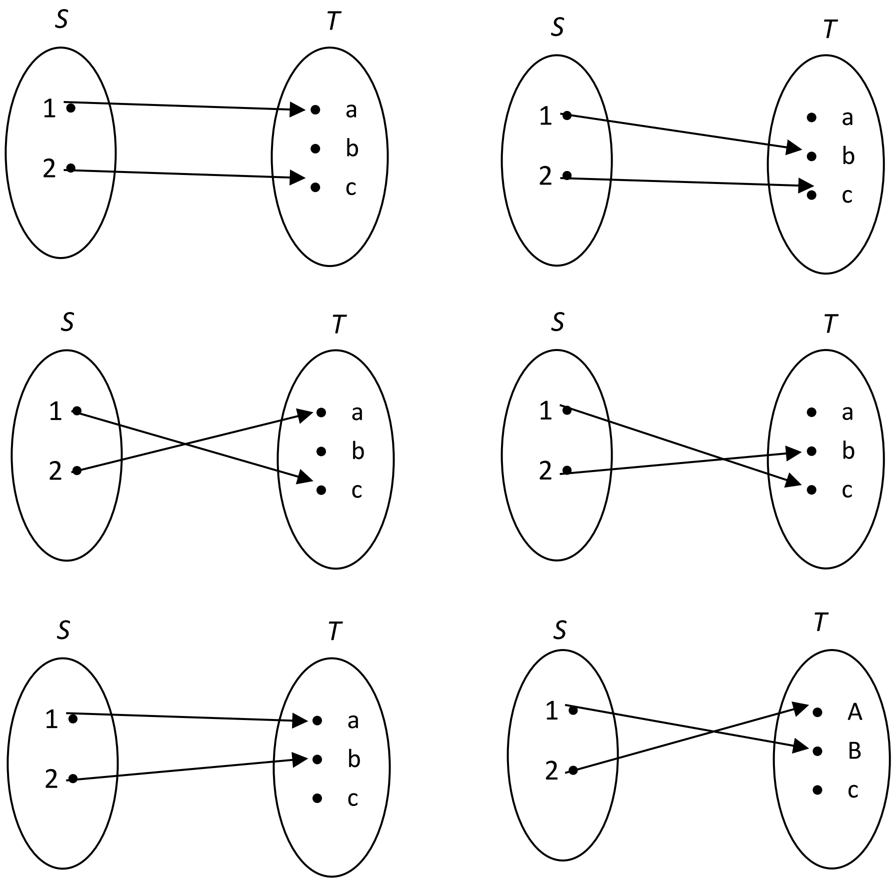
a. Gambarkan injektif yang berbeda dari *S* ke *T*.

b. Gambarkan surjektif yang berbeda dari *T* satu-satu ke *S*.

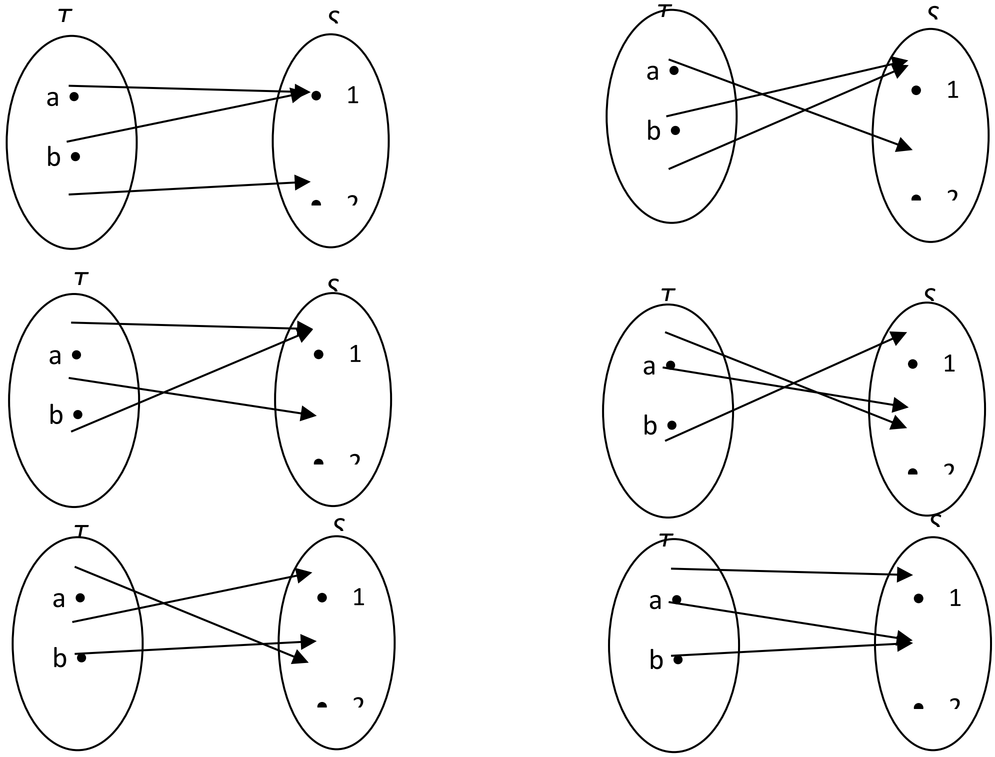
Kunci :

Diketahui : $S := \{1,2\}$ dan $T := \{a, b, c\}$

a. Gambar fungsi injektif yang berbeda dari *S ke T*



b. Gambarkan surjektif yang berbeda dari *T* satu-satu ke *S*.



G. Rangkuman

Misalkan *A* dan *B* sebuah himpunan. Kemudian fungsi dari *A* ke *B* adalah *f* pasangan terurut di $A \ x \ B$ di mana *x* sedemikian rupa sehingga untuk setiap $a \in A$ terdapat sebuah kekhususan $b \in B$ dengan $(a,b) \in f$. (Dengan kata lain, jika $(a,b) \in f$ dan $(a,b') \in f$, maka $b = b'$) Himpunan *A* dari anggota-anggota pertama fungsi *f* disebut **domain** *f* dan sering dilambangkan dengan $D(f)$. Himpunan semua anggota kedua di *f* disebut **range** dari *f* dan sering dilambangkan dengan $R(f)$. Perhatikan bahwa, meskipun $D(f) = A$, kita hanya memiliki $R(f) \subseteq B$. Simbolnya $f : A \to B$

Jika *E* adalah himpunan bagian dari *A*, maka *direct image* dari *E* di *f* adalah himpunan bagian *f(E)* dari *B* yang diberikan oleh $R(E) := \{f(x) : x \in E\}$Jika *H* adalah himpunan bagian dari *B*, maka *inverse image H* di *f* adalah himpunan bagian $f^{-1}(H)$ dari *A* diberikan oleh $f^{-1}(H) := \{x \in A : f(x) \in H\}$

Fungsi *f* dikatakan **injektif** (atau menjadi **satu-satu**) jika untuk setiap $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jika *f* adalah fungsi injektif dapat dikatakan bahwa *f* adalah sebuah **injeksi**. Fungsi *f* dikatakan **surjektif** (atau memetakan ke *B*) jika *f(A)* = *B*, yaitu, jika range *R(f)* = *B*. Jika *f* adalah fungsi surjektif, dikatakan bahwa *f* sebuah **surjeksi** . Jika *f* adalah injektif dan surjektif, maka *f* dikatakan **bijektif**. Jika *f* adalah bijektif maka *f* adalah **bijeksi**.

Jika $f : A \to B$ adalah bijeksi dari A ke B, maka $g := \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$

adalah fungsi pada B ke A. Fungsi ini disebut **invers fungsi** dari *f*, dan dilambangkan dengan f^{-1}. Fungsi f^{-1} juga disebut **invers** dari *f*.

Jika $f : A \to B$ dan $f : B \to C$, dan jika *R(f)* ⊆ *D(g)* = *B*, maka fungsi komposit $g \circ f$ adalah fungsi dari *A* ke *C* yang didefinisikan oleh (*g* o *f*) (*x*) : = *g*(*f* (*x*)) untuk semua $x \in A$.

H. Tes Formatif 2

Pilihlah salah satu sebagai jawaban yang tepat menurut kalian

1. Jika diketahui fungsi $f(x) = \begin{cases} 0, jika\ x\ rasional \\ 1, jika\ x\ irrasional \end{cases}$ maka domain, kodomain, dan range berturut-turut adalah...
   a. Himpunan bilangan real, himpunan bilangan real, himpunan bilangan real
   b. Himpunan bilangan real, himpunan bilangan rasional, {0,1}
   c. Himpunan bilangan real, himpunan bilangan irrasional, {0,1}
   d. Himpunan bilangan real, himpunan bilangan real, {0,1}
2. Jenis fungsi dari $f(x) = \begin{cases} 0, jika\ x\ rasional \\ 1, jika\ x\ irrasional \end{cases}$ adalah...
   a. Injektif
   b. Surjektif
   c. Bijektif
   d. Bukan semuanya
3. Jika diketahui fungsi $f(x) = \frac{2x+5}{8x-10}, x \neq \frac{10}{8}$ maka invers fungsi tersebut adalah...
   a. $f^{-1}(y) = \frac{5+10y}{8y-2}, x \neq \frac{2}{8}$
   b. $f^{-1}(y) = \frac{5-10y}{8y-2}, x \neq \frac{2}{8}$
   c. $f^{-1}(y) = \frac{5+10y}{8y+2}, x \neq -\frac{2}{8}$
   d. $f^{-1}(y) = \frac{5-10y}{8y+2}, x \neq -\frac{2}{8}$
4. Diberikan $f(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 2, x < 0 \end{cases}$ dan $f(x) = 5x$ maka $(gof)(x)$ adalah...

a. $f(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 2, x < 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 5, x \geq 0 \\ 10, x < 0 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} 10, x \geq 0 \\ 5, x < 0 \end{cases}$

d. Tidak terdefinisi

5. Invers dari $(fog)(x)$ jika $f(x) = 1 - x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ adalah...

a. $(fog)^{-1}(y) = 1 - y$

b. $(fog)^{-1}(y) = 1 + y$

c. $(fog)^{-1}(y) = -1 - y$

d. $(fog)^{-1}(y) = 1 + y$

Cocokkanlah jawaban kalian untuk soal-soal di atas dengan kunci jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitung jumlah jawaban yang benar dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui penguasaan kalian terhadap materi Kegiatan Belajar 2

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{10} x\ 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai:

90% - 100%	Baik sekali
80% - 89%	Baik
70% - 79%	Cukup
< 70%	Kurang

Kalau kalian belum memcapai penguasaan minimal 80% sebaiknya ulangi kegiatan belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai, tetapi jika sudah mencapai penguasaan minimal 80% maka lanjutkan belajar ke modul selanjutnya.

I. Kunci Jawaban Modul 1

Tes Formatif 1

1. d
2. c
3. a
4. d
5. c

Tes Formatif 2

1. d
2. d
3. a
4. b
5. a

J. Referensi

Bartle, R. G., and Donald, R.S. (2000) *Introduction to real analysis.* New York: John Wiley & Sons. Inc.

Darmawijaya, S. (2006). *Pengantar analisis real.* Yogyakarta: FMIPA UGM,

MODUL 2
HIMPUNAN FINIT-INFINIT DAN INDUKSI MATEMATIKA

A. Pendahuluan

Modul ini membahas himpunan finit-infinit dan induksi matematika. Pada modul 1 kegiatan belajar 1 sudah dibahas himpunan secara umum. Himpunan pada modul ini dibahas berdasarkan sudut pandang analisis. Adapun induksi matematika adalah metode yang sering digunakan dalam membuktikan lemma dan teorema pada materi berikutnya. Induksi matematika merupakan metode pembuktian dimana semestanya adalah himpunan bilangan asli.

Tujuan yang diharapkan setelah mempelajari modul ini, mahasiswa dapat:

1. Membedakan himpunan finit atau infinit
2. Menentukan himpunan denumerable
3. Menentukan himpunan countable
4. Menentukan himpunan uncountable
5. Menggunakan teorema untuk menentukan himpunan countable
6. Memilih nilai n sebagai dasar dari induksi matematika
7. Menggunakan induksi matematika untuk membuktikan jumlah dari suku ke-n
8. Membuktikan suku ke-n dari suatu barisan dengan induksi
9. Membuktikan jumlah suku ke-n dari barisan yang diberikan dengan menggunakan induksi matematika
10. Memilih nilai n sebagai basis dari induksi matematika

B. Kegiatan Belajar 1

1.3 Himpunan Finit dan Himpunan Infinit

Pengertian tentang “finit” dan “infinit” sangat sempit, dan sangat mungkin mahasiswa belum pernah mengetahui pengertian ini dengan baik. Pada bagian ini akan mendefinisikan istilah-istilah tersebut dan beberapa istilah berkenaan dengan himpunan yang dihubungkan dengan fungsi.

Definisi B-1

(i) *Himpunan kosong* $\emptyset$ *disebut mempunyai 0 anggota*

(ii) *Jika* $n \in \mathbb{N}$ *himpunan S mempunyai n anggota jika terdapat pemetaan bijektif dari himpunan* $\mathbb{N}_n := \{1,2,\cdots,n\}$ *ke S.*

(iii) *Suatu himpunan S disebut finit jika S himpunan kosong atau yang mempunyai n anggota untuk* $n \in \mathbb{N}$.

(iv) *Himpunan S disebut infinit jika tidak finit.*

Karena invers dari pemetaan bijektif adalah pemetaan bijektif, maka dapat dikatakan bahwa himpunan *S* memiliki *n* anggota jika dan hanya jika terdapat pemetaan bijektif dari himpunan S ke himpunan $\{1, 2, \cdots, n\}$. Demikian pula, karena komposisi dari dua pemetaan bijektif adalah pemetaan bijektif, kita lihat bahwa suatu himpunan S_1 mempunyai *n* anggota jika dan hanya jika terdapat suatu pemetaan bijektif dari S_1 ke himpunan S_2 yang memiliki *n* anggota. Selanjutnya, sebuah himpunan T_1 finit jika dan hanya jika terdapat pemetaan bijektif dari T_1 ke himpunan lain T_2 yang finit.

Teorema B3-1 Teorema Ketunggalan

Jika S adalah himpunan finit, maka jumlah anggota dalam S adalah bilangan unik (tunggal) di **N.**

Teorema 1.3-2

N *himpunan bilangan asli adalah himpunan infinit*.

Selanjutnya beberapa sifat dasar himpunan finit dan infinit.

Teorema B3-3

(i) *Jika A adalah himpunan dengan m anggota dan B adalah himpunan dengan n anggota dan jika* $A \cap B = \emptyset$, *maka* $A \cup B$ *mempunyai anggota* $m + n$.

(ii) *Jika A adalah himpunan dengan anggota* $m \in \mathbb{N}$ *dan* $C \subseteq A$ *adalah suatu himpunan dengan satu anggota. Maka* $A \setminus C$ *adalah himpunan dengan anggota* $m - 1$.

(iii) *Jika C adalah himpunan infinit dan B adalah himpunan finit maka* $C \setminus B$ *adalah himpunan infinit.*

Bukti :

(i) Misalkan *f* menjadi bijektif dari $\mathbb{N}_m$ $ke\ A$, dan *g* suatu pemetaan bijektif dari $\mathbb{N}_n$ $ke\ B$. Kita definisikan *h* pada $\mathbb{N}_{m+n}$ dengan $h(i)$ $:= f(i)$ untuk $i = 1, . . . , m$ dan $h(i) := g(i - m)$ untuk $i = m+1, . . . , m+n$.

Kita tinggalkan sebagai latihan untuk menunjukkan bahwa *h* bijektif dari $\mathbb{N}_{m+n}$ $ke\ A \cup B$.

Pembuktian (b) dan (c) latihan

Himpunan bagian dari himpunan finit juga finit, tetapi pernyataan tersebut harus dibuktikan demikian juga himpunan yang infinit.

Teorema 1.3-4 *Misalkan S dan T suatu himpunan dan* $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{S}$

(i) *Jika S himpunan finit, maka T himpunan finit.*

(ii) *Jika T himpunan infinit, maka S infinit.*

Bukti :

(i) Jika $T = \emptyset$ maka *T* adalah himpunan finit. Selanjutnya digunakan induksi matematika untuk membuktikannya anggota bilangan *S*. Jika S mempunyai satu anggota, maka himpunan bagian tak kosong T dari S adalah S sendiri, sehingga T adalah himpunan finit. Misalkan setiap himpunan bagian tak kosong dari suatu himpunan dengan anggota *k* adalah finit. Sekarang, misalkan *S* adalah himpunan yang mempunyai *k + 1* anggota (sehingga terdapat f bijektif pada $\mathbb{N}_{k+1}\ ke\ S$, dan misalkan $T \subseteq S$. Jika $f(k+1) \notin T$, maka T dapat dinyatakan sebagai himpunan bagian dari himpunan $S_1 := S \setminus \{f(k+1)\}$, yang mempunyai *k* anggota. Berdasarkan hipotesis *T* adalah himpunan finit.

Disisi lain, jika $f(k+1) \in T$, maka $T_1 := T \setminus \{f(k+1)\}$ adalah himpunan bagian dari S_1. Karena S_1 memiliki *k* anggota, hipotesis induksi menyiratkan bahwa T_1 adalah himpunan finit sehingga $T := T_1 \cup \{f(k+1)\}$ juga himpunan finit.

(ii) (b) Pernyataan ini kontraposisi dari pernyataan (a).

Definisi 1.3-2

(i) *Himpunan S disebut denumerable (atau countable infinit) jika terdapat suatu pemetaan bijektif* **N** $ke\ S$.

(ii) *Himpunan S disebut countable jika finit atau denumerable*

(iii)*Himpunan S disebut uncountable tidak countable*

Contoh B3-1

1. Himpunan $E := \{2n : n \in \mathbf{N}\}$ dari bilangan asli genap adalah *denumerable*, karena pemetaan $f : \mathbf{N} \rightarrow E$ didefinisikan oleh $f(n) := 2n$ untuk $n \in \mathbf{N}$ bijektif **N** $ke\ E$. Demikian pula, himpunan $O := \{2n - 1 : n \in \mathbf{N}\}$ dari bilangan asli ganjil adalah *denumerable*
2. **Z** himpunan semua bilangan bulat adalah *denumerable*.

   Untuk menunjukkannya, dapat dibuat suatu pemetaan bijektif **N** ke **Z** , dengan cara sebagai berikut : *1 dipetakan ke 0*. Kita memetakan himpunan bilangan asli genap ke himpunan bilangan bulat positif, dan kita memetakan himpunan bilangan asli ganjil ke bilangan bulat negatif. Pemetaan ini dapat ditampilkan dengan pencacahan:

   $$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, . \ . \ .\}$$
3. Gabungan dari dua himpunan *denumerable* adalah himpunan *denumerable*

   Jika $A = \{a_1, a_2, a_3, . \ . \ .\}$ dan $B = \{b_1, b_2, b_3, . \ . \ .\}$, kita dapat menghitung anggota dari $A \cup B$ sebagai :

   $$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, . \ . \ .$$

Teorema 1.3-5 *Misalkan S dan T adalah himpunan, maka* $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{S}$

(i) Jika S himpunan countable, maka T countable.

(ii) Jika T himpunan uncountable, maka S uncountable.

Bukti : latihan

C. Latihan

1. Misalkan S dan T suatu himpunan dan $T \subseteq S$. Jika S himpunan *finit* maka T himpunan *finit*

   Jawaban :

   Jika $T = \emptyset$, maka T himpunan finit. Sekarang kita misalkan $T \neq \emptyset$. kita menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

   a. Jika S mempunyai n anggota, maka himpunan bagian tak kosong T dari S adalah S sendiri, sehingga T merupakan himpunan finit.

   b. Misalkan setiap himpunan bagian tak kosong dari suatu himpunan dengan k anggota adalah himpunan finit.

      Selanjutnya, misalkan S suatu himpunan yang mempunyai $(k + 1)$ anggota. Ini berarti terdapat suatu pemetaan bijektif f dari $\mathbb{N}_{k+1}$ $ke\ S$.

      Jika $f(k + 1) \notin T$, maka T dapat dinyatakan sebagai himpunan bagian dari himpunan $S_1 = S \setminus \{f(k + 1)\}$ yang memnpunyai k anggota (teorema 1.3.4 b). Berdasarkan hipotesis (b) maka T adalah himpunan finit.

      Jika $f(k + 1) \in T$, maka $T_1 = T \setminus \{f(k + 1)\}$ adalah himpunan bagian dari S_1. Karena S_1 mempunyai k anggota, maka menurut hipotesis (b) T_1 merupakan himpunan finit. Hal ini mengakibatkan $T = T_1 \cup \{f(k + 1)\}$ juga himpunan finit.

Bukti tidak formal

Misalkan :

$S = \{a, b\}$ maka $T = \{\ \ \}, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}$

$S = \{a, b, c\}$ maka $T = \{\ \ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

Bila S mempunyai k anggota maka T mempunyai 2^k anggota dan

Bila S mempunyai (k+1) anggota maka T mempunyai 2^{k+1} anggota.

Sehingga, jika S mempunyai himpunan finit maka T juga himpunan finit.

D. Rangkuman

Himpunan kosong $\emptyset$ disebut mempunyai 0 anggota, Jika $n \in \mathbf{N}$ himpunan *S* mempunyai *n* anggota jika terdapat pemetaan bijektif dari himpunan $\mathbf{N}_n := \{1,2, \cdots, n\}$ ke *S*, Suatu himpunan *S* disebut finit jika *S* himpunan kosong atau yang mempunyai *n* anggota untuk $n \in \mathbf{N}$. Himpunan *S* disebut infinit jika tidak finit.

Himpunan *S* disebut *denumerable* (atau *countable infinit*) jika terdapat suatu pemetaan bijektif **N** $ke\ S$. Himpunan *S* disebut *countable* jika *finit* atau *denumerable*, Himpunan *S* disebut *uncountable* tidak *countable*

E. Tes Formatif 1

Pilihlah salah satu sebagai jawaban yang tepat menurut kalian

1. Pernyataan di bawah ini merupakan himpunan finit dan infinit
   a. $\{a, b, \dots, z\}$ dan $\{1,3,5, \dots\}$
   b. Himpunan bilangan ganjil dan himpunan bilangan asli
   c. Himpunan bilangan genap dan himpunan bilangan asli
   d. Himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan real
2. Berikut ini merupakan A himpunan denumerable kecuali...
   a. Himpunan bilangan ganjil
   b. Himpunan bilangan real
   c. Himpunan bilangan asli
   d. Himpunan bilangan rasional
3. Himpunan di bawah ini yang merupakan himpunan countable adalah...
   a. $\{0 < x < 1 : x \epsilon \boldsymbol{R}\}$
   b. $\{-1 < x < 1 : x \epsilon \boldsymbol{R}\}$
   c. $\{0,1\}$
   d. $\{0 \leq x \leq 1 : x \epsilon \boldsymbol{R}\}$
4. Diberikan $A = \{2n : n \in \boldsymbol{N}\}$ maka A^c merupakan himpunan...
   a. Denumerable
   b. Countable
   c. Infinit
   d. Uncountable
5. Jika A dan B adalah himpunan bagian dari himpunan bilangan real, $A \subseteq B$ dan A countable. Pernyataan yang salah mengenai himpunan B adalah...

a. Himpunan countable
b. Himpunan uncountable
c. Himpunan denumerable
d. Himpunan infinit

Cocokkanlah jawaban kalian untuk soal-soal di atas dengan kunci jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitung jumlah jawaban yang benar dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui penguasaan kalian terhadap materi Kegiatan Belajar 1

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{10} x\ 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai:

90% - 100%	Baik sekali
80% - 89%	Baik
70% - 79%	Cukup
< 70%	Kurang

Kalau kalian belum memcapai penguasaan minimal 80% sebaiknya ulangi kegiatan belajar 1 terutama bagian yang belum dikuasai, tetapi jika sudah mencapai penguasaan minimal 80% maka lanjutkan belajar ke kegiatan selanjutnya.

F. Kegiatan Belajar 4

1.4 Induksi Matematika

Induksi matematika adalah metode yang pembuktian yang sering digunakan dari pernyataan bilangan asli.

Definisi 1.4-1 Sifat Well-Ordering dari N

Setiap himpunan bagian tak kosong dari **N** *memiliki anggota terkecil. Dengan kata lain jika S adalah himpunan bagian dari* **N** *dan jika* $S \neq \emptyset$*, maka terdapat seperti* $m \in S$ *yang* $m \leq k$ *untuk semua* $k \in S$.

Teorema F4-1 Prinsip Induksi Matematika *Misalkan S adalah himpunan bagian dari N yang prosesnya terdiri dari dua sifat:*

(i) *Bilangan* $1 \in S$

(ii) *Untuk setiap* $k \in \boldsymbol{N}$*, jika* $k \in S$*, maka* $k + 1 \in S$.

Bukti :

Misalkan yang bertentangan bahwa $S \neq N$. Kemudian set $N \setminus S$ tidak kosong, sehingga dengan Prinsip Sifat *Well-Ordering* memiliki sebuah anggota m yang paling kecil. Dari $1 \in S$ dengan hipotesis (1), bahwa $m > 1$. Tapi ini menyiratkan $m - 1$ adalah sebuah bilangan asli. Karena $m - 1 < m$ dan karena m adalah anggota paling kecil dari **N** sedemikian sehingga $m \notin S$, kita menyimpulkan bahwa $m - 1 \in S$.

Sekarang untuk hipotesis (2) untuk anggota $k := m - 1$ di S, untuk menyimpulkan bahwa $k + 1 = (m - 1) + 1 = m$ milik S. Tapi pernyataan ini bertentangan fakta bahwa $m \notin S$. Karena m diperoleh dari asumsi bahwa $N \setminus S$ tidak kosong (kontradiksi). Oleh karena itu harus $S = \mathbf{N}$. (terbukti).

Prinsip Induksi Matematika sering dinyatakan bahwa : $P(n)$ adalah pernyataan yang berarti tentang $n \in \mathbf{N}$. Dalam konteks ini, Prinsip Induksi Matematika dapat dirumuskan sebagai berikut.

Untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, misalkan $P\ (n)$ pernyataan tentang n. Misalkan bahwa:

(1') $P\ (1)$ adalah benar

(2') Untuk setiap $k \in \mathbf{N}$, jika $P\ (k)$ benar, maka $P\ (k + 1)$ adalah benar.

Maka $P\ (n)$ benar untuk semua $n \in$ **N.**

Teorema F-2 Prinsip Induksi Matematika (versi kedua)

Misalkan $n_0 \in \boldsymbol{N}$ dan misalkan $P\ (n)$ menjadi pernyataan untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$. Misalkan bahwa:

(i) *Pernyataan $P\ (n_0)$ adalah benar.*

(ii) *Untuk semua $k \geq n_0$, kebenaran dari $P(k)$ menyiratkan kebenaran dari $P(k + 1)$.*

Maka P (n) benar untuk semua $n \geq n_0$. Kadang-kadang bilangan n_0 dalam (1) disebut basis, karena ia berfungsi sebagai titik awal, dan implikasi di dalam (2), yang dapat ditulis P (k) ⟹ P (k +1), disebut induksi, karena menghubungkan k kasus ke kasus k + 1. Contoh berikut menggambarkan bagaimana Induksi matematika digunakan untuk membuktikan pernyataan tentang bilangan asli.

Contoh F-1

1. Untuk setiap n ∈ **N**, jumlah n dari bilangan asli pertama diberikan oleh

$$1 + 2 + \ldots + n = ½\, n\ (n + 1)$$

Untuk membuktikan rumus ini, misalkan S adalah himpunan semua $n \in \mathbf{N}$ untuk rumus yang benar. Kita harus memastikan bahwa kondisi (1) dan (2) dari 1. 3. 2 memenuhi. Jika $n = 1$, maka kita memiliki $1 = ½.1.(1 + 1)$ sehingga $1 \in$

S, dan (1) memenuhi. Selanjutnya, mengasumsikan bahwa $k \in S$ dan ingin menyimpulkan dari asumsi bahwa $k + 1 \in S$. Kemudian, jika $k \in S$, maka

$$1 + 2 + \ldots + k = ½\, k\, (k + 1)$$

Jika kita menambahkan k + 1 untuk kedua sisi persamaan yang diasumsikan, kita memperoleh

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = ½\, k\, (k + 1) + (k + 1)$$
$$= ½\, (k + 1)\, (k + 2)$$

Dari ini dinyatakan rumus untuk $n = k + 1$, kita menyimpulkan bahwa $k + 1 \in S$. Oleh karena itu, kondisi (2) dari 1. 3. 2 memenuhi. Akibatnya, dengan prinsip Induksi Matematika maka disimpulkan bahwa $S = \mathbf{N}$ sehingga rumus berlaku untuk semua $n \in \mathbf{N}$.

2. Untuk setiap $n \in \mathbf{N}$, jumlah dari kuadrat dari bilangan asli pertama diberikan oleh

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = 1 / 6\ k\ (k + 1)\ (2k + 1) + (k + 1)^2$$
$$= 1 / 6\ k\ (k + 1)\ (k + 2k^2 + 6k + 6)$$
$$= 1 / 6\ k\ (k + 1)\ (k + 2)\ (2k + 3)$$

Akibatnya, rumus ini berlaku untuk semua $n \in \mathbf{N}$.

3. Mengingat dua bilangan real a dan b, kita akan membuktikan bahwa $a - b$ adalah faktor dari $a^n - b^n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Pertama kita melihat bahwa pernyataan ini jelas benar untuk n = 1. Jika kita sekarang berasumsi bahwa $a^k - b^k$ adalah faktor dari $a^k - b^k$, kemudian

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1}$$
$$= a\,(a^k - b^k) + b^k\,(a - b)$$

Oleh hipotesis induksi, a - b adalah faktor dari $(a^k - b^k)$ dan itu adalah jelas faktor $b^k (a - b)$. Oleh karena itu, a - b adalah faktor dari a^{k+1} - b^{k+1}, dan maka dari Induksi Matematika bahwa a - b adalah faktor dari $a^n - b^n$ untuk semua n $\in$ N. Berbagai hasil bagi dapat diturunkan dari fakta ini.

4. Ada pernyataan yang benar untuk banyak bilangan asli tetapi tidak benar untuk semua. Sebagai contoh, rumus p (n): = n^2 - n + 41 memberikan bilangan prima untuk n = 1, 2, ..., 40. Namun, $p\ (41)$ jelas dibagi oleh 41, jadi itu bukan bilangan prima. Versi lain dari Prinsip Induksi matematika kadang-kadang cukup berguna. Ini disebut "Prinsip Induksi Kuat".

Definisi F-2 *Misalkan S adalah himpunan bagian dari N yang memenuhi :*

(i) $1 \in S$

(ii) *Untuk setiap* $k \in$ **N**, *jika* $\{1, 2, .., k\} \subseteq S$, *maka* $k + 1 \in S$. *Maka* $S = \mathbf{N}$

G. Latihan

1. Buktikan bahwa $n < 2^n$ untuk setiap $n \in$ **N**

   Kunci :

   (i) $p\ (n) = n < 2^n$ adalah benar

   (ii) Akan dibuktikan bahwa $p\ (n + 1) = (n + 1) < 2^{n+1}$benar

$$(n + 1) < 2^n + 1$$

$$(n + 1) < 2^n + 1 < 2^n.2 = 2^{n+1}$$

   Jadi $(n + 1) < 2^{n+1}$ benar

Sehingga terbukti $n < 2^n$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$

2. Gunakan induksi Matematika untuk membuktikan bahwa jika himpunan S mempunyai n anggota, maka $\mathcal{P}(S)$ mempunyai 2^n anggota.

   Kunci :

   Misalkan $\mathcal{P}(S)$ adalah proposisi bahwa suatu himpunan dengan *n* anggota memiliki 2^n himpunan bagian.

   Langkah Dasar: P(0) benar, karena suatu himpunan dengan nol anggota, himpunan kosong, memiliki secara tepat 2^0 = 1 himpunan bagian, yaitu, dirinya sendiri.

   Langkah Induktif: Asumsikan bahwa $\mathcal{P}(S)$ benar, yaitu, setiap himpunan dengan *n* anggota memiliki $\mathcal{P}(S)$ dengan 2^n anggota . Ini harus ditunjukkan bahwa di bawah asumsi ini *P(n + 1)* yang merupakan pernyataan bahwa setiap himpunan dengan *n + 1* anggota memiliki $\mathcal{P}(S)$ dengan 2^{n+1} anggota, juga harus benar. Untuk menunjukkan ini, misalkan *T* adalah suatu himpunan dengan *n + 1* anggota. Maka, ini dimungkinkan untuk menulis $T = S \cup \{a\}$ dimana *a* adalah suatu anggota dari *T* dan $= T - \{a\}$.

   Himpunan bagian dari T dapat diperoleh dalam cara berikut. Untuk masing-masing himpunan bagian X dari S ada secara tepat dua himpunan bagian dari T, yaitu, X dan $\cup\ \{a\}$ Ini merupakan semua himpunan bagian dari T dan semuanya berbeda. Karena 2^n ada himpunan bagian dari S, ada 2. 2^n= 2^{n+1} himpunan bagian dari T. Ini mengakhiri argumen induksi.

H. Rangkuman

Prinsip Induksi Matematika : Misalkan *S* adalah himpunan bagian dari **N** yang prosesnya terdiri dari dua sifat: (1) Bilangan $\mathbf{1} \in \boldsymbol{S}$ (2) Untuk setiap $\boldsymbol{k} \in \mathbf{N}$, jika $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{S}$, maka $\boldsymbol{k} + \mathbf{1} \in \boldsymbol{S}$.

I. Tes Formatif 2

Pilihlah salah satu sebagai jawaban yang tepat menurut kalian

1. Pernyataan $3n < n^2 - 1$ benar untuk suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan asli. Nilai n yang dapat dijadikan dasar jika akan membuktikan dengan induksi matematika adalah...
   a. 4
   b. 3
   c. 2
   d. 1
2. Jumlah suku ke-n dari $\sum_{j=1}^{n} j^3$ adalah...
   a. $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$
   b. $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
   c. $\left(\frac{n(n+1)}{2!}\right)^2$
   d. $\left(\frac{n(n+1)}{n}\right)^2$
3. Suku ke-n dari barisan (4,10,16,...) adalah...
   a. $2n + 1$
   b. $5n - 1$
   c. $6n - 2$
   d. $8n - 4$

4. Jumlah suku ke-n dari $\sum_{j=1}^{n+1}(2j-1)$ adalah...

   a. $(n+1)^2$
   b. $(2n-1)^2$
   c. $\left(\frac{2(n+1)-1}{2}\right)^2$
   d. $(3n-2)^2$

5. Dasar untuk membuktikan bahwa $n! > n^2$ yang berlaku untuk setiap elemen himpunan bilangan asli adalah ...

   a. 2
   b. 1
   c. 4
   d. 3

Cocokkanlah jawaban kalian untuk soal-soal di atas dengan kunci jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitung jumlah jawaban yang benar dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui penguasaan kalian terhadap materi Kegiatan Belajar 2

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{10}\ x\ 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai:

90% - 100%	Baik sekali
80% - 89%	Baik
70% - 79%	Cukup
< 70%	Kurang

Kalau kalian belum memcapai penguasaan minimal 80% sebaiknya ulangi kegiatan belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai, tetapi jika sudah mencapai penguasaan minimal 80% maka lanjutkan belajar ke modul selanjutnya.

J. Kunci Jawaban Modul 2

Tes Formatif 3

1. a
2. b
3. c
4. d
5. b

Tes Formatif 4

1. a
2. b
3. c
4. a

K. Referensi

Bartle, R. G., and Donald, R.S. (2000) *Introduction to real analysis.* New York: John Wiley & Sons. Inc.

Darmawijaya, S. (2006). *Pengantar analisis real.* Yogyakarta: FMIPA UGM,

Herry, S. (1993). *Teori bilangan*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Rosen, K. H. (1992). *Elementary number theory and its applications*. New York: Addison-Wesley.

MODUL 3
SIFAT ALJABAR DAN TERURUT BILANGAN REAL

A. Pendahuluan

Modul ini membahas tentang sifat aljabar, sifat keterurutan, dan sifat lengkap bilangan real. Pada sifat-sifat aljabar yang disampaikan merupakan sifat-sifat yang familiar digunakan diantaranya sifat komutatif, asosiatif, dan distributif.

Kompetensi yang diharapkan setelah membaca bab ini adalah mahasiswa dapat memahami pengertian sistem bilangan real, definisi-definisi dan teorema-teorema yang terkait serta mampu menerapkannya dalam menyelesaikan soal. Sistem bilangan real merupakan hasil peradaban manusia yang banyak memberikan ide dan inspirasi baagi perkembangan dan pengembangan matematika itu sendiri. Tujuan yang diharapkan setelah mempelajari modul ini, mahasiswa dapat:

1. Menggunakan sifat aljabar, sifat keterurutan, dan sifat lengkap bilangan real untuk membuktikan teorema-teorema terkait sifat bilangan real
2. Menggunakan definisi dan teorema untuk menentukan nilai dari keterurutan bilangan real
3. Menentukan nilai mutlak dari suatu bilangan real
4. Menggunakan definisi dan teorema untuk menentukan nilai dari supremum dan infimum bilangan real
5. Menentukan interval bersarang dari suatu bilangan real

B. Kegiatan Belajar 1

2.1 Sifat-sifat Aljabar Bilangan Real

Berikut ini penjelasan singkat mengenai sifat-sifat dasar dari penjumlahan dan perkalian bilangan real dan beberapa sifat yang diturunkan dalam beberapa teorema. Operasi biner pada himpunan bilangan real adalah penjumlahan dan perkalian. Notasi penjumlahan "+" dan notasi perkalian ".". Operasi biner tersebut memenuhi sifat-sifat:

(A1) $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$ (komutatif penjumlahan)

(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbf{R}$ (assosiatif penjumlahan)

(A3) Ada $0 \in \mathbf{R}$ dengan $a + 0 = 0 + a = a$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ (identitas penjumlahan)

(A4) Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ ada anggota $-a \in \mathbf{R}$ **dengan** $a + (-a) = 0$ (invers penjumlahan)

(M1) $a.b = b.a$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$ (komutatif perkalian)

(M2) $(a.b).c = a.(b.c)$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$ asosiatif perkalian)

(M3) Ada $1 \in \mathbf{R}$ dengan $a.1 = 1.a = a$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ (identitas perkalian)

(M4) Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ sedemikian hingga $a \neq 0$ ada anggota $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}$ dengan

$a.\frac{1}{a} = 1$ (invers perkalian)

(D) $a.(b + c) = a.c + b.c$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbf{R}$ (distributif perkalian terhadap penjumlahan)

Selanjutnya diberikan dua teorema tentang anggota 0 dan 1 seperti pada sifat A3 dan M3.

Teorema 2.1-1

(i) *Jika z dan a anggota bilangan real sedemikian hingga $z + a = a$ maka $z = 0$*

(ii) *Jika u dan $b \neq 0$ anggota bilangan real sedemikian hingga $u.b = b$ maka $b = 1$*

(iii) *Jika a anggota bilangan real maka $a.0 = 0$*

Penyelesaian:

(i) Diketahui : $a, z \in \mathbf{R}$ dan $z + a = a$

Akan dibuktikan : $z = 0$

Bukti :

$z = z + 0$	A3
$= z + (a + (-a))$	A4
$= (z + a) + (-a)$	A2
$= a + (-a)$	diketahui
$= 0$	A4…………(terbukti)

(ii) Mirip dengan (i) dengan menggunakan sifat perkalian

(iii) Diketahui : a anggota bilangan real

Akan dibuktikan : $a.0 = 0$

Bukti :

$a.1 = a$	M3
$a.1 + a.0 = a + a.0$	menambahkan bilangan ke dua sisi
$a\,(1 + 0) = a + a.0$	D
$a\,.1 = a + a.0$	A3
$a = a + a.0$	M3

Berdasarkan teorema 1.1.1 (i) maka $a.0 = 0$

Teorema 2.1-2 *Jika untuk setiap* $\boldsymbol{a}$ *anggota bilangan real maka*:

(i) $(-1).a = (-a)$

(ii) $-(-a) = a$

(iii) $(-1).(-1) = 1$

Bukti : dikerjakan sebagai latihan

Teorema 2.1-3

(i) *Jika* a *dan* b *anggota bilangan real sedemikian hingga* $a + b = 0$ *maka* $b = -a$

(ii) *Jika* $a \neq 0$ *dan* b *anggota bilangan real sedemikian hingga* $a.b = 1$ *maka* $b = \frac{1}{a}$

(iii) *Jika* $a.b = 0$ *maka* $a = 0$ *atau* $b = 0$

Penyelesaian:

(i) Diketahui : $a, b \in \mathbf{R}$ yang memenuhi $a + b = 0$

Adb : $b = -a$

Bukti :

$a + b = 0$ diketahui

$(-a) + (a + b) = (-a) + 0$ menambahkan bilangan di kedua sisi

$((-a) + a) + b = (-a) + 0$ A2

$0 + b = (-a) + 0$ A4

$b = (-a)$ A3

Jadi, terbukti bahwa jika a *dan* b *anggota bilangan real sedemikian hingga* $a + b = 0$ *maka* $b = -a$

(ii) latihan

(iii) Diketahui : $a.b = 0$

Adb : $a = 0$ atau $b = 0$

Bukti :

$a.b = 0$ diketahui

(*) $a. \neq 0$ maka ada $\frac{1}{a} \neq 0$ sehingga

$\frac{1}{a}.(a.b) = \frac{1}{a}.0$ kedua sisi dikalikan bilangan yang sama

$\left(\frac{1}{a}.a\right).b = \frac{1}{a}.0$ M2

$1.b = \frac{1}{a}.0$ M4

$b = 0$ M3 dan teorema 2.1.1 (iii)

(**) atau jika $b. \neq 0$ maka ada $\frac{1}{b} \neq 0$ (cara yang sama seperti *) maka diperoleh $a = 0$.

Jadi, terbukti bahwa jika $a.b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$

Operasi biner yang lain seperti pengurangan didefinisikan sebagai invers dari operasi penjumlahan yaitu $a - b := a + (-b)$ untuk setiap *a*, *b* bilangan real. Sama juga dengan operasi pembagian merupakan invers dari operasi perkalian yaitu $\frac{a}{b} := a.\frac{1}{b}$

Kesepakatan untuk notasi perkalian a.b cukup dituliskan ab dan penulisan a^2 untuk aa, a^3 untuk $(a^2)a$ dan secara umum didefinisikan $a^{n+1} := (a^n)a$ untuk setiap n $\in \mathbf{N}$. Lebih lanjut $a^1 = a$ dan jika $a \neq 0$

maka dapat ditulis $a^0 = 1$ dan a^{-1} untuk $\frac{1}{a}$ dan jika n $\in$ **N** dapat ditulis

a^{-n} untuk $\left(\frac{1}{a}\right)^n$

Himpunan bilangan asli (**N**) dan himpunan bilangan bulat (**Z**) adalah himpunan bagian dari himpunan bilangan real **R**. Anggota himpunan bilangan real yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b $\in$ **Z** dan $a \neq 0$ disebut dengan bilangnan rasional (**Q**). Akan tetapi tidak semua anggota bilangan real adalah bilangan rasional contohnya $\sqrt{2}$ yang disebut dengan bilangan irrasional.

Berikut ini teorema yang membuktikan bahwa $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional.

Teorema 2.B-4

Tidak ada anggota bilangan rasional sedemikian hingga

$r^2 = 2$

Bukti :

Dengan menggunakan pembuktian tidak langsung, yaitu dengan pengandaian. Andaikan ada r $\in$ **Q** sedemikian hingga $r^2 = 2$. Karena r $\in$ **Q** maka r dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ (pecahan sederhana ; a dan b saling prima), sehingga diperoleh $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ atau $a^2 = 2b^2$. Karena $2b^2$ genap maka a^2 juga genap. Akibatnya a juga genap. Karena a genap maka a = 2t untuk suatu $t \in$ **N,** sehingga $a^2 = 4t^2$. Diketahui $a^2 = 2b^2$ dan a genap akibatnya b harus ganjil (jika b genap kontradiksi dengan a dan b saling prima). Jadi $a^2 = 2b^2$

$\Leftrightarrow 4t^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2t^2 = b^2$ artinya b genap. (kontradiksi). Jadi pengandaian ditolak, sehingga dapat disimpulkan tidak ada anggota bilangan rasional sedemikian hingga $r^2 = 2$.

2.2 **Sifat-Sifat Terurut pada Bilangan Real**

Sifat terurut menjelaskan tentang kepositifan dan ketaksamaan diantara bilangan-bilangan real.

Ada himpunan **P** yang merupakan himpunan bagian dari **R** yang memenuhi tiga sifat berikut :

(1) Jika $a, b \in \mathbf{P}$ maka $a + b \in \mathbf{P}$

(2) Jika $a, b \in \mathbf{P}$ maka $a.b \in \mathbf{P}$

(3) Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ hanya ada satu yang memenuhi $a \in \mathbf{P}$ atau $-a \in \mathbf{P}$ atau $a = 0$

Sifat pertama dan kedua merupakan sifat tertutup **P** terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Sifat ketiga disebut dengan sifat trikotomi sehingga membagi himpunan bilangan real ke dalam tiga jenis anggota yang berbeda.

Berikut ini beberapa definisi tentanng sifat terurut himpunan bilangan real.

Definisi 0.2-1

(i) *Jika* $a \in \boldsymbol{P}$ *ditulis* $a > 0$ *artinya* a *adalah bilangan real positif*

(ii) *Jika* $a \in \boldsymbol{P} \cup \{0\}$ *ditulis* $a \geq 0$ *artinya* a *adalah bilangan real nonegatif*

(iii) *Jika* $-a \in \boldsymbol{P}$ *ditulis* $a > 0$ *artinya* a *adalah bilangan real negatif*

(iv) *Jika* $-a \in \boldsymbol{P} \cup \{0\}$ *ditulis* $a \geq 0$ *artinya* a *adalah bilangan real nonpositive.*

Definisi 0.2-2

(i) *Jika* $a - b \in P$ *maka ditulis* $a > b$ *atau* $b < a$

(ii) *Jika* $a - b \in P \cup \{0\}$ *maka ditulis* $a \geq b$ *atau* $b \leq a$

Sifat trikotomi di atas berakibat bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$ hanya memenuhi satu keadaan dari $a < b$ atau $b < a$ atau $a = b$.

Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ maka $a = b$. Jika $a < b < c$ maka artinya $a < b$ dan $b < c$.

Teorema 2.0-1 *Diberikan sebarang* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in R$

(i) *Jika* $a < b$ *dan* $b < c$ *maka* $a < c$

(ii) *Jika* $a < b$ *dan maka* $a + c < b + c$

(iii) *Jika* $a < b$ *dan* $c > 0$ *maka* $ac < bc$

(iv) *Jika* $a < b$ *dan* $c < 0$ *maka* $ac > bc$

(v) *Jika* $a > 0$ *maka* $\frac{1}{a} > 0$

(vi) *Jika* $a < 0$ *maka* $\frac{1}{a} < 0$

Bukti :

(i) Diketahui : $a, b, c \in \mathbf{R}$

$a < b$ dan $b < c$

Adb : $a < c$

Bukti :

Karena $a < b$ maka b$-a \in \mathbf{P}$

$b < c$ maka $c - b \in \mathbf{P}$

Berdasarkan sifat keterurutan maka $a + b \in \mathbf{P}$ sehingga diperoleh :

$(b - a) + (c - b) \in \mathbf{P}$

$(b+(-a))+(c+(-b)) \in \mathbf{P}$

$b+(-a)+c+(-b) \in \mathbf{P}$

$(b+(-b))+(c+(-a)) \in \mathbf{P}$

$0+(c+(-a)) \in \mathbf{P}$

$(c+(-a)) \in \mathbf{P}$

$(c-a) \in \mathbf{P}$ artinya $a < c$ ....terbukti

(ii) Latihan

(iii) Diketahui : $a < b$ dan $c > 0$

Adb : $ac < bc$

Bukti :

Karena $a < b$ maka b$-a \in \mathbf{P}$

$c > 0$ maka $c \in \mathbf{P}$

Berdasarkan sifat keterurutan maka $ab \in \mathbf{P}$ sehingga diperoleh :

$(b-a)c \in \mathbf{P}$

$(b+(-a))c \in \mathbf{P}$

$bc+(-a)c \in \mathbf{P}$

$bc-ac \in \mathbf{P}$ artinya a$c < bc$ ....terbukti

Langkah yang sama untuk

(iv) latihan

Oleh karena itu dapat dilihat bahwa bilangan asli juga merupakan bilangan real positif. Seperti pada teorema berikut ini :

Teorema 2.0-2

(i) *Jika* $a \in \boldsymbol{R}$ *dan* $a \neq 0$ *maka* $a^2 > 0$

(ii) *1 > 0*

(iii) *Jika* $n \in \boldsymbol{R}$ *dan* *maka* $n > 0$

Bukti : Silahkan buktikan sebagai latihan

Teorema 2.0-3

Jika a,b ∈ ***R*** *dan* $a < b$ *maka* $a < \frac{a+b}{2} < b$

Bukti :

Diketahui : a,b ∈ **R** dan $a < b$

Adb : $a < \frac{a+b}{2} < b$

Bukti :

Karena $a < b$ maka $a + a < a + b$

$2a < a + b$ dan $\frac{1}{2} > 0$ maka $a < \frac{a+b}{2}$ ....*

Karena $a < b$ maka $a + b < b + b$

$a + b < 2b$ dan $\frac{1}{2} > 0$ maka $\frac{a+b}{2} < b$ ....**

Berdasarkan * dan ** diperoleh $a < \frac{a+b}{2} < b$

Akibat dari teorema dapat dikatakan bahwa tidak ada bilangan real pisitif terkecil. Berikut ini akan dibuktikan bahwa suatu himpunan $a \geq 0$ adalah sama dengan nol, seperti pada teorema berikut.

Teorema 2.0-4

Jika a ∈ ***R*** *sedemikian hingga* $0 \leq a < \varepsilon$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *maka* $a = 0$

Bukti :

Diketahui : a ∈ **R** sedemikian hingga $0 \leq a < \varepsilon$

Adb : untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $a = 0$

Bukti : berdasarkan sifat trikotomi ada 3 posisi yang mungkin untuk a, tetapi untuk $a < 0$ tidak mungkin (bertentangan dengan $0 \leq a < \varepsilon$). Jadi ada dua kemungkinan yaitu $a > 0$ atau $a = 0$

Andaikan $a > 0$ maka $a > \frac{a}{2} > 0$

Ambil $\varepsilon_0 = \frac{a}{2}$ maka $a > \varepsilon > 0$ (kontradiksi dengan $0 \leq a < \varepsilon$)

Sehingga otomatis posisi $a = 0$

Teorema-teorema berikut ini menentukan faktor-faktor dari bilangan positif dan negatif.

Teorema 2.0-5 *Jika* $\boldsymbol{ab > 0}$ *untuk setiap a, b bilangan real maka berlaku :*

(i) $a > 0$ *dan* $b > 0$ *atau*

(ii) $a < 0$ *dan* $b < 0$

Bukti :

(i) Diketahui : $ab > 0$

Adb : $a > 0$ dan $b > 0$

Bukti :

Jika $a > 0$ maka $\frac{1}{a} > 0$

Karena $\frac{1}{a} > 0$ dan $ab > 0$maka $b > 0$.............terbukti

(ii) Latihan

Akibat 0-1 *Jika* $\boldsymbol{ab < 0}$ *untuk setiap a,b bilangan real maka berlaku :*

(i) $a < 0$ dan $b > 0$ atau

(ii) $a > 0$ dan $b < 0$

Bukti : latihan

Sifat keterurutan dapat digunakan untuk meyelesaikan suatu ketaksamaan seperti pada contoh berikut ini.

Contoh 2.0-1

1. Tentukan himpunan A dari bilangan real x sedemikian hingga $2x + 3 \leq 6$

   Jawab : $x \in A$ dan $2x + 3 \leq 6$

   $$2x \leq 6$$

   $$x \leq \frac{3}{2}$$

   Jadi $A = \{x \in \mathbf{R} : x \leq \frac{3}{2}\}$

2. Diberikan $B = \{x \in \mathbf{R} : \mathrm{x}^2 + x \geq 2\}$. Tentukan bentuk lain dari B

   Jawab :

   Dikeetahui $x \in B$ dan $\mathrm{x}^2 + x \geq 2$

   $$\mathrm{x}^2 + x - 2 \geq 0$$

   $$(x - 1) + (x + 2) \geq 0$$

   Sehingga diperoleh

   (i) $(x - 1) \geq 0$ dan $(x + 2) \geq 0$ atau

   (ii) $(x - 1) \leq 0$ dan $(x + 2) \leq 0$

   Kasus (i) diperoleh $x \geq 1$ dan $x \geq -2$ yang berarti $x \geq 1$

   Kasus (ii) diperoleh $x \leq 1$ dan $x \leq -2$ yang berarti $x \leq -2$

   Jadi bentuk lainnya adalah $B = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\} \cup \{x \in \mathbf{R} : x \leq -2\}$

Teorema 2.0-6 Jika $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{0}$ dan $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$ untuk setiap a,b bilangan real maka:

(i) $a < b \leftrightarrow a^2 < b^2 \leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

(ii) $a \leq b \leftrightarrow a^2 \leq b^2 \leftrightarrow \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

Bukti : latihan

Teorema 2.0-7 Ketaksamaan Bernoulli

$$Jika\ x > -1\ maka\ (1+x)^n \geq 1 + nx\ untuk\ semua\ x \in \boldsymbol{N}$$

Bukti

Diketahui : $x > -1$

Adb **:** $(1+x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua $n \in$ **N**

Bukti : Induksi matematika digunakan dalam membuktikan teorema ini

(i) Untuk n = 1

$(1+x)^1 \geq 1 + x$ pernyataan benar

(ii) Misalkan benar untuk n = k yaitu $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Adb benar untuk $n = k + 1$, yaitu

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x)^1 \geq (1+kx)(1+x)$$
$$= 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k+1)x + kx^2$$

Karena $kx^2 \geq 0$ maka $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$ yang berarti benar untuk $n = k + 1$

Jadi terbukti benar $(1+x)^n \geq 1 + nx$ untuk semua $n \in$ **N**

Teorema 2.0-8 Ketaksamaan Cauchy

Jika $n \in$ **N** dan $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in$ **R** maka $(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n, a_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$ atau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

Selanjutnya jika tidak semua $b_i = 0$ maka $(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i)^2 =$ $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$ jika dan hanya jika terdapat $s \in \mathbf{R}$ sedemikian hingga $a_1 = sb_1, a_2 = sb_2 \cdots, a_n = sb_n$

Bukti :

Didefinisikan fungsi $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sebagai berikut :

$F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + (a_2 - tb_2)^2 + \cdots + (a_n - tb_n)^2 \quad t \in \mathbf{R}$

Jelas bahwa $F(t) \geq 0$ untuk setiap $t \in \mathbf{R}$. Selanjutnya

$$\begin{aligned} F(t) &= (a_1^2 - 2ta_1b_1 + t^2b_1^2) + (a_2^2 - 2ta_2b_2 + t^2b_2^2) + \cdots \\ &\quad + (a_n^2 - 2ta_nb_n + t^2b_n^2) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - 2t(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) + \cdots \\ &\quad + (a_n^2 - 2ta_nb_n + t^2b_n^2) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) - 2t\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) + t^2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \end{aligned}$$

Ingat bahwa $A - 2B + Ct^2 \geq 0$ jika dan hanya $(2B)^2 - 4AC \leq 0$ yang berakibat $B^2 \leq AC$.

Sehingga diperoleh bahwa $(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i)^2 \leq$ $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$..............terbukti

2.3 **Nilai Mutlak dan Garis Bilangan Real**

Definisi 2.0-1

Nilai mutlak dari $a \neq 0$ didefinisikan sebagai nilai positif, seperti pada definisi berikut ini :

$$|a| := \begin{cases} a & \text{jika } a > 0 \\ 0 & \text{jika } a = 0 \\ -a & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

Contohnya : $|5| = 5$ dan $|-7| = 7$. Dapat dilihat dari definisi di atas bahwa $|a| \geq 0$ untuk semua $a \in$ **R** , $|a| = 0$ jika dan hanya jika $a = 0$ dan $|-a| = a$ untuk semua $a \in$ **R.** Berikut ini beberapa teorema mengenai nilai mutlak:

Teorema 2.0-9

(i) $|ab| = |a||b|$ *untuk semua* $a, b \in \boldsymbol{R}$

(ii) $|a|^2 = a^2$ *untuk semua* $a \in \boldsymbol{R}$

(iii) *Jika* $c \geq 0$ *maka* $|a| \leq c$ *jika dan hanya jika* $-c \leq a \leq c$

(iv) $-|a| \leq a \leq |a|$ *untuk semua* $a \in \boldsymbol{R}$

Bukti :

(i) Diket : $a, b \in$ **R**

Adb : $|ab| = |a||b|$

Bukti :

Jika $a = b = 0$ maka terbukti.

Jika $a > 0$ dan $b > 0$ maka $ab > 0$ sehingga $|ab| = ab = |a||b|$

Jika $a < 0$ dan $b < 0$ maka $ab > 0$ sehingga $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$

(ii) Diket : $a \in$ **R**

Adb : $|a|^2 = a^2$

Bukti :

Karena $a^2 \geq 0$ maka $a^2 = |a^2| = |aa| = |a||a| = |a|^2$

(iii) Jika $|a| \leq c$ maka $a \leq c$ dan $-a \leq c$ yang berarti $-c \leq a \leq c$
Sebaliknya jika $-c \leq a \leq c$ maka diperoleh $a \leq c$ dan $-a \leq c$, jadi $|a| \leq c$.

(iv) Latihan

Teorema 2.0-10 Ketaksamaan Segitiga

Jika $a, b \in \boldsymbol{R}$ *maka* $|a+b| \leq |a| + |b|$

Bukti :

Berdasarkan teorema 2.3.1 (iv) diketahui $-|a| \leq a \leq |a|$ dan $-|b| \leq b \leq |b|$. Kedua ketaksamaan tersebut dijumlahkan sehingga diperoleh $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$

Berdasarkan teorema 2.3.1 (iii) diperoleh $|a+b| \leq |a| + |b|$

.................terbukti

Akibat 2.0-2 Jika $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in$ **R** maka

(i) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

(ii) $|a-b| \leq |a| + |b|$

Bukti : latihan

Ketaksamaan segitiga di atas dapat diperluas untuk sebarang bilangan real yang banyaknya berhingga.

Akibat 2.0-3

Jika $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *adalah sebarang bilangan real maka*

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

Bukti : latihan

Contoh 2.0-2

Diberikan fungsi $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{2x-1}$ untuk $x \in [2,3]$. Tentukan konstanta M sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [2,3]$

Jawab : $|f(x)| = \left|\frac{2x^2-3x+1}{2x-1}\right| = \frac{|2x^2-3x+1|}{|2x-1|}$

$|2x^2 - 3x + 1| \leq |2x^2| + |-3x| + |1| = 2|x^2| + 3|x| + 1 \leq 2|3^2| + 3|3| + 1 = 28$ dan

$$|2x - 1| \geq \big||2x| - |1|\big| \geq \big||2(2)| - |1|\big| = 3$$

Sehingga

$$|f(x)| = \left|\frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 1}\right| = \frac{|2x^2 - 3x + 1|}{|2x - 1|} \leq \frac{28}{3}$$

Jadi dengan mengambil $M = \frac{28}{3}$ diperoleh $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [2,3]$

Interpretasi geometri yang dikenal diantaranya adalah garis bilangan real. Pada garis real, nilai mutlak a yang simbolnya $|a|$ dari suatu anggota $a \in \mathbf{R}$ adalah jarak a ke 0. Secara umum, jarak antara anggota *a* dan *b* di **R** adalah $|a - b|$.

Definisi 2.0-3

Diberikan $a \in \boldsymbol{R}$ dan $\varepsilon > 0$. Persekitaran-ε (ε-neighborhood) dari a didefinisikan sebagai himpunan $V_\varepsilon(a) := \{x \in \boldsymbol{R}: |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

Teorema 2.0-11

Diberikan $a \in \boldsymbol{R}$. Jika x berada dalam persekitaran $V_\varepsilon(a)$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $x = a$

Bukti :

Jika x memenuhi $|x-a|<\varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon>0$ maka berdasarkan teorema 1.2.10 diperoleh $|x-a|=0$ yang berakibat $x=a$ (terbukti)

C. Latihan dan Kunci Jawaban

1. Jika $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbf{R}$, tunjukan bahwa :

   (i) $-(a+b)=(-a)+(-b)$.

   (ii) $(-a)(-b)=ab$

   (iii) $-\left({}^{a}/_{b}\right)=\frac{-a}{b}$ jika $b \neq 0$.

   Kunci :

   (i) Diketahui : $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbf{R}$

   Adb : $-(a+b)=(-a)+(-b)$

   Bukti :

   $$-(a+b)=(-1)(a+b)$$
   $$=(-1)a+(-1)b$$
   $$=(-a)+(-b)$$

   (ii) Diketahui : $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$

   Adb : $(-a)(-b)=ab$

   Bukti :

   $$(-a)(-b)=\big((-1)a\big)((-1)=ab$$

2. Selesaikan persamaan berikut.

   (i) $2\mathrm{x}+5=8$.

   (ii) $\mathrm{x}^2=2\mathrm{x}$.

   Kunci :

(i) Tambahkan -5 ke $2x + 5 = 8$ dan gunakan A2, A4, A3 setelah itu kali dengan $\frac{1}{2}$.

(ii) Tulis $x^2 - 2x = x(x - 2) = 0$

3. $a \leq b$ dan $c \leq d$ buktikan $a + c \leq b + d$

Kunci :

Diketahui : $a \leq b$ dan $c \leq d$

Adb : $a + c \leq b + d$

Bukti :

$a \leq b$ maka $a + c \leq b + c \Leftrightarrow (b + c) - (a + c)$ …….(*)

$c \leq d$ maka $b + c \leq b + d \Leftrightarrow (b + d) - (b + c)$……..(**)

Berdasarkan (*) dan (**) maka $a + c \leq b + d$

4. Tunjukan bahwa jika a ∈ **R** dan , n ∈ **N** , maka $a^{m+n} = a^m a^n$ *dan* $(a^m)^n = a^{mn}$.

Kunci :

Gunakan induksi matematika.

5. Jika $a, b \in \boldsymbol{R}$ dan $b \neq 0$, tunjukan bahwa : $|a| = \sqrt{a^2}$

Kunci :

Jika $a \geq 0$ maka $|a| = a = \sqrt{a^2}$

Jika $a < 0$ maka $|a| = -a = \sqrt{a^2}$

D. Rangkuman

Sifat-sifat dasar dari penjumlahan dan perkalian bilangan real dan beberapa sifat yang diturunkan dalam beberapa teorema. Operasi biner pada himpunan bilangan real adalah penjumlahan dan perkalian.

Notasi penjumlahan “+” dan notasi perkalian “.”. Operasi biner tersebut memenuhi sifat-sifat:

(A1) $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$ (komutatif penjumlahan)

(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbf{R}$ (assosiatif penjumlahan)

(A3) Ada $0 \in \mathbf{R}$ dengan $a + 0 = 0 + a = a$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ (identitas penjumlahan)

(A4) Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ ada anggota $-a \in \mathbf{R}$ **dengan** $a + (-a) = 0$ (invers penjumlahan)

(M1) $a.b = b.a$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$ (komutatif perkalian)

(M2) $(a.b).c = a.(b.c)$ untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$ (asosiatif perkalian)

(M3) Ada $1 \in \mathbf{R}$ dengan $a.1 = 1.a = a$ untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ (identitas perkalian)

(M4) Untuk setiap $a \in \mathbf{R}$ sedemikian hingga $a \neq 0$ ada anggota $\frac{1}{a} \in \mathbf{R}$ dengan

$a.\frac{1}{a} = 1$ (invers perkalian)

(D) $a.(b + c) = a.c + b.c$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbf{R}$ (distributif perkalian terhadap penjumlahan)

Operasi biner yang lain seperti pengurangan didefinisikan sebagai invers dari operasi penjumlahan yaitu $a - b := a + (-b)$ untuk setiap a,b bilangan real. Sama juga dengan operasi pembagian merupakan invers dari operasi perkalian yaitu $\frac{a}{b} := a.\frac{1}{b}$

Kesepakatan untuk notasi perkalian a.b cukup dituliskan ab dan penulisan a^2 untuk aa, a^3 untuk $(a^2)a$ dan secara umum didefinisikan

$a^{n+1} := (a^n)a$ untuk setiap n $\in$**N**. Lebih lanjut $a^1 = a$ dan jika $a \neq 0$ maka dapat ditulis $a^0 = 1$ dan a^{-1}untuk $\frac{1}{a}$ dan jika n $\in$**N** dapat ditulis a^{-n} untuk $\left(\frac{1}{a}\right)^n$.

Himpunan bilangan asli (**N**) dan himpunan bilangan bulat (**Z**) adalah himpunan bagian dari himpunan bilangan real **R**. Anggota himpunan bilangan real yang dapat ditulis dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a dan b $\in$ **Z** dan $a \neq 0$ disebut dengan bilangnan rasional (**Q**). Akan tetapi tidak semua anggota bilangan real adalah bilangan rasional contohnya $\sqrt{2}$ yang disebut dengan bilangan irrasional.

Ada himpunan **P** yang merupakan himpunan bagian dari **R** yang memenuhi tiga sifat berikut :

(i) *Jika* $a, b \in \boldsymbol{P}$ *maka* $a + b \in \boldsymbol{P}$

(ii) *Jika* $a, b \in \boldsymbol{P}$ *maka* $a.b \in \boldsymbol{P}$

(iii) *Untuk setiap* $a \in \boldsymbol{R}$ *hanya ada satu yang memenuhi* $a \in \boldsymbol{P}$ *atau* $-a \in \boldsymbol{P}$ *atau* $a = 0$

Sifat pertama dan kedua merupakan sifat tertutup **P** terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Sifat ketiga disebut dengan sifat trikotomi sehingga membagi himpunan bilangan real ke dalam tiga jenis anggota yang berbeda. Jika $a \in$**P** ditulis $a > 0$ artinya a adalah bilangan real positif. Jika $a \in$**P** $\cup \{0\}$ ditulis $a \geq 0$ artinya a adalah bilangan real nonegatif. Jika $-a \in$**P** ditulis a > 0 artinya a adalah bilangan real negatif. Jika $-a \in$**P** $\cup \{0\}$ ditulis $a \geq 0$ artinya a adalah bilangan real nonpositif. Jika $a - b \in$ P maka ditulis $a > b$ atau $b < a$ .Jika $a - b \in$ P $\cup \{0\}$

maka ditulis $a \geq b$ atau $b \leq a$. Sifat trikotomi di atas berakibat bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbf{R}$ hanya memenuhi satu keadaan dari $a < b$ atau $b < a$ atau $a = b$. Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ maka $a = b$. Jika $a < b < c$ maka artinya $a < b$ dan $b < c$.

Nilai mutlak dari $a \neq 0$ didefinisikan sebagai nilai positif, seperti pada definisi berikut ini : $|a| := \begin{cases} a & \text{jika } a > 0 \\ 0 & \text{jika } a = 0 \\ -a & \text{jika } a < 0 \end{cases}$

Diberikan $a \in \mathbf{R}$ dan $\varepsilon > 0$. Persekitaran-ε (ε-neighborhood) dari a didefinisikan sebagai himpunan $V_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbf{R}: |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

E. Tes Formatif 1

Pilihlah salah satu sebagai jawaban yang tepat menurut kalian

1. Pernyataan berikut ini menggunakan sifat A4 dalam membuktikan kebenarannya…
   a. $-(1)a = a$
   b. $-(-a) = a$
   c. $(-1)(-1) = 1$
   d. $a + b = 0 \; maka \; a = -b$
2. Pernyataan berikut ini adalah benar, kecuali…
   a. $(-a) + (-b) = -(a + b)$
   b. $(-a) + (-b) = -(1)(a + b)$
   c. $(a) + (-b) = (a - b)$
   d. $(-a) + (-b) = -(-1)(a + b)$
3. Bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{1}{x} < x$ adalah…
   a. $x > 1$

b. $x \geq 1$

c. $x < 1$

d. $x \leq 1$

4. Jika $|x - y| + |y - z| = |x - z|$ maka …

   a. $x \leq y < z$

   b. $x \leq y \leq z$

   c. $x < y < z$

   d. $y \leq x \leq z$

5. Persekitaran $U(a) \cap V(b)$ yang mungkin adalah, kecuali…

   a. $U(a)$

   b. $V(b)$

   c. $U(a - b)$

   d. $\emptyset$

Cocokkanlah jawaban kalian untuk soal-soal di atas dengan kunci jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitung jumlah jawaban yang benar dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui penguasaan kalian terhadap materi Kegiatan Belajar 3

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{10} x\ 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai:

90% - 100%	Baik sekali
80% - 89%	Baik
70% - 79%	Cukup
< 70%	Kurang

Kalau kalian belum memcapai penguasaan minimal 80% sebaiknya ulangi kegiatan belajar 3 terutama bagian yang belum dikuasai, tetapi jika sudah mencapai penguasaan minimal 80% maka lanjutkan belajar ke kegiatan selanjutnya.

F. Kegiatan Belajar 2

2.1 **Sifat Lengkap Bilangan Real**

Berikut ini diperkenalkan istilah supremum dan infimum dari suatu himpunan bilangan real.

Definisi 2.1-1 *Diberikan* $\boldsymbol{S}$ *himpunan bagian tak kosong dari* **R**

(i) *Himpunan* S *dikatakan terbatas ke atas jika terdapat suatu bilangan* $u \in \boldsymbol{R}$ *sedemikian hingga* $s \leq u$ *untuk semua* $s \in S$ *. Setiap bilangan u disebut dengan batas atas dari S.*

(ii) *Himpunan* S *dikatakan terbatas ke bawah jika terdapat suatu bilangan* $w \in \boldsymbol{R}$ *sedemikian hingga* $w \leq s$ *untuk semua* $s \in S$ *. Setiap bilangan w disebut dengan batas bawah dari S.*

(iii) *Suatu himpunan dikatakan terbatas jika terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Jika tidak, maka dikatakan tidak terbatas.*

Contoh 2.1-1

1. $A = \{1,2,3\}$ merupakan himpunan terbatas karena terbatas ke atas karena ada bilangan $u \in$ **R** sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$ dan terbatas ke bawah karena terdapat suatu bilangan $w \in$ **R** sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$.
2. $B = \{x \in \mathrm{R}: x < 2\}$ merupakan himpunan tidak terbatas karena tidak terbatas ke bawah karena tidak ada bilangan $w \in$ **R** sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$.

3. **R** merupakan himpunan tidak terbatas karena tidak terbatas ke atas dan tidak terbatas ke bawah

Definisi 2.1-2 *Diberikan himpunan S himpunan bagian dari himpunan bilangan real dan S merupakan himpunan tak kosong maka*

(i) *Jika S terbatas ke atas maka suatu bilangan u disebut supremum (batas atas terkecil) dari S jika memenuhi kondisi berikut.*

   (1) *u batas atas S*

   (2) *Jika ada v batas atas dari S maka* $u < v$

   ditulis $u = supS$

   Supremum dari suatu himpunan tunggal

(ii) *Jika S terbatas ke bawah maka suatu bilangan u disebut infimum (batas bawah terbesar) dari S jika memenuhi kondisi berikut.*

   (1) *u batas bawah S*

   (2) *Jika ada v batas bawah dari S maka* $v < u$

   ditulis $u = infS$

Suatu himpunan bagian tak kosong $S \subset$ **R** mempunyai empat kemungkinan, yaitu:

(i) Mempunyai supremum dan infimum,

(ii) Hanya mempunyai supremum,

(iii) Hanya mempunyai infimum,

(iv) Tidak mempunyai infimum dan supremum

Setiap bilangan real $a \in$ **R** merupakan batas atas dan sekaligus juga merupakan batas bawah himpunan kosong $\emptyset$. Jadi, himpunan $\emptyset$ tidak mempunyai supremum dan infimum

Lemma 2.1-1 *Suatu bilangan u merupakan supremum dari himpunan bagian dari himpunan bilangan real jika dan hanya jika u memenuhi kondisi berikut:*

(i) $s \leq u$ *untuk semua* $s \in S$,

(ii) *Jika* $v < u$, *maka terdapat* $s' \in S$ *sedemikian hingga* $v < s'$.

Lemma 2.1-2 *Diberikan S himpunan bagian tak kosong R*

(i) $u = \sup S$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $s_1 \in S$ *sedemikian hingga* $u - \epsilon < s_1$.

(ii) $w = \inf S$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $s_2 \in S$ *sedemikian hingga* $w + \varepsilon > s_2$.

Bukti :

(i) Diketahui : $u = \sup S$ dan diberikan $\varepsilon > 0$.

Adb : terdapat $s_1 \in S$ sedemikian hingga $u - \epsilon < s_1$

Bukti : karena $u - \varepsilon < u$, maka $u - \varepsilon$ bukan merupakan batas atas S. Oleh karena itu, terdapat $s_1 \in S$ yang lebih besar dari $u - \varepsilon$, sehingga $u - \varepsilon < s_1$ ……..(*)

Diketahui : $w = \inf S$ dan diberikan $\varepsilon > 0$.

Adb : terdapat $s_2 \in S$ sedemikian hingga $u - \varepsilon < s_2$.

Bukti : Jika u merupakan batas atas S, dan jika memenuhi $v < u$, maka diambil $\varepsilon = u - v$. Maka jelas $\varepsilon > 0$,dan diperoleh bahwa $u = \sup S$….(**)

Berdasarkan (*) dan (**) maka lemma 2.4.2 terbukti

(ii) Latihan

Contoh 2.1-2

1. Jika suatu himpunan tak kosong S_1 mempunyai anggota sebanyak berhingga, maka dapat dilihat bahwa S_1 mempunyai anggota terbesar, namakan *u*, dan anggota terkecil, namakan *w*. Maka *u* = sup S_1 dan *w* = inf S_1, dan keduanya merupakan anggota S_1.
2. Himpunan $S_2 := \{x : 0 \le x \le 1\}$ mempunyai batas atas 1. Akan dibuktikan bahwa 1 merupakan supremumnya. Jika *v* < 1, maka terdapat $s' \in S_2$ sedemikian hingga *v* < s'. Oleh karena itu, *v* bukan merupakan batas atas S_2 dan karena *v* merupakan sebarang *v* < 1, maka dapat disimpulkan bahwa sup S_2 = 1. Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa inf S_2 = 0.

Akan ditunjukkan bahwa himpunan bagian tak kosong **R** yang terbatas ke atas pasti mempunyai batas atas terkecil. Sifat seperti ini disebut Sifat Lengkap **R.**

Teorema 2.1-1 Sifat Lengkap Bilangan Real

Jika himpunan bagian tak kosong S $\subseteq$ **R** *yang terbatas ke atas, maka supremumnya ada, yaitu terdapat u* ∈ **R** *sedemikian hingga* $u = \sup S$ *. Sifat ini juga disebut Sifat Supremum* ***R***

Akibat 2.1-1

Jika himpunan bagian tak kosong S $\subseteq$ **R** *terbatas ke bawah, maka infimumnya ada, yaitu terdapat w* ∈ **R** *sedemikian hingga* $w = \inf\ S$.

Bukti :

Misalkan himpunan T terbatas ke bawah, $T \subseteq \mathbf{R}$. Dibentuk himpunan $S = \{-t : t \in T\}$, maka S terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut Sifat Lengkap bilangan real, sup S pasti ada, misalkan dinamakan $u = \sup S$, maka $-u = \inf T$.

2.2 **Aplikasi Sifat Supremum Bilangan Real**

Pada subbab ini dibahas beberapa akibat dari sifat supremum **R**.

Teorema 2.2-1

Diberikan himpunan bagian tak kosong $S \subseteq \mathbf{R}$ yang terbatas ke atas dan sebarang $a \in \mathbf{R}$. Jika didefinisikan $a + S \coloneqq \{a + s : s \in S\}$, maka berlaku sup $(a + S) = a +$ sup (S).

Bukti :

Jika diberikan $u \coloneqq \sup S$, maka $x \leq u$ untuk semua $x \in S$, sehingga $a + x \leq a + u$. Oleh karena itu, $a + u$ merupakan batas atas dari himpunan $a + S$. Akibatnya sup $(a + S) \leq a + u$ … (i)

Selanjutnya, misalkan v adalah sebarang batas atas $a + S$, maka $\alpha + x \leq v$ untuk semua $x \in S$. Akibatnya $x \leq v - a$ untuk semua $x \in S$, sehingga $v - a$ merupakan batas atas S. Oleh karena itu, $u = \sup S \leq v - a$. Karena v adalah sebarang batas atas $a + S$, maka dengan mengganti v dengan $u = \sup S$, diperoleh $a + u \leq \sup (a + S)$ … (ii)

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti bahwa sup $(a + S) = a + u = a + \sup S$.

Teorema 2.2-2

Diberikan himpunan bagian tak kosong $S \subseteq \mathbf{R}$ *yang terbatas dan sebarang bilangan real a > 0. Didefinisikan himpunan* $aS := \{as : s \in S\}$ *, maka berlaku* $inf\left(aS\right) = a\inf\left(S\right)$.

Bukti :

Misalkan $u = \inf aS$ dan $v = \inf S.$ Akan dibuktikan bahwa $u = av.$ Karena $u = \inf aS$, maka $u \le as$,untuk setiap $s \in S.$ Karena $v = \inf S$, maka $v \le s$ untuk setiap $s \in S.$ Akibatnya $av = as$ untuk setiap $s \in S.$ Berarti av merupakan batas bawah aS . Karena u batas bawah terbesar aS , maka $av \le u$. Karena $u \le as$ untuk setiap $s \in S$, maka diperoleh $\frac{u}{a} \le s$ untuk setiap $s \in S$ (sebab a > 0). Karena $v = \inf S$, maka $\frac{u}{a} \le v$ yang berakibat $u \le av$. Di lain pihak diketahui $av \le u$. Akibatnya $u \le av$. Jadi, terbukti bahwa inf $\left(aS\right)$= $a\inf\left(S\right)$.

Teorema 2.2-3

Jika A dan B himpunan bagian tak kosong R dan memenuhi $a \le b$ *untuk semua* $a \in A$ *dan* $b \in B$*, maka sup* $A \le \inf B$.

Bukti :

Diambil sebarang $b \in B$, maka $a \le b$ untuk semua $a \in A$. Artinya bahwa b merupakan batas atas A, sehingga sup $A \le b$. Selanjutnya, karena berlaku untuk semua $b \in B$,maka sup A merupakan batas bawah B. Akibatnya diperoleh bahwa sup $A \le \inf B$.

Berikut ini diberikan salah satu sifat yang mengaitkan hubungan antara bilangan real dan bilangan asli. Sifat ini menyatakan bahwa apabila diberikan sebarang bilangan real x ,maka selalu dapat ditemukan suatu bilangan asli n yang lebih besar dari x .

Teorema 2.2-4 Sifat Archimedes

Jika $x \in \mathbf{R}$, *maka terdapat* $n \in \mathbf{N}$ *sedemikian hingga* $x < n$.

Bukti :

Ambil sebarang $x \in \mathbf{R}$. Andaikan tidak ada $n \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga $x < n$, maka $n \leq x$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Dengan kata lain, x merupakan batas atas $\mathbf{N}$. Jadi, $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{N} \neq \emptyset$, dan $\mathbf{N}$ terbatas ke atas. Menurut sifat supremum,maka sup $\mathbf{N}$ ada, tulis $u = \sup \mathbf{N}$. Karena $u - 1 < u$, maka terdapat $m \in \mathbf{N}$ dengan sifat $u - 1 < m$. Akibatnya $u < m + 1$ dengan $m + 1 \in \mathbf{N}$. Akibatnya kontradiksi dengan $u = \sup \mathbf{N}$. Berarti u batas atas $\mathbf{N}$, yaitu ada $m + 1 \in \mathbf{N}$ sehingga $u < m + 1$ (bukan u bukan batas atas $\mathbf{N}$). Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah ada $n \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga $x < n$.

Akibat 2.2-1

Jika $S := \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$ *,maka* $inf\ S = 0$.

Bukti :

Karena $S \neq \emptyset$ terbatas ke bawah oleh 0, maka S mempunyai infimum, tulis $w := \inf S$.

Jelas bahwa $w \geq 0$. Untuk sebarang > 0 , menggunakan Sifat Archimedes, terdapat $n \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon} < n$, akibatnya $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa $0 \leq w \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$. Akan tetapi karena

$\varepsilon > 0$ sebarang, maka berdasarkan teorema berakibat bahwa $= 0$. Terbukti bahwa $\inf S = 0$.

Akibat 2.2-2

Jika $t > 0$ *, maka terdapat* $n_t \in$ **N** *sedemikian hingga* $0 < \frac{1}{n_t} < t$.

Bukti :

Karena inf $\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\} = 0$ dan t >0 , maka t bukan batas bawah himpunan $\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ Akibatnya terdapat $n_t \in$ **N** sedemikian hingga $0 < \frac{1}{n_t} < t$.

Akibat 2.2-3

Jika y > 0, maka terdapat n∈**N** *sedemikian hingga* $n_y - 1 < y < n_y$.

Bukti :

Sifat Archimedes menjamin bahwa himpunan bagian $E_y \coloneqq \{m \in$ **N**$: y < m\}$ dari **N** tidak kosong. Menggunakan Sifat Urutan, E_y mempunyai anggota yang paling kecil, yang dinotasikan dengan n_y. Oleh karena itu, $n_y - 1$ bukan anggota E_y. Akibatnya diperoleh bahwa $n_y - 1 < y < n_y$.

Salah satu penggunaan Sifat Supremum adalah dapat digunakan untuk memberikan jaminan eksistensi bilangan-bilangan real. Berikut ini akan ditunjukkan bahwa ada bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$.

Teorema 2.2-5

Ada bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$.

Bukti :

Dibentuk himpunan $S = \{s \in \mathbf{R} : s \geq 0 \; dan \; s^2 < 2\}$. Jelas bahwa $S \neq \emptyset$ sebab $0 \in S$ dan $1 \in S$. S terbatas ke atas dengan salah satu batas atasnya adalah 2. Jika $t \geq 2$, maka $t^2 \geq 4$. Jadi, $t = 2 \notin S$. Menggunakan Aksioma Supremum, $S \subseteq \mathbf{R}$, $S \neq \emptyset$, dan S terbatas ke atas, maka S mempunyai supremum. Namakan $x = \sup S$, dengan $x \in \mathbf{R}$. Akan dibuktikan bahwa $x^2 = 2$. Andaikan $x^2 \neq 2$, maka $x^2 < 2$ atau $x^2 > 2$.

Kemungkinan I:

Untuk $x^2 < 2$.

Karena $x^2 < 2$, maka $2 - x^2 > 0$. Karena $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$, maka

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{n}x + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{1}{n}(2x + 1) .$$

Karena $2 - x^2 > 0$ dan $2x + 1 > 0$, maka $\frac{2-x^2}{2x+1} > 0$. Menurut akibat Sifat Archimedes, dapat ditemukan $n \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{n} < \frac{2- x^2}{2x+1}$. Akibatnya, $\frac{1}{n}(2x + 1) < 2 - x^2$ dan $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < x^2 + \frac{1}{n}(2x + 1) < x^2 + 2 - x^2 = 2$. Diperoleh bahwa $\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$, yang berarti bahwa $+\frac{1}{n} \in S$. Kontradiksi dengan $x = \sup S$. Oleh karena itu tidak mungkin $x^2 < 2$.

Kemungkinan II:

Untuk $x^2 > 2$.

Karena $x^2 > 2$, maka $x^2 - 2 > 0$. Perhatikan bahwa $\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 = x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} > x^2 - \frac{2x}{m}$. Karena $x^2 - 2 > 0$ dan $2x > 0$, maka dipilih $m \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga

$$m > \frac{2x}{x^2-2} \text{ atau } \frac{2x}{m} < x^2 - 2 \text{ .}$$

Akibatnya $\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 > x^2 - \frac{2x}{m} > x^2 - (x^2 - 2) = 2$. Diperoleh bahwa $\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 > 2$. Berarti $x - \frac{1}{m} \notin S$, yaitu $x - \frac{1}{m}$ batas atas. Kontradiksi dengan $x = \sup S$. Oleh karena itu tidak mungkin $x^2 > 2$.

Jadi pengandaiannya salah, yang benar adalah $x^2 = 2$.

Jadi terbukkti ada bilangan real positif x sedemikian hingga $x^2 = 2$.

Teorema 2.2-6 Densitas

Jika $x, y \in R$ dengan $x < y$, maka ada bilangan rasional $q \in \mathbb{Q}$ sedemikian hingga $x < q < y$.

Bukti :

Dengan tidak mengurangi keumuman (*without loss of generality*), di ambil $< y$, maka $y > 0$. Akibatnya1/(y-x)>0 , sehingga dapat dipilih n$\in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $n > \frac{1}{y-x}$

Untuk *n* di atas, berlaku *ny-nx*>1,yaitu *nx+1<ny*. Karena $x > 0$, makadapat di pilih $m \in \mathbb{N}$ sehingga $m - 1 \leq nx < m$. Bilangan m di atas juga memenuhi *m<ny*, sebab dari $m - 1 \leq nx$, diperoleh $m \leq nx + 1 < ny$. Jadi $nx < m < ny$. Akibatnya untuk $q = \frac{m}{n}$ mempunyai sifat

$x < \frac{m}{n} = q < y$. Jadi terdapat bilangan rasional $q = \frac{m}{n}$ dengan sifat $x < q < y$.

Berikut ini diberikan akibat Teorema Densitas, yaitu diantara dua bilangan real pasti dapat ditemukan bilangan irrasional.

Akibat 2.2-4

*Jika $x, y \in$ **R** dengan $x < y$, maka ada bilangan irrasional r sedemikian hingga $x < r <$*

Bukti :

Menggunakan Teorema Densitas, ada bilangan real $\frac{x}{\sqrt{2}}$ dan $\frac{y}{\sqrt{2}}$ dengan bilangan rasional q dengan sifat $\frac{x}{\sqrt{2}} <$ q $< \frac{y}{\sqrt{2}}$. Akibatnya, $x < q\sqrt{2} < y$ dan $q\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional.

2.3 Interval Pada Bilangan Real

Jika $a, b \in \boldsymbol{R}$,dengan $a < b$, maka interval terbuka yang ditentukan oleh *a* dan *b* adalah himpunan $(a, b) := \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$. Titik *a* dan *b* disebut titik ujung interval. Titik ujung tidak termuat dalam interval terbuka. Jika kedua titik ujung digabungkan ke interval terbukanya, maka disebut interval tertutup, yaitu himpunan $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} := a \leq x \leq b\}$. Interval setengah terbuka atau setengah tertutup ditentukan oleh a dan *b* adalah [a, b) yang mana memuat titik ujung *a* dan (*a* , b] yang mana memuat titik ujung *b*.

Masing – masing dari empat interval ini adalah terbatas dan mempunyai panjang yang didefinisikan dengan *b* – *a*. Jika *a* = *b*, maka interval terbukanya berkorespodensi dengan himpunan kosong (a, a) =

$\emptyset$. Sedangkan interval tertutupnya berkorespodensi dengan himpunan *singleton* $[a, a] = \{a\}$.

Berikut ini diberikan lima jenis interval tidak terbatas yang mana lambang ∞ (atau $+\infty$) dan $-\infty$ digunakan sebagai simbol titik ujungnya yang tak berhingga. Interval terbuka tak terbatas adalah himpunan dengan bentuk

$$(a, \infty):= \{x \in \mathbf{R} : x > a \} \text{ dan } (-\infty, b) := \{ x \in \mathbf{R} : x < b \}.$$

Himpunan pertama tidak mempunyai batas atas dan yang kedua tidak mempunyai batas bawah. Jika diberikan gabungan titik ujung maka disebut interval tertutup tak terbatas

$$(a, \infty] : = \{ x \in \mathbf{R} : a \leq x \} \text{ dan } (- \infty, b] : = \{ x \in \mathbf{R} : x \leq b \}$$

Jadi **R** adalah interval tidak terbatas dalam hal ini ditulis $(-\infty, \infty) := \mathbf{R}$. Tidak ada titik ujung dari $(-\infty , \infty)$.

Berikut ini teorema mengenai karakteristik suatu interval.

Teorema 2.3-1 Teorema Karakteristik Interval

Jika S adalah suatu himpunan bagian dari **R** *yang mempunyai paling sedikit dua titik dan mempunyai sifat jika x, y* $\in$ *S dan x¸ y maka [x, y]* $\subseteq$ *S maka S adalah sebuah interval.*

Bukti :

Ada empat hal untuk dipertimbangkan: (i) *S* adalah terbatas, (ii) *S* terbatas ke atas tetapi tidak terbatas ke bawah, (iii) *S* terbatas ke bawah tetapi tidak terbatas ke atas, dan (iv) *S* tidak terbatas ke bawah maupun ke atas.

Kasus (i)

Karena S terbatas maka ada sup dan inf, misal a := inf s dan b : = sup S, maka $S \subseteq [a, b]$ dan akan ditunjukkan bahwa $(a, b) \subseteq S$. Jika a < z < b, maka z bukan batas bawah dari S, karena disini ada $x \in S$ dengan x < z. z juga bukan batas atas dari S, karena ada y ∈S dengan z < y. Oleh sebab itu $z \in [x, y]$, karena sifat teorema karakteristik interval bahwa $z \in S$.Maka z adalah anggota sebarang dari (a , b), kita simpulkan bahwa (a,b) ⊆ S. Sekarang jika $a \in$ S,dan $b \in$ S, maka S = [a, b]. Jika $a \notin S$ dan $b \notin S$ $m$aka $S = (a, b)$. Kemungkinan yang lainnya adalah $S = (a , b]$ atau $S = [a\ b)$

Kasus (ii)

Misal $b := \sup S$ maka $S \subseteq (-\infty, b]$ dan akan ditunjukkan bahwa $(-\infty,, b) \subseteq S$. Jika untuk z < b,maka disini ada x , $y \in$ S sehingga z ∈ $[x, y]$ ⊆ S. (Mengapa?). Meskipun $(-\infty, b)$ ⊆ S. Jika b∈ S, maka S =(-∞, b], dan jika b∉ S, maka S: (-∞, b).

Kasus (iii.) dan (iv.) latihan.

Suatu himpunan himpunan bagian dari himpunan bilangan real dikatakan terbuka atau tertutup berdasarkan definisi di bawah ini.

Definisi 2.3-1

(i) *Himpunan $G \subseteq$ **R** dikatakan **terbuka** dalam **R** jika untuk setiap $x \in G$, terdapat persekitaran $V_\varepsilon(x)$ sedemikian hingga $V_\varepsilon(x) \subset G$.*

(ii) *Himpunan $F \subseteq$ **R** dikatakan **tertutup** dalam **R** jika komplemen F, yaitu F^c terbuka dalam* **R**.

Contoh 2.3-1

1. Himpunan **R** = (-∞,∞) terbuka, sebab untuk setiap $x \in$ **R**, terdapat $V_1(x) = (x-1, x+1) \subseteq$ **R**.
2. Himpunan $A = (0,1)$ terbuka, sebab jika diambil $\varepsilon = min\left\{\frac{x}{2}, \frac{x-1}{2}\right\}$ untuk setiap $x \in A$, maka $V_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq A$.
3. Himpunan $B = [1,2]$ tertutup, sebab jika diambil $x = 1$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0, V_\varepsilon(1) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \nsubseteq B$ dan $1-\varepsilon \notin B$. Dapat ditunjukkan juga bahwa B^c terbuka, yaitu $B^c = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ terbuka.

Teorema 2.3-2 Sifat Himpunan Terbuka

(i) *Jika A himpunan indeks (finit atau infinit) dan* G_λ *terbuka untuk setiap* $\lambda \in A$, *maka* $\bigcup_{\lambda \varepsilon A} G_\lambda$ *terbuka.*

(ii) *Jika* $G_1, G_2, \cdots G_n$ *masing-masing merupakan himpunan terbuka, maka* $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ *terbuka.*

Bukti :

(i) Diketahui : A himpunan indeks (finit atau infinit) dan G_λ terbuka untuk setiap $\lambda \in A$

Adb : $\bigcup_{\lambda \varepsilon A} G_\lambda$ terbuka

Bukti :

Namakan $G = \bigcup_{\lambda \epsilon A} G_\lambda$ merupakan himpunan indeks (infinit) Diambil sebarang $x \epsilon G$, maka terdapat $\lambda_0 \epsilon A$ sedemikian hingga $x \epsilon G_{\lambda_0}$. Karena G_{λ_0}terbuka, maka terdapat $V_\varepsilon (x) \subset G_0 \subset$ G. Jadi, telihat bahwa untuk setiap $x \in G$, terdapat $V_\varepsilon (x) \subset G$ berarti $G = \bigcup_{\lambda \epsilon \mathrm{A}} G_\lambda$terbuka (terbukti).

(ii) Diketahui : A himpunan indeks (finit atau infinit) dan G_λ terbuka untuk setiap $\lambda \in A$

Adb : $\bigcup_{\lambda \varepsilon A} G_\lambda$ terbuka

Bukti :

Namakan $H = .\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ .Akan dibuktikan bahwa H terbuka. Ambil sebarang $x \epsilon H$, maka $x \epsilon G_i$, untuk setiap i =1,2,…,n . Karena $x \epsilon G_1$ dan G_1 terbuka, maka terdapat $\varepsilon_1 > 0$ sehingga $V_{\varepsilon_1}(x) \subset G_1$. Karena $x \epsilon G_2$ dan G_2 terbuka, maka terdapat $\varepsilon_2 > 0$ sehingga $V_{\varepsilon_2}(x) \subset G_2$. Demikian seterusnya.

Karena $x \epsilon G_n$ dan G_n terbuka, maka terdapat $\varepsilon_n > 0$ sehingga $V_{\varepsilon_n}(x) \subset G_n$. Namakan $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$, jelas bahwa $\varepsilon > 0$. Maka $V_\varepsilon (x) \subset V_{\varepsilon_i}(x) \subset G_i$ untuk setiap i yang berakibat bahwa $V_\varepsilon (x) \subset H = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ artinya bahwa $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ terbuka.

(terbukti)

Berikut ini diberikan akibat dari sifat himpunan terbuka, yaitu sifat untuk himpunan tertutup.

Akibat 2.3-1

(i) *Jika A himpunan indeks (finit atau infinit) dan G_λ tertutup untuk setiap $\lambda \epsilon A$, maka $\bigcup_{\lambda \epsilon A} G_\lambda$ $tertutup$.*

(ii) *Jika $G_1, G_2, \cdots G_n$ masing – masing merupakan himpunan tertutup, maka $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ tertutup.*

Berikut ini akan diperkenalkan mengenai interval bersarang. Suatu barisan dari interval $In, n \in \mathbb{N}$,adalah interval bersarang jika barisan interval memenuhi ketentuan:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$$

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$$

Contoh 2.3-2

1. Jika $I_n := [0, \frac{1}{n}]$ untuk $n \in N$.maka $I_n \supseteq I_{n+1}$ untuk setiap n ∈ N jadi barisan ini adalah interval bersarang. Dalam kasus ini, 0 merupakan anggota untuk setiap I_n yang ditulis $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$.
2. Jika $J_n := (0, \frac{1}{n})$ untuk n $\in \mathbb{N}$, maka barisan ini adalah interval bersarang,tetapi tidak mempunyai titik irisan dari setiap intervalnya.

Berikut ini suatu sifat dari interval bersarang yang tertutup dan terbatas.

Teorema 2.3-3

Jika $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in$ **N** *suatu barisan bersarang dari interval tertutup terbatas maka ada bilangan $\xi \in$* **N** *sedemikian sehingga $\xi \in I_n$ untuk setiap $n \in$* **N.**

Georg Cantor tahun 1874 telah membuktikan bahwa himpunan bilangan real tiak *countable* dengan menggunakan representasi desimal dari bilangan real dengan menggunakan sifat dari interbersarang tertutup dan terbatas. Membahas materi ini cukup dengan menggunakan bilangan real antara 0 dan 1.

Pertama-tama akan dibahas reperesentasi biner yang membentuk barisan interval bersarang yang anggotanya terdiri dari 0 atau 1.Interval [0,1] dibagi dua sama panjang maka jika x $\neq \frac{1}{2}$ termasuk kesub interval kiri $[0, \frac{1}{2}]$, ambil $a_1 := 0$, sementara jika x termasuk subinterval kanan , a_1 = l.Jika $x = \frac{1}{2}$, maka kita boleh mengambil 0 atau 1 sehingga diperoleh interval baru yaitu $\frac{a_1}{2} \leq x \leq \frac{a_1+1}{2}$. Prosedur dilanjutkan dengan membagi dua interval $[\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}(a_1 + 1)]$ jika x adalah bukan titik tengah dan merupakan anggota subinterval kiri maka ambil $a_2 := 0$, dan jika x anggota subinterval kanan ambil $a_2 := 1$. Jika x pada titik-titik bagi maka dapat mengambil a_2 untuk menjadi salah satu dari 0 atau 1 yang membentuk interval baru lagi : $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2+1}{2^2}$

Prosedur bagi dua sama panjang dilanjutkan n pembagian maka akan membetuk interval : $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} \leq x \leq \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n+1}{2^n}$

Jika x *adalah* titik bagi maka $x = {}^{m}/_{2^n}$ dengan m bilangan ganjil. Diberikan contoh, jika $x = \frac{3}{4}$, maka dua ke mungkinan barisan adalah 1,0, l, l, l, ... dan 1,1,0,0,0. . .

Ditulis $\frac{3}{4} = (0,10111\ldots)_2$ dan $\frac{3}{4} = (0,11000\ldots)_2$. Jadi $\frac{3}{4} = (0,10111\ldots)_2 = (0,11000\ldots)_2$

Representasi desimal dari bilangan real adalah hampir sama dengan representasi biner dengan membagi interval menjadi 10 bagian sama panjang yang anggota barisannya adalah 0,1,2,3,4,5,6,7,8 atau 9.

G. Latihan dan Kunci Jawaban

1. Diberikan $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Apakah S mempunyai batas bawah dan batas atas? Apakah inf S dan sup S ada? Buktikan jawabanmu.

   Kunci :

Himpunan batas bawah S adalah $\{x\epsilon\mathbf{R}: x \leq 0\}$. Karena $x \geq 0$ untuk setiap x anggota S maka $u = 0$ marupakan batas bawah S akan adt u batas bawah terbesar yaitu jika $v > 0$ maka v bukan batas bawah S karena ada $\frac{v}{2} \in S$ dan $\frac{v}{2} < v$ dkl $u = infS$. Untuk $x \geq 0$ maka $x + 1 \in S$ artinya x bukan batas atas S.

Jadi S tidak punya sup.

2. Diberikan $\mathrm{T} \coloneqq \{1 - (-1)^{\mathrm{n}} : \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$. carilah $inf\ T$dan $sup\ T$.

   Kunci :

   $inf\ T = 0$ dan $sup\ T = 2$

3. Jika $\mathrm{I}' := [a,b]$danI$' := [a',b']$ interval tertutup dalam $\mathbb{R}$, tunjukan bahwa $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{I}'$jika dan hanya jika $a' \leq a$ dan$b \leq b'$

   Kunci :

   $[a, b]$ merupakan himpunan bagian dari $[a', b']$ jika dan hanya jika

$$a' \leq a \leq b \leq b'$$

4. Tentukan bilangan rasional dengan desimal adalah 1,25137…137…

   Kunci :

   $\frac{31253}{24975}$

H. Rangkuman

Diberikan S himpunan bagian tak kosong dari **R.** Himpunan S dikatakan terbatas ke atas jika terdapat suatu bilangan $u \in \mathbf{R}$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan u disebut dengan batas atas dari S.Himpunan S dikatakan terbatas ke bawah jika terdapat suatu bilangan $w \in \mathbf{R}$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan *w* disebut dengan batas bawah dari *S*.Suatu himpunan dikatakan terbatas jika terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Jika tidak, maka dikatakan tidak terbatas.

Jika *S* terbatas ke atas maka suatu bilangan *u* disebut supremum (batas atas terkecil) dari *S* jika memenuhi kondisi berikut : *u* batas atas *S*, Jika ada *v* batas atas dari *S* maka $u < v$. Ditulis $u = \sup S$. Supremum dari suatu himpunan tunggal. Jika *S* terbatas ke bawah maka suatu bilangan *u* disebut infimum (batas bawah terbesar) dari *S* jika memenuhi kondisi berikut : *u* batas bawah *S* , jika ada *v* batas bawah dari *S* maka $v < u$, ditulis $u = infS$.

Suatu himpunan bagian tak kosong $S \subset \mathbf{R}$ empunyai empat kemungkinan,yaitu: mempunyai supremum dan infimum, hanya mempunyai supremum, hanya mempunyai infimum, tidak mempunyai infimum dan supremum. Setiap bilangan real $a \in \mathbf{R}$ merupakan batas atas dan sekaligus juga merupakan batas bawah himpunan kosong $\emptyset$. Jadi, himpunan $\emptyset$ tidak mempunyai supremum dan infimum.

Jika $a, b \in \mathbb{R}$,dengan $a < b$, maka interval terbuka yang ditentukan oleh *a* dan *b* adalah himpunan $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Titik *a* dan *b* disebut titik ujung interval. Titik ujung tidak termuat dalam interval terbuka. Jika kedua titik ujung digabungkan ke interval terbukanya, maka disebut interval tertutup, yaitu himpunan $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} := a \leq x \leq b\}$. Interval setengah terbuka atau setengah tertutup ditentukan oleh *a* dan *b* adalah [a, b), yang mana memuat titik ujung *a*, dan(*a* , b], yang mana memuat titik ujung *b*.

Masing–masing dari empat interval ini adalah terbatas dan mempunyai panjang yang didefinisikan dengan $b - a$ .Jika $a = b$, maka interval terbukanya berkorespodensi dengan himpunan kosong (*a*

, a) = , sedangkan interval tertutupnya berkorespodensi dengan hinpunan *singleton* [a , a] = { a }. Ada lima jenis interval tidak terbatas yang mana lambang ∞ atau +∞ dan $-\infty$ digunakan sebagai simbol titik ujungnya yang tak berhingga.Interval terbuka tak terbatas adalah himpunan dengan bentuk (a , ∞) := {x ∈ ℝ : x > a } tidak mempunyai batas atas dan (- ∞, b) := { x ∈ ℝ : x < b } tidak mempunyai batas bawah. Jika diberikan gabungan titik ujung maka disebut interval tertutup tak terbatas. Jadi ℝ adalah interval tidak terbatas dalam hal ini ditulis (-∞, ∞) := ℝ. Tidak ada titik ujung dari $(-\infty, \infty)$. Himpunan $G \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan **terbuka** dalam ℝ jika untuk setiap $x \in G$, terdapat persekitaran $V_\varepsilon(x)$ sedemikian hingga $V_\varepsilon(x) \subset G$. Himpunan $F \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan **tertutup** dalam ℝ jika komplemen F, yaitu F^c terbuka dalam ℝ.

I. Tes Formatif 2

Pilihlah salah satu sebagai jawaban yang tepat menurut kalian

1. Himpunan yang mempunyai supremum adalah…
   a. $\{x \in \boldsymbol{R}: 2x + 5 > 0\}$
   b. $\left\{x \in \boldsymbol{R}: x < \frac{1}{x}\right\}$
   c. $\{x \in \boldsymbol{R}: x + 2 > x^2\}$
   d. $\{x \in \boldsymbol{R}: x^2 - 2x - 5 < 0\}$
2. Pernyataan yang benar jika $u = inf\ S$ adalah…
   a. $u + \frac{1}{n}$ bukan batas atas S dan $u - \frac{1}{n}$ batas bawah S
   b. $u + \frac{1}{n}$ bukan batas atas S dan $u - \frac{1}{n}$ bukan batas bawah S
   c. $u + \frac{1}{n}$ batas atas S dan $u - \frac{1}{n}$ batas bawah S
   d. $u + \frac{1}{n}$ batas atas S dan $u - \frac{1}{n}$ bukan batas bawah S

3. Berikut ini interval bersarang yang mempunyai sifat $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ adalah…
   a. $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$
   b. $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$
   c. $I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$
   d. $I_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

4. Representasi biner yang tepat untuk $\frac{15}{4}$ adalah…
   a. $(11, 10111 \ldots)_2 = (1,11000, \ldots)_2$
   b. $(11, 10111 \ldots)_2 = (10,11000 \ldots)_2$
   c. $(11, 10111 \ldots)_2 = (11,11000 \ldots)_2$
   d. $(1, 10111 \ldots)_2 = (1,11000 \ldots)_2$

5. Jika diketahui $H_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ maka pernyataan yang benar adalah…
   a. $\bigcap_{n=1}^{k} H_n$ tertutup
   b. $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ terbuka
   c. $\bigcup_{n=1}^{k} H_n$ tidak tertutup
   d. $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ terbuka

soal-soal di atas dengan kunci jawaban Tes Formatif 4 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitung jumlah jawaban yang benar dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui penguasaan kalian terhadap materi Kegiatan Belajar 4

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{10} x\ 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai:

90% - 100%	Baik sekali
80% - 89%	Baik
70% - 79%	Cukup
< 70%	Kurang

Kalau kalian belum memcapai penguasaan minimal 80% sebaiknya ulangi kegiatan belajar 4, terutama bagian yang belum dikuasai, tetapi jika sudah mencapai penguasaan minimal 80% maka lanjutkan belajar ke modul selanjutnya.

J. Kunci Jawaban Modul 3

Kegiatan Belajar 1

1. d
2. d
3. a
4. b
5. c

Kegiatan Belajar 2

1. a
2. a
3. b
4. c
5. 6

K. Referensi

Bartle, R. G., and Donald, R.S. (2000) *Introduction to real analysis.* New York: John Wiley & Sons. Inc.

Darmawijaya, S. (2006). *Pengantar analisis real.* Yogyakarta: FMIPA UGM,

MODUL 4
BARISAN DAN DERET

A. Pendahuluan

Modul ini membahas mengenai pengertian barisan dan deret. Selanjutnya, dibahas tentang limit dan konvergensi dari suatu barisan, diantaranya adalah Teorema Konvergen Monoton, Teorema Bolzano-Weierstrass, dan Kriteria Cauchy untuk barisan yang konvergen. Modul ini sedikit membahas deret infinit. Setelah mempelajari modul ini maka mahasiswa dapat:

1. Membedakan barisan yanng konvergen dan divergen
2. Menentukan limit dari suatu barisan yang konvergen
3. Membedakan antara ekor barisan dan barisan bagian
4. Menentukan limit barisan karena monoton dan terbatas
5. Menentukan barisan monoton
6. Menentukan barisan terbatas
7. Membedakan barisan Cauchy atau bukan
8. Membedakan barisan divergen tegas atau bukan
9. Menentukan kekonvergenan deret infinit

B. Kegiatan Belajar 1

1.3 Barisan dan Limit Barisan

Barisan pada himpunan S adalah suatu fungsi dengan domain **N** dan mempunyai range dalam S. Pada subbab ini akan dibahas mengenai barisan di **R** dan konvergensi dari suatu barisan.

Definisi 3.1-1

*Barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan **N** dengan range dalam **R**.*

Dengan kata lain, barisan dalam **R** mengawankan setiap bilangan asli n =1,2,3,… kepada suatu bilangan real, jika X : **N**→ **R** merupakan barisan, maka biasanya dituliskan dengan nilai dari X pada n dengan notasi x_n . Barisan sering dinotasikan dengan X atau (x_n) atau $(x_n \ : n \in \boldsymbol{N})$ atau $\{x_n\}$ atau $\{x_n\}$ $(n \geq 1)$ apabila diketahui suatu barisan Y , artinya Y = (y_k)

Contoh 3.1.3-1

1. Barisan (x_n) dengan x_n= $(-1)^n$ adalah barisan $(-1, 1, -1, 1, -1,1, \dots, (-1)^n, \dots)$
2. Barisan (x_n) dengan x_n = ($\frac{1}{2^{n,}}$: $n \in$ $\boldsymbol{N}$) = $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right)$
3. Barisan konstan (k_n) dengan k_n= 3 adalah (3,3,3,3, ….)
4. Barisan$\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\right)$

Definisi 3.1.3-2 *Diberikan barisan bilangan real* $(\boldsymbol{x_n})$ $\boldsymbol{dan}$ $(\boldsymbol{y_n})$, *dan* $\boldsymbol{\alpha \epsilon}$ **R** . *Maka dapat didefinisikan*

(i) $(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n)$.

(ii) $\alpha(x_n) = (\alpha x_n)$.

(iii) $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$.

(iv) $\frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right), asalkan y_n \neq 0$

Definisi 3.1.3-3

Diketahui (x_n) *barisan bilangan real. Suatu bilangan real* x *dikatakan* ***limit*** *barisan* (x_n) *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $K(\varepsilon) \epsilon N$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \epsilon$ **N** *dengan* $n \geq K\ (\varepsilon)$ *berlaku* $|x_n - x| < \varepsilon$.

Jika x adalah limit suatu barisan (x_n), maka di katakan (x_n) **konvergen** ke x,atau (x_n) mempunyai limit x. Dalam hal ini ditulis $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ atau $\lim(x_n) = x$ atau $(x_n) \to x$. Jika (x_n) tidak konvergen, maka (x_n) dikatakan **divergen**.

Teorema 3.1.3-1

Jika barisan (x_n) *konvergen, maka* (x_n) *mempunyai paling banyak satu limit*

Bukti :

Pembuktian tidak langsung. Andaikan limitnya tidak tunggal yaitu : $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x'$ dan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x''$dengan $x' \neq x''$. Maka untuk seberang $\varepsilon > 0$ terdapat K' sedemikian hingga $|x_n - x'| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq K'$, dan terdapat K'' sedemikan hingga $|x_n - x''| < \varepsilon/2$ untuk setiap $n \geq K''$. Dipilih $K = \max\{K', K''\}$. Menggunakan Ketaksamaan Segitiga, maka untuk $n \geq K$ diperoleh $|x' - x''| = |x' - x_n + x_n - x''|$

$$= |x' - x_n| + |x_n - x''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$,maka $x' - x'' = 0$ yang berarti Kontrakdiksi dengan pengadaian. Jadi terbukti bahwa limitnya hanya satu atau tunggal.

Teorema 3.1.3-2 *Jika* (x_n) *barisan bilangan real dan* $x \in R$*, maka empat pernyataan berikut ekuivalen*

(i) *Barisan* (x_n) *konvergen ke x.*

(ii) *Untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $K \in \boldsymbol{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \geq K$ *berlaku* $|x_n - x| < \varepsilon$.

(iii) *Untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $K \in \boldsymbol{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \geq K$ *berlaku* $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

(iv) *Untuk setiap persekitaran* $V_\varepsilon(x)$ *dari x, terdapat* $K \in \boldsymbol{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \geq K$ *berlaku* $x_n \in V_\varepsilon(x)$.

Bukti.

(i) $\Rightarrow$ (b) Jelas (dari definisi).

(ii) $\Rightarrow$ (c) $|x_n - x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

(iii) $\Rightarrow$ (d) $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Leftrightarrow x_n \in V_\varepsilon(x)$.

(iv) $\Rightarrow$ (a) $x_n \in V_\varepsilon(x) \Leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$.

Contoh 3.1.3-2

(i) Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Akan ditunjukkanbahwa (x_n) = $\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergen ke 0, yaitu $\frac{1}{n} \to 0$.

Yaitu harus dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, maka $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. MenurutSifat Archimedes, maka terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{\varepsilon} < K(\varepsilon)$, atau $\frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$. Akibatnya untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$ Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, atau $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(ii) Tunjukan bahwa $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\varepsilon^{1/2} > 0$, akibatnya $\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} > 0$. Menurut Sifat Archimedes, terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sedemikianhingga $\frac{1}{\varepsilon^{1/2}} < K(\varepsilon)$ atau $\frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon^{1/2}$, diperoleh $\frac{1}{K(\varepsilon)^2} < \varepsilon$. Akibatnya untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)^2} < \varepsilon$.

Jadi terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon \in \boldsymbol{N}$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \in \mathbf{N}$dengan $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$, atau $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

(iii) Tunjukkan bahwa $((-1)^n)$ divergen.

Dengan menggandaikan $((-1)^n)$ konvergen, berartit erdapat bilangan real x sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \in \boldsymbol{N}$sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $\left|(-1)^n - x\right| < 1$. Untuk $n \geq K$ dan n genap, maka $(-1)^n = 1$, diperoleh $|1 - x| < 1$

$\Leftrightarrow$ -1 < 1 - x <1 , yang berakibat x > 0. Untuk $n \geq K$ dan n ganjil, maka $(-1)^n = -1$, diperoleh $|-1-x| < 1$ $\Leftrightarrow$ -1 < - 1 - x <1 , yang berakibat x < 0. Timbul kontradiksi, yaitu x > 0 dan x < 0. Jadi pengandaian salah, yang benar $((-1)^n)$ divergen.

Definisi 3.1.3-4

Jika $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ barisan bilangan real dan $m \in \boldsymbol{N}$ maka barisan ekor-m dari X ada lah barisan $X_m = (x_{m+n}; n \in \boldsymbol{N}) = (x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots)$

Contoh 3.1.3-3

3-ekor dari barisan $X = (2,4,6, \ldots ,2n, \ldots)$ adalah barisan $X_3 = (8,10,12, \ldots ,2n + 6, \ldots)$

Teorema 3.1.3-3

Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n : n \in \mathbb{N})$ dan $m \in \boldsymbol{N}$ maka konvergen jika dan hanya jika X konvergen. Dalam hal ini $\lim X_m = \lim X$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Perhatikan bahwa untuk sebarang $p \in \mathbb{N}$, anggotake- p dari X_m adalah anggotake-$(p+m)$ dari X . Sama halnya, jika $q > m$, maka bentuk anggota ke-q dari X_m adalah anggota ke-$(q-m)$ dari X . Diasumsikan bahwa X konvergen ke x artinya jka diberikan sebarang ε > 0, pada barisan X untuk $n \geq K$ (ε) berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$,maka pada X_m untuk $k \geq K$ $(\varepsilon) - m$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$. Dapat diambil $K_m(\varepsilon) = K(\varepsilon) - m$, sehingga X_m konvergen ke x.

($\Leftarrow$) Sebaliknya, jika pada X_m untuk $k \geq K_m(\varepsilon)$ berlaku $|x_k - x| < \varepsilon$, maka pada X untuk $n \geq K(\varepsilon) + m$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Dapat diambil $K(\varepsilon) = K_m(\varepsilon) + m$. Artinya bahwa terbukti X konvergen ke x.

Jadi $X = (x_n : n \in \mathrm{N})$ dan $m \in \mathrm{N}$ maka $X_m = (x_{m+n} : n \in \mathrm{N})$ konvergen jika dan hanya jika X konvergen.

Teorema 3.1.3-4

Diberikan barisan bilangan real (x_n) *dan* $x \in \boldsymbol{R}$. *Jika* (a_n) *adalah suatu barisan bilangan real positif dengan* $lim(a_n) = 0$ *dan jika untuk c > 0 dan* $m \in \boldsymbol{N}$ *berlaku* $|\, x_n - x| \leq ca_0$ *untuk semua* $n \geq m$, *Maka* $lim(x_n) = x$.

Bukti:

Diambil $\varepsilon > 0$, maka $\frac{\varepsilon}{c} > 0$. Karena $\lim(a_n) = 0$, maka terdapat $K(\varepsilon/_c) \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hinggga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon/_c)$ berlaku $|a_n - 0| < \varepsilon/_c$. Akibatnya untuk setiap $n \geq K(\varepsilon/_c)$ berlaku $|x_n - x| \leq c|a_n| < c.\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ atau $|x_n - x| < \varepsilon$. Terbukti bahwa $\lim(x_n) = x$.

Contoh 3.1.3-4

Jika $a > 0$, tunjukkan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+na} = 0$

Jawab:

Karena a> 0, maka 0 <na< 1 + na yang berakibatbahwa $0 < \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na} = \frac{1}{n}.\frac{1}{a}$untuk setiap $n \in \mathbf{N}$. Diperoleh $\left|\frac{1}{1+na} - 0\right| = \left|\frac{1}{1+na}\right| < \frac{1}{n}.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.\left|\frac{1}{n}\right|$ untuk setiap $n \in \mathbf{N}$.

Karena telah diketahui bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, maka menurut di atas dan dengan mengambil $c = \frac{1}{a} > 0$ berakibat bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+na} = 0$.

C. Latihan

1. Tentukan rumus ke-n untuk barisan berikut.

   (a) $1, 4, 9, 16, \ldots$

   (b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots$

   Kunci :

   (a) (n^2)

   (b) $\left(-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

2. Untuk sebarang $b \in \mathbf{R}$, buktikan bahwa $\lim\left(\frac{b}{n}\right) = 0$.

   Kunci : $\left|\frac{b}{n} - 0\right| \leq b\left|\frac{1}{n}\right|$

3. Buktikan bahwa $lim(x_n) = 0$ jika dan hanya jika $lim(|x_n|) = 0$. Berikan contoh bahwa kekonvergenan $(|x_n|)$ tidak berakibat kekonvergenan (x_n)

   Kunci : $((-1)^n)$

D. Rangkuman

Barisan bilangan real adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada himpunan N dengan range dalam **R**. Dengan kata lain, barisan dalam **R** mengawankan setiap bilangan asli n =1,2,3,… kepada suatu bilangan real, jika X : **N**→**R** merupakan barisan, maka biasanya dituliskan dengan nilai dari X pada n dengan notasi x_n Barisan sering dinotasikan dengan

X atau (x_n) atau $(x_n : n \in \mathbf{N})$ atau $\{x_n\}$ atau $(x_n : n \geq 1)$ apabila diketahui suatu barisan Y , artinya $Y = (y_k)$.

E. Tes Formatif 1

Pilihlah salah satu sebagai jawaban yang tepat menurut kalian

1. Ekor barisan dari barisan $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ adalah...
   a. $\left(-\frac{1}{3}. -\frac{1}{5}, \dots\right)$
   b. $\left(\frac{1}{2}. \frac{1}{4}, \dots\right)$
   c. $\left(-\frac{1}{3}. \frac{1}{4}, \dots\right)$
   d. $\left(\frac{1}{2}. -\frac{1}{5}, \dots\right)$
2. Berikut ini yang merupakan limit dari barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n^2+2}\right)$ adalah...
   a. 0
   b. 1
   c. 2
   d. 3
3. Nilai limit dari $(x_n) = \left(\frac{(-1)^n n}{n^2+1}\right)$ adalah
   a. Tidak ada
   b. 2
   c. 1
   d. 0
4. Barisan berikut adalah barisan konvergen, kecuali...
   a. $\left(\frac{2n}{n+1}\right)$

b. $\left(\frac{3n+1}{2n+5}\right)$

c. $\left(\frac{n^2}{3n+5}\right)$

d. $\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)$

5. Berikut ini ekor barisan dari $s_1 = 3, s_2 = 5, s_{n+2} = s_n + s_{n+1}$, kecuali...

   a. $(8,13, \dots)$

   b. $(13,21, \dots)$

   c. $(21,34, \dots)$

   d. $(34,89, \dots)$

Cocokkanlah jawaban kalian untuk soal-soal di atas dengan kunci jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitung jumlah jawaban yang benar dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui penguasaan kalian terhadap materi Kegiatan Belajar 1

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{10} x\ 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai:

90% - 100%	Baik sekali
80% - 89%	Baik
70% - 79%	Cukup
< 70%	Kurang

Kalau kalian belum memcapai penguasaan minimal 80% sebaiknya ulangi kegiatan belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai, tetapi jika sudah mencapai penguasaan minimal 80% maka lanjutkan belajar ke kegiatan selanjutnya.

F. Kegiatan Belajar 2

3.2 Teorema-teorema Limit

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai beberapa teorema yang berkaitan dengan limit pada barisan bilangan real, seperti barisan terbatas dan kekonvergenan barisan.

Definisi 3.2-1

Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan ***terbatas*** *jika terdapat bilangan real $M>0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in$* **N.**

Oleh karena itu, barisan (x_n) terbatas jika dan hanya jika himpunan $\{x_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ merupakan himpunan bagian terbatas dalam $\boldsymbol{R}$.

Teorema 3.2-1

Jika $X = (x_n)$ konvergen, maka $X = (x_n)$ terbatas.

Bukti :

Diketahui : $X = (x_n)$ konvergen

Adb : $X = (x_n)$ terbatas

Bukti :

$X = (x_n)$ konvergen misalkan konvergen ke x. diambi $\varepsilon = 1$, maka terdapat $K \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $| x_n - x | < 1$. Menggunakan akibat ketaksamaan segitiga, maka $|x_n| - |x| < 1$ atau $| x_n | < 1 + | x |$ untuk semua $n \geq K$. Namakan $= max \{x_1, x_2, \cdots . x_{k-1}, | x | + 1 \}$, maka $| x_n \leq M$, untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$. Jadi, terbukti bahwa $X = (x_n)$ terbatas.

Teorema 3.2-2 *Jika* $X = (x_n) \to x$, $Y = (y_n) \to y$ *,dan* $c \in R$ *, maka*

(i) $X \pm Y \to x \pm y$.

(ii) $X . Y \to xy$.

(iii) $cX \to cx$.

Bukti:

(i) Diketahui : $X = (x_n) \to x$, $Y = (y_n) \to y$

Adb : $X \pm Y \to x \pm y$

Bukti :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $X = (x_n) \to x$ maka terdapat $n_0 \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $| x_n - x | < \frac{\varepsilon}{2}$. karena $Y=(y_n) \to y$, maka terdapat $n_1 \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq n_1$ berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pilih $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, maka akibatnya untuk $n \geq n_2$ berlaku $|x_n + y_n - (x - y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka $(x_n + y_n)$ konvergen ke $x + y$.

Dengan cara yang sama diperoleh bahwa $(x_n - y_n)$ konvergen ke x-y.

Jadi terbukti bahwa $X \pm Y \to x \pm y$.

(ii) Diketahui : $X = (x_n) \to x$, $Y = (y_n) \to y$

Adb : $X . Y \to xy$

Bukti :

Dengan membuktikan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat K ϵ **N** sedemikian hingga untuk setiap n ≥ K berlaku $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$.

$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy|$

$= |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|$.

Karena $(x_n) \rightarrow x$ maka (x_n) terbatas, akibatnya terdapat $M_1 > 0$ sedemikian hingga $x_n \leq M_1$, untuk semua $n \epsilon$ **N**. Namakan $M = \max\{M_1, |y|\}$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $(x_n) \rightarrow x$, maka terdapat $K_1 \epsilon$ **N** sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_1$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Karena$(y_n) \rightarrow y$, maka terdapat $K_2 \epsilon$ **N** sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_2$ berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Namakan $K = \max\{K_1, K_2\}$, maka untuk setiap $n > K$ berlaku $|x_n y_n - xy| \leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y| < M.\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}.M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K \epsilon$ **N** sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$. Dengan kata lain terbukti bahwa $X.Y \rightarrow xy$

(iii) Ambil sebarang $\mathcal{E} > 0$. Karena $(X_n) \rightarrow$ x, maka terdapat K ϵNsedemikian hingga untuk setiap n ≥ K berlaku $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |cx_n - x| &= |cx_n - x_n + x_n - x| \\ &\leq |cx_n - x_n| + |x_n - x| \\ &= |x_n||c - 1| + |x_n - x| \end{aligned}$$

Karena $(x_n) \rightarrow x$, maka (x_n) terbatas , yaitu terdapat M > 0 sedemikian hingga $|x_n| \leq M$, untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$. Akibatnya

$$|x_n||c - 1| + |x_n - x| < M.|c - 1| + \frac{\varepsilon}{2} = (M.|c - 1|) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon$$

Terbukti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat K ϵNsedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|cx_n - x| < \varepsilon$. Dengan kata lain, terbukti bahwa $cX \to cx$

Teorema 3.2-3

Jika $X = (x_n) \to x$ *dan*$Z = (z_n) \to z \neq 0$ *dengan* $z_n \neq 0$ *untuk semua n* ϵ $\boldsymbol{N}$*, maka*

$$\frac{X}{Z} = \left(\frac{X_n}{Z_n}\right) \to \frac{x}{z}$$

Bukti :

Terlebih dahulu harus dibuktikan bahwa $\frac{1}{Z} = \left(\frac{1}{z_n}\right) \to \frac{1}{z}$. Diambil $\alpha = \frac{1}{2}|z|$, maka $\alpha > 0$. Karena $\lim(z_n) = z$, maka terdapat $K_1 \epsilon$Nsedemikian hingga untuk setiap $n \geq K_1$ berlaku $|z_n - z| < \alpha$.Menggunakan akibat Ketaksamaan Segitiga bahwa

$-\alpha \leq -|z_n - z| \leq |z_n| - |z|$ untuk $n \geq K_1$, yang berarti $\frac{1}{2}|z| = |z| - \alpha \leq |z_n|$untuk $n \geq K_1$. Oleh karena $\frac{1}{|z_n|} \leq \frac{2}{|z|}$ untuk $n \geq K_1$, maka diperoleh

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{z - z_n}{z_n z}\right| = \frac{1}{|z_n z|} \leq \frac{2}{|z|^2}|z - z_n|.$$

Selanjutnya, diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K_2 \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga jika $n \geq K_2$, maka $|z_n - z| < \frac{1}{2}\varepsilon|z|^2$. Jika diambil $K(\varepsilon) = \max\{K_1, K_2\}$, maka

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| < \varepsilon \quad \text{untuk semua } n \geq K(\varepsilon).$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $\lim\left(\frac{1}{z_n}\right) = \frac{1}{z}$ atau $\left(\frac{1}{z_n}\right)$ konvergen ke $\frac{1}{z}$. Menggunakan Teorema 2.2.3(ii) dan dengan mengambil Y sebagai barisan $\left(\frac{1}{z_n}\right)$, maka $X.Y = \left(\frac{x_n}{z_n}\right) \to x\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{z}$.

Teorema 3.2-4

Jika $X = (x_n)$barisan bilangan real dengan $x_n \geq 0$ untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$ dan $(x_n) \to x$, maka $x \geq 0$.

Bukti :

Diambil $\varepsilon = -x > 0$. Karena $(x_n) \to x$, maka terdapat $K \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon < x_n - x < \varepsilon$$
$$\leftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$$
$$\leftrightarrow x - (-x) < x_n < x + (-x)$$
$$\leftrightarrow 2x < x_n < 0.$$

Kontradiksi dengan pernyataan bahwa $x_n \geq 0$, untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$. Jadi, pengandaian salah, yang benar adalah $x \geq 0$.

Teorema 3.2-5

Jika $(x_n) \to x, (y_n) \to y$, dan $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in N$, maka $x \leq y$.

Bukti :

Diberikan $z_n = y_n - x_n$ sehingga $Z = (z_n) = Y - X$ dan $z_n \geq 0$ untuk semua $n \in N$. Menggunakan Teorema 3.2.4 dan 3.2.2 diperoleh bahwa 0<lim Z = lim (y_n) – lim (x_n) atau lim (x_n) ≤ lim (y_n) . Jadi, terbukti bahwa x ≤ y

Teorema 3.2-6

*Jika $X=(x_n)$ konvergen ke x dan jika $a \leq x_n \leq b$ untuk semua $n \in$ **N**, maka $a \leq x \leq b$*

Bukti :

Diberikan Y barisan konstan $(b, b, b, \ldots)$. Menggunakan Teorema 3.2.5 diperoleh bahwa $\lim X \leq \lim Y = b$. Dengan cara yang sama diperoleh $a \leq \lim X$. Jadi, terbukti bahwa $a \leq \lim X \leq b$ atau $a \leq x \leq b$.

Berikut ini diberikan sebuah teorema yang menyatakan bahwa jika suatu barisan Y berada diantara dua barisan yang konvergen ke titik yang sama, maka Y juga konvergen ke titik yang sama.

Teorema 3.2-7 Squeeze

*Diberikan barisan bilangan real $X=(x_n)$ $Y=(y_n)$, dan $Z=(z_n)$ sedemikian hingga $x_n \leq y_n \leq z_n$ untuk semua $n \in$ **N** dan $\lim (x_n) = \lim (z_n)$. Maka Y konvergen dan $\lim (x_n)=\lim(y_n) = \lim (z_n)$.*

Bukti:

Misalkan $w:=\lim(x_n) = \lim (z_n)$. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - w| < \varepsilon$ dan $|z_n - w| < \varepsilon$, atau dengan kata lain $-\varepsilon < x_n - w < \varepsilon$ dan $-\varepsilon < z_n - w < \epsilon$. Karena $x_n \leq y_n \leq z_n$, maka $x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w$. Akibatnya diperoleh bahwa $-\varepsilon < y_n - w < \varepsilon$. Karena berlaku untuk semua $n \geq K$ dan $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $\lim (y_n) = w$.

Teorema 3.2-8

Jika $X = (x_n) \to x$, maka $|X| = (|x_n|) \to |x|$.

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$.Karena$X = (x_n) \to x$, maka terdapat $K \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Menggunakan akibat Ketaksamaan Segitiga, diperoleh bahwa untuk setiap $n \in \boldsymbol{N}$ berlaku $\left||x_n| - |x|\right| \leq |x_n - x| < \varepsilon$.

Jadi, diperoleh bahwa$\left||x_n| - |x|\right| < \varepsilon$, atau$|X| = (|x_n|) \to |x|$.

Teorema 3.2-9

Jika $X = (x_n) \to x$ *dan* $x_n \geq 0$, *maka barisan bilangan real positif* $\left(\sqrt{x_n}\right) \to \sqrt{x}$.

Bukti :

Menurut teorema 3.2-9 diperoleh bahwa $x \geq 0$. Akan ditunjukkan bahwa teorema benar untuk $x = 0$ dan $x > 0$.

Kasus I:

Jika$x \geq 0$, diberikan $\varepsilon > 0$. Karena $(x_n) \to x = 0$, maka terdapat $K \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$berlaku$0 \leq x_n = x_n - 0 < \varepsilon^2$.

Sehingga diperoleh bahwa $0 \leq \sqrt{x_n} < \varepsilon$. Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa$\left(\sqrt{x_n}\right) \to \sqrt{x}$.

Kasus II:

Jika$x > 0$, maka$\sqrt{x} > 0$. Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in N$sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$berlaku$|x_n - x| < \varepsilon$. Perhatikan bahwa

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}.$$

Karena$\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} > 0$, maka diperoleh

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{x}} .$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa $\left(\sqrt{x_n}\right) \to \sqrt{x}$.

Teorema 3.2-10

Jika (x_n) *barisan bilangan real (tegas) dengan lim*$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$ *(ada) dan* $L < 1$ *, maka* (x_n) *konvergen dan lim*$(x_n) = 0$.

Bukti :

Dipilih $r \epsilon \boldsymbol{R}$ sedemikian hingga $L < r < 1$. Diambil $\varepsilon = r - L > 0$. Karena $\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$, maka terdapat $K \epsilon N$sedemikian hinggau ntuk setiap $n \geq K$ berlaku $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right| < \varepsilon$. Karena $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - |L| \leq \left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - L\right|$, maka $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| - |L| < \varepsilon$. Sehingga diperoleh

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - L < \varepsilon \iff \frac{x_{n+1}}{x_n} < \varepsilon + L < L + r - L = r \iff x_{n+1} < x_n r ,$$

Jadi, untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < x_{n-2} r^3 < \cdots < x_k r^{n+1-k} = \frac{x_k}{r^k} r^{n+1} .$$

Jika diambil$\frac{x_k}{r^k}$, maka diperoleh $0 < x_{n+1} < cr^{n+1}$untuk semua $n \geq K$. Mengingat bahwa $\lim(r^n) = 0$ (sebab$0 < r < 1$), maka $\lim(r^n) = 0 \Rightarrow \lim\ (r^{n+1}) = 0 \Rightarrow \lim(x_{n+1}) = 0 \Rightarrow \lim(x_n) = 0$.

Jadi, terbukti bahwa (x_n) konvergen dan $\lim(x_n) = 0$.

G. Latihan

1. Tentukan apakah barisan berikut konvergen atau divergen.

   (a) $x_n := \frac{n^2}{n+1}$

   (b) $x_n := \frac{2n^2+3}{n^2+1}$

   (c) $x_n := \frac{(-1)^n n}{n+1}$

   Kunci :

   (a) Divergen

   (b) Konvergen

   (c) Divergen

2. Diberikan sebuah contoh barisan konvergen(x_n) dengan $\lim\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$=1

   Kunci : $\left(\frac{1}{n}\right)$

H. Rangkuman

Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n), dan $\alpha \epsilon \boldsymbol{R}$. Maka dapat didefinisikan $(x_n) \pm (y_n) = (x_n \pm y_n)$, $\alpha(x_n) = (\alpha x_n), (x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n), \frac{(x_n)}{(y_n)} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, asalkan$y_n \neq 0$

Suatu bilangan real x dikatakan **limit** barisan (x_n) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \epsilon \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \epsilon$ N dengan $n \geq K\ (\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Jika x adalah limit suatu barisan (x_n), maka di katakan (x_n) **konvergen** ke x,atau (x_n) mempunyai limit x. Dalam hal ini ditulis $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ atau $\lim(x_n) = x$ atau $(x_n) \to x$. Jika (x_n) tidak konvergen, maka (x_n) dikatakan **divergen**.

Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan **terbatas** jika terdapat bilangan real $M>0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbf{N}$. Oleh karena itu, barisan (x_n) terbatas jika dan hanya jika himpunan $\{x_n : n \in N\}$ merupakan himpunan bagian terbatas dalam **R**.

I. Tes Formatif 2

Pilihlah salah satu sebagai jawaban yang tepat menurut kalian

1. Berikut ini adalah barisan divergen, kecuali...
   a. (2^n)
   b. $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$
   c. $((-1)^n n^2)$
   d. $\left(\frac{2^n}{n}\right)$
2. Berikut ini contoh dua barisan divergen tetapi jika dijumlahkan menjadi barisan konvergen...
   a. $(x_n) = (-n)$ dan $(y_n) = (n)$
   b. $(x_n) = (-n)$ dan $(y_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$
   c. $(x_n) = (n)$ dan $(y_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$
   d. $(x_n) = (n)$ dan $(y_n) = ((-1)^n n)$

3. Berikut ini merupakan contoh barisan yang terbatas, kecuali...
   a. $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$
   b. $(4n(-1)^n)$
   c. $\left(\frac{(-1)^n}{n!+3}\right)$
   d. $\left(\frac{(-1)^n}{5n+1}\right)$

4. Barisan berikut ini merupakan barisan konvergen, kecuali...

   a. $\left(\sqrt{(n+a)(n+b)-n}\right), a, b > 0$

   b. $(a^n), 0 < a < 1$

   c. $\left(\frac{n}{b^n}\right), b > 1$

   d. $\left(\frac{n}{b^n}\right), b < 1$

5. Berikut ini pernyataan benar, kecuali...

   a. (x_n), (y_n) barisan konvergen maka $(x_n + y_n)$ konvergen

   b. (x_n), (y_n) barisan divergen maka $(x_n + y_n)$ divergen

   c. (x_n), (y_n) barisan konvergen maka $(x_n - y_n)$ konvergen

   d. (x_n), (y_n) barisan divergen maka ada $(x_n + y_n)$ konvergen

Cocokkanlah jawaban kalian untuk soal-soal di atas dengan kunci jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitung jumlah jawaban yang benar dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui penguasaan kalian terhadap materi Kegiatan Belajar 2

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{10} x\ 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai:

90% - 100%	Baik sekali
80% - 89%	Baik
70% - 79%	Cukup
< 70%	Kurang

Kalau kalian belum mencapai penguasaan minimal 80% sebaiknya ulangi kegiatan belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai, tetapi jika sudah mencapai penguasaan minimal 80% maka lanjutkan belajar ke kegiatan selanjutnya.

J. Kegiatan Belajar 3

3.3 Barisan Monoton

Berikut ini diberikan pengertian mengenai barisa naik dan turun monoton.

Definisi 3.3-1 *Diberikan barisan bilangan real* $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x_n})$

(i) *Barisan X dikatakan naik (increasing) jika* $x_n \leq x_{n+1}$ *untuk semua* $n \in \mathbf{N}$

(ii) *Barisan X dikatakan naik tegas (strictly increasing) jika* $x_n < x_{n+1}$ *untuk semua* $n \in \mathbf{N}$

(iii) *Barisan X dikatakan turun (decreasing) jika* $x_n \geq x_{n+1}$ *untuk semua* $n \in \mathbf{N}$

(iv) *Barisan X dikatakan turun tegas (strictly decreasing) jika* $x_n > x_{n+1}$ *untuk semua* $n \in \mathbf{N}$

Definisi 3.3-2

Barisan $X = (x_n)$ *dikatakan* ***monoton*** *jika berlaku salah satu X naik atau X turun.*

Contoh 3.3-1

1. Barisan berikut ini naik (monoton).
   a. (1,2,3,4,..., n,...).
   b. (1,2,2,3,3,3,...).
   c. $(a,a^2,a^3,a^4, ...,a^n,...)$.
2. Barisan berikut ini turun (momoton).
   a. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$.
   b. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right)$.
   c. $(b,b^2,b^3,b^4, ...,b^n,...)$. jika $0 < b < 1$

3. Barisan berikut ini tidak monoton.

a. $(+1,-1,+1,...,(-1)^{n+1},...)$.

b. $(-1,+2,-3,+4,...)$.

Teorema 3.3-1 Konvergensi Monoton

(i) Jika $X = (x_n)$ naik monoton tegas dan terbatas ke atas maka $X = (x_n)$ konvergen dengan $\lim(x_n) = \sup\{x_n : n \in N\}$.

(ii) *Jika $X = (x_n)$ turun monoton tegas dan terbatas ke bawah maka $X = (x_n)$ konvergen dengan* $\lim(x_n) = \inf\{x_n : n \in N\}$.

Bukti :

(i) Karena $X = (x_n)$ terbatas ke atas, maka terdapat $M \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga $x_n \leq M$ untuk semua $n \in \mathbf{N}$. Namakan $A = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, maka $A \subset R$, terbatas ke atas dan tidak kosong. Menurut Sifat Lengkap **R**, maka supremum A ada, namakan $x = \sup A$. Diambil $\varepsilon > 0$, maka terdapat $K \in \mathbf{N}$ sedemikian hingga $x - \varepsilon < x_k \leq x$. karena X naik monoton, maka untuk $n \geq K$ berlaku

$$x - \varepsilon < x_k \leq x_n \leq x < x + \varepsilon$$

Atau

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \leftrightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Jadi, terbukti bahwa $X = (x_n)$ konvergen ke $x = \lim(x_n) = \sup\{x_n : n \epsilon \mathbf{N}\}$.

(ii) Gunakan cara yang hampir sama dengan pembuktian (a).

Contoh 3.3-2

Diketahui barisan (y_n) dengan $y_1 = 1$ dan $y_{n+1} = \sqrt{2 + y_n}$, $n \geq 1$. Apakah (y_n) konvergen ? Jika ya, tentukan (y_n).

Jawab :

Akan ditunjukkan menggunakan induksi matematika bahwa (y_n) naik monoton.

Untuk $n = 1$, diperoleh $y_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \geq 1$ (benar).

Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $y_{k+1} = \sqrt{2+y_k}$, $y_{k+1} \geq y_k$.

Akan dibuktikan benar untuk $n = k+1$, yaitu $y_{k+2} = \sqrt{2+y_{k+1}} \geq \sqrt{2+y_k} = y_{k+1}$.

Berarti benar untuk $n = k+1$. Jadi berdasarkan induksi matematika (y_n) naik monoton. Selanjutnya, ditunjukkan bahwa (y_n) terbatas ke atas (oleh 3), yaitu $y_n \leq 3$, untuk semua $n \in \mathbf{N}$. Untuk $n = 1$ benar, sebab $y_1 = 1 \leq 3$.

Misalkan benar untuk $n = k$, yaitu $y_k \leq 3$. Maka $y_{k+1} = \sqrt{2+y_k} \leq \sqrt{2+3} = \sqrt{5} \leq 3$ yang berarti benar untuk $n = k+1$.

Jadi berdasarkan induksi matematika terbukti bahwa $y_n \leq 3$, untuk semua $n \in \mathbf{N}$. Karena (y_n) naik monoton dan terbatas ke atas, maka barisan (y_n) konvergen. Misalkan $y = \lim(y_n)$, maka diperoleh $y = \sqrt{2+y} \Leftrightarrow y^2 = 2 + y \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y+1) = 0$.

Diperoleh $y = 2$ atau $y = -1$. Untuk $y = -1$ jelas tidak mungkin, sebab $1 \leq y_n \leq 3$ untuk semua $n \in$ N. Jadi, terbukti bahwa (y_n) konvergen dan $\lim (y_n) = 2$.

K. Latihan

1. Diberikan $x_1 > 1$ dan $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ untuk $n \in$ N. Tunjukkan bahwa (x_n) terbatas dan monoton. Carilah nilai limitnya.

   Kunci :

Dengan induksi matematika dibuktikan terbatas dan monoton

$$\lim(x_n) = 1$$

2. Tentukan apakah barisan (y_n) konvergen atau divergen, dengan $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ untuk $n \in$ N.

Kunci :

Buktikan bahwa $y_{n+1} - y_n > 0$ dan bahwa $y_n < \frac{n}{n+1} < 1$ untuk setiap n

3. Tentukan konvergensi dan hitunglah limit barisan berikut.

(a) $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ (b) $\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)$

Kunci :

(a) e

Ingat $1 - \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1}$

L. Rangkuman

Barisan *X* dikatakan **naik** *(increasing*) jika $x_n \le x_{n+1}$ untuk semua n ϵ ***N.*** Barisan *X* dikatakan **naik tegas** (*strictly increasing*) jika $x_n < x_{n+1}$ untuk semua n ϵ ***N.*** Barisan *X* dikatakan **turun** (*decreasing*) jika $x_n \ge x_{n+1}$ untuk semua n ϵ ***N.*** Barisan *X* dikatakan **turun tegas** (*strictly decreasing*) jika $x_n > x_{n+1}$ untuk semua n ϵ ***N.*** Barisan $X = (x_n)$ dikatakan **monoton** jika berlaku salah satu *X* naik atau *X* turun.

M. Tes Formatif 3

Pilihlah salah satu sebagai jawaban yang tepat menurut kalian

1. Berikut ini barisan yang monoton, kecuali...
   a. $y_1 = 1, y_{n+1} = \frac{1}{4}(2y_n + 1)$
   b. $y_1 = 1, y_{n+1} = \sqrt{2y_n}$
   c. $y_1 = 2, y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{2}{y_n}\right)$
   d. $y_1 = 1, y_{n+1} = (3y_n + 5)$
2. Pernyataan yang benar mengenai barisan yang monoton, kecuali...
   a. Turun
   b. Naik
   c. Tetap
   d. Turun naik
3. Limit dari barisan $y_1 = 1, y_{n+1} = \sqrt{2 + y_n}$ adalah...
   a. -1
   b. 0
   c. 1
   d. 2
4. Barisan berikut ini $y_1 = 1, y_{n+1} = \left(\frac{1}{2}y_n + 2\right)$ merupakan barisan yang...
   a. Naik dan terbatas
   b. Turun dan terbatas
   c. Tetap dan terbatas
   d. Turun-naik dan terbatas
5. Barisan di bawah ini adalah barisan monoton dan terbatas, kecuali...
   a. $y_1 = 1, y_{n+1} = (3y_n + 5)$

b. $y_1 \geq 2, y_{n+1} = 1 + \sqrt{y_n - 1}$

c. $y_1 = 1, y_{n+1} = 2 - \frac{1}{y_n}$

d. $y_1, a > 0, y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$

Cocokkanlah jawaban kalian untuk soal-soal di atas dengan kunci jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitung jumlah jawaban yang benar dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui penguasaan kalian terhadap materi Kegiatan Belajar 3

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{10}\, x\ 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai:

90% - 100%	Baik sekali
80% - 89%	Baik
70% - 79%	Cukup
< 70%	Kurang

Kalau kalian belum memcapai penguasaan minimal 80% sebaiknya ulangi kegiatan belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai, tetapi jika sudah mencapai penguasaan minimal 80% maka lanjutkan belajar ke kegiatan selanjutnya.

N. Kegiatan Belajar 4

3.4 Barisan Bagian

Pada bagian ini akan diberikan konsep barisan bagian (*subsequences*) dari suatu barisan bilangan real.

Definisi 3.4-1

Diberikan barisan bilangan real $X=(x_n)$ *dan diberikan barisan bilangan asli naik tegas* $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$. *Barisan* $X'=\left(x_{n_k}\right)$ *dengan disebut dengan* ***barisan bagian*** *atau* ***sub barisan*** *(subsequences) dari X.*

Contoh 3.4-1

Diberikan $X:=\left(\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right)$.

1. Barisan $X_1'=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\ldots,\frac{1}{2n},\ldots\right)$ merupakan barisan bagian dari *X*.
2. Barisan $X_2'=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\ldots\right)$ merupakan barisan bagian dari *X*.
3. Barisan $X_3'=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\right)$ bukan barisan bagian dari *X*, sebab $n_2<n_1$.

Teorema 3.4-1

Jika $X=(x_n)$ *konvergen ke* x, *maka setiap barisan bagian* $X'=(x_{nk})$ *dari X juga konvergen ke* x.

Bukti :

Diambil $\varepsilon > 0$. Karena $(x_n) \to x$, maka terdapat $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$. Karena untuk setiap $n \in N$ berlaku $n_{k+1} \geq n_k$, maka untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $n_k \geq k \geq K(\varepsilon)$. Sehingga $|x_{nk} - x| < \varepsilon$.

Terbukti bahwa $X' = (x_{nk})$ konvergen ke x.

Teorema 3.4-2 *Diberikan barisan bilangan real* $X = (x_n)$, *maka pernyataan berikut ini ekuivalen*

(i) *Barisan* $X = (x_n)$ *tidak konvergen ke* $x \epsilon \mathbf{R}$

(ii) *Ada* $\varepsilon_0 > 0$ *sedemikian hingga untuk sebarang* $k \epsilon \mathbf{N}$ *terdapat* $n_k \epsilon \mathbf{N}$ *sedemikan hingga* $n_k \geq k$ *dan* $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_{0.}$

(iii) *Ada* $\varepsilon_0 > 0$ *dan suatu barisan bagian* $X' = (x_{nk})$ *sedemikian hingga* $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$ *untuk semua* $k \epsilon$ **N**

Bukti :

$(i) \Rightarrow (ii)$ *Jika* (x_n) tidak konvergen ke x, maka untuk suatu $\varepsilon_0 > 0$ tidak mungkin ditemukan kϵ**N** sedemikian hingga untuk setiap $n_k \geq k$ berlaku $|x_{nk} - x| < \varepsilon_0$. Akibatnya tidak benar bahwa untuk setiap kϵ**N**, $n \geq k$ memenuhi $|x_{nk} - x| < \varepsilon_0$. Dengan kata lain, untuk setiap kϵ**N** terdapat $n_k \in N$ sedemikian hingga $n_k \geq k$ dan $|x_{nk} - x| \geq \varepsilon_0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Diberikan$\varepsilon_0 > 0$ sehingga memenuhi (ii) dan diberikan $n_1 \in N$ sedemikian hingga $n_1 \geq 1$ dan $|X_{n_1 - x}| \geq \varepsilon_0$. Selanjutnya diberikan $n_2 \in N$ sedemikian hingga $n_2 > n_1$dan $\left|X_{n_2 - x}\right| \geq \varepsilon_0$. Demikian seterusnya sehingga diperoleh suatu barisan bagian$X^1 = (x_{n_1})$ sehingga berlaku $\left|X_{n_1 - x}\right| \geq \varepsilon_0$untuk semua k ∈ **N**.

iii) ⇒ (i) misalkan$X \quad = (x_n)$mempunyai barisan bagian $X^1 = (x_{n_1})$ yang memenuhi sifat (iii). Maka X tidak konvergen ke x, sebab jika konvergen ke x, maka $X^1 = \left(x_{n_1}\right)$juga konvergen ke x. Hal initidakmungkin, sebab$X^1 = (x_{n_1})$ tidak berada dalam persekitaraan $V_{\varepsilon_0(x)}$.

Teorema 3.4-3 Kriteria Divergensi *Jika barisan bilangan real* $\boldsymbol{X} \quad = (\boldsymbol{x_0})$ *memenuhi salah satu dari sifat berikut, maka barisan X divergen*

(i) *X mempunyai dua barisan bagian konvergen* $X^1 = (x_{n_1})$ *dan* $X^n = (x_{r_1})$ *dengan limit keduanya tidak sama.*

(ii) *X tidak terbatas.*

Contoh 3.4-2

Tunjukkan bahwa barisan$\left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ divergen.

Jawab :

Namakan barisan di atas dengan$Y \quad = (y_n)$, dengan $y_n = \frac{1}{n}$ jika n genap, dan $y_n = n$ jika n ganjil. Jelas bahwa Y tidak terbatas.Jadi, barisan $Y \quad = (y_n)$ divergen.

Berikut ini sebuah teorema yang menyatakan bahwa barisan bilangan real $X \quad = (x_n)$ pasti mempunyai barisan bagian yang monoton. Untuk membuktikan teorema ini, diberikan pengertian puncak (peak), $x_n$disebut puncak jika$x_m = x_n$untuk semua n sedemikian hingga $n \geq m$. Titik x_m tidak pernah didahului oleh sembarang anggota barisan setelahnya. Perhatikan bahwa barisan pada barisan yang menurun, setiap anggota adalah puncak, tetapi pada barisan yang naik, tidak ada anggota yang menjadi puncak.

Teorema 3.4-4 Teorema Barisan Bagian Monoton

Jika $X = (x_n)$ *barisan bilangan real, maka terdapat barisan bagian dari X yang monoton.*

Bukti:

Pembuktian dibagi menjadi dua kasus, yaitu X mempunyai infinit puncak, dan *X* mempunyai berhingga banyak puncak.

Kasus I:

X mempunyai infinit puncak. Tulis semua puncak berurutan naik, yaitu $x_{m_1}, x_{m_2,\ldots,}x_{m_4,\ldots}$. Maka $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq \cdots \geq x_{m_4}, \ldots.$ oleh karena itu, (x_{m_1}) merupakan bagian barisan yang turun (monoton).

Kasus II:

X mempunyai finit puncak .Tulis semua puncak berurutan naik, yaitu$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_4}, \ldots$ Misalkan $s_1 \coloneqq m_r + 1$ adalah indeks pertama dari puncak yang terakhir. Karena x_{s_1} bukan puncak, maka terdapat $s_1 > s_2$ sedemikian

hingga$x_{s_1} < x_{s_2}$. Jika proses ini diteruskan, diperoleh barisan bagian (x_{s_1}) yang naik (monoton).

Teorema 3.4-5 Bolzano-Weierstrass

Setiap bilangan real yang terbatas pasti memuat barisan bagian yang konvergen.

Bukti:

Diberikan barisan bilangan real terbatas$X = (x_n)$. Namakan $S = \{x_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ range barisan, maka S mungkin finit atau infinit.

Kasus I:

Diketahui S finit. Misalkan$= \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$, maka terdapat $m \in \boldsymbol{N}$ dengan $1 \leq m \leq 1$ dan barisan$(r_1 : k \in \boldsymbol{N})$ dengan $r_{1<}r_{2<}r_{3<\cdots}$. sehingga $x_{r1} = x_{r2} = \cdots = x_m$, hal ini berarti terdapat barisan bagian $(x_{r1} : k \in N)$ yang konvergen ke x_m .

Kasus II:

Karena S infinit dan terbatas, maka S mempunyai titik cluster atau titik limit, namakan x titik limit S. Misalkan $U_k = \left(x - \frac{1}{k}, x + \frac{1}{k} \right)$

persekitaran titik x.

Untuk $k = 1$, maka terdapat $x_{r_1} \in S \cap U_1, x_{r_1} \neq x$ sedemikian hingga

$\left| x_{r_1} - x \right| < 1$.

Untuk $k = 2$,maka terdapat $x_{r_2} \in S \cap U_2, x_{r_2} \neq x$ sedemikian hingga

$\left| x_{r_2} - x \right| < \frac{1}{2}$.

Untuk $k = 3$, maka terdapat $x_{r_3} \in S \cap U_3, x_{r_3} \neq x$ sedemikian hingga

$\left| x_{r_3} - x \right| < \frac{1}{3}$.

Demikian seterusnya, sehingga diperoleh:

Untuk $k = n$, maka terdapat $x_{r_n} \in S \cap U_n, x_{r_n} \neq x$ sedemikian hingga

$\left| x_{r_n} - x \right| < \frac{1}{n}$.

Ambil $\in > 0$. Menurut Sifat Archimedes, makaterdapat $K \in \mathrm{N}$

sedemikian hingga $\frac{1}{K} < \in$. Maka untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$\left|x_{r_n} - x\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \in$. Terbukti bahwa $\left(x_{r_n}\right)$ konvergen ke x dengan $\left(x_{r_n}\right)$ barisan bagian (x_n).

Teorema 3.4-6

*Diberikan barisan bilangan real terbatas $X = (x_n)$ dan diberikan $x \in$ **R** yang mempunyai sifat bahwa setiap barisan bagian dari X konvergen ke- x. Maka barisan X konvergen ke x.*

Bukti :

Misalkan $M > 0$ adalah batas dari barisan X sehingga $\left|x_n\right| \leq M$ untuk semua $n \in \mathrm{N}$. Andaikan X tidak konvergen ke x, maka terdapat $\in_0 > 0$ dan barisan bagian $X^{'} = \left(x_{n_k}\right)$ sedemikian hingga $\left|x_{n_k} - x\right| \geq \in_0$ untuk semua $K \in \mathrm{N}$. Karena $X^{'}$ barisan bagian dari X maka M juga batas dari $X^{'}$. Menggunakan Teorema Bolzano-Weierstrass berakibat bahwa $X^{'}$ memuat barisan bagian $X^{''}$. Karena $X^{''}$ juga barisan bagian dari X, maka $X^{''}$ juga konvergen ke x. Dengan demikian, akan selalu berada dalam persekitaraan $V_{\in_0}(x)$. Timbul kontradiksi, yang benar adalah X selalu konvergen ke- x.

O. Latihan

Misalkan setiap barisan bagian dari $X = (x_n)$ mempunyai suatu barisan bagian yang konvergen ke 0. Tunjukkan bahwa $\lim(x_n) = 0$.

Kunci :

Andaikan (x_n) tidak konvergen ke 0 maka ada $\varepsilon_0 > 0$ dan barisan bagian (x_{n_k}) dengan $|x_{n_k}| > \varepsilon_0$ untuk setiap k anggota bilangan asli.

P. Rangkuman

Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$ dan diberikan barisan bilangan asli naik tegas $n_1 < n_2 < ... < n_k < ....$ Barisan $X' = (x_{n_k})$ dengan disebut dengan **barisan bagian** atau **sub barisan** (*subsequences*) dari *X*. Setiap bilangan real yang terbatas pasti memuat barisan bagian yang konvergen.

Q. Tes Formatif 4

Pilihlah salah satu sebagai jawaban yang tepat menurut kalian

1. Sub barisan dari $y_1 = 1, y_{n+1} = (3y_n - 1)$ adalah...
   a. $(2,5,14, ...)$
   b. $(5,2,14, ...)$
   c. $(14,5,2, ...)$
   d. $(1,14,2, ...)$
2. Diberikan barisan yang dua barisan bagiannya konvergen tetapi limitnya tidak sama, kecuali...
   a. $\cos n$
   b. $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$

c. $\left(\frac{2^2 n(-1)^n}{n}\right)$

d. $\left(\frac{5(n+1)(-1)^n}{(n+1)}\right)$

3. Berikut ini merupakan pernyataan benar, kecuali...
   a. Suatu barisan bilangan real mempunyai barisan bagian yang monoton
   b. Suatu barisan bilangan real yang terbatas mempunyai barisan bagian yang konvergen
   c. Suatu barisan bilangan real konvergen maka barisan bagiannya monoton
   d. Suatu barisan bilangan terbatas akan konvergen jika semua barisan bagiannya konvergen
4. Diberikan $X = \left(-1, 1, -2, \frac{1}{2}, -3, \ldots\right)$ merupakan barisan divergen karena...
   a. Dua barisannya konvergen tetapi limitnya berbeda
   b. Barisan bagiannya terbatas
   c. Sub barisannya tidak ada
   d. Barisan tidak terbatas
5. Diberikan barisan yang setiap barisannya konvergen ke-1 maka barisan tersebut mempunyai limit ke...
   a. 0
   b. 1
   c. 2
   d. 3

Cocokkanlah jawaban kalian untuk soal-soal di atas dengan kunci jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitung jumlah jawaban yang benar dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui penguasaan kalian terhadap materi Kegiatan Belajar 3

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{10}\, x\ 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai:

90% - 100%	Baik sekali
80% - 89%	Baik
70% - 79%	Cukup
< 70%	Kurang

Kalau kalian belum memcapai penguasaan minimal 80% sebaiknya ulangi kegiatan belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai, tetapi jika sudah mencapai penguasaan minimal 80% maka lanjutkan belajar ke kegiatan selanjutnya.

R. Kegiatan Belajar 5

3.5 Barisan Cauchy, Barisan Divergen dan Deret Infinit

Definisi 3.R-1

Barisan bilangan real X =(x_n) disebut ***Barisan Cauchy*** *jika untuk setiap ε>0 terdapat H(ε)ϵ* **N** *sedemikian hingga untuk setiap n,m ϵ* ***N*** *dengan n,m ≥H(ε), berlaku* $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Contoh 3.R-1

Buktikan Barisan $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Jawab :

Jika diberikan ε>0,dapat dipilih *H*=*H*(ε) ϵ **N** sedemikian hingga $H > \frac{2}{\varepsilon}$.

Maka jika $n, m \geq H$, diperoleh $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$ dan dengan cara yang sama diperoleh $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu, jika *n*,*m*$\geq H(\varepsilon)$, maka $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka dapat disimpulkan bahwa $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy.

Lemma 3.R-1

Jika X=(x_n) *barisan bilangan real yang konvergen, maka X merupakan barisan Cauchy.*

Bukti :

Misalkan x:=lim X. Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat K$\left(\varepsilon/2\right) \epsilon$ N sedemikian hingga jika n $\geq K\left(\varepsilon/2\right)$, maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu, jika *H*(ε):=*K*$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ dan jika *n*,*m* $\geq$*H*(ε), maka diperoleh

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)|$$
$$= |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa (x_n) barisan Cauchy.

Lemma 3.R-2

Jika X=(x_n) *barisan Cauchy, maka X terbatas.*

Bukti :

Diketahui : *X*=(x_n) barisan Cauchy.

Adb : *X*=(x_n) terbatas

Bukti :

Diberikan $\varepsilon \coloneqq 1$. Jika H:=$H(1)$ dan $n \le H$,maka $|x_n - x_H| < 1$. Selanjutnya, menggunakan Ketaksamaan Segitiga,diperoleh $|x_n| \le |x_H| + 1$ untuk semua $n\epsilon$**N**.

Namakan M:=max$\{|x_1|, |x_2|, \dots., |x_{H-1}|, |x_H| + 1\}$,

Maka diperoleh $|x_n| \le M$ untuk semua $n \epsilon$ **N**. Jadi, terbukti bahwa X terbatas.

Teorema 3.R-1 Kriteria Konvergensi Cauchy

Barisan bilangan real X=(x_n) konvergen jika dan hanya jika X=(x_n) barisan Cauchy.

Bukti :

=> Jelas (Lemma 3.5.1).

<= Diketahui : X=(x_n) barisan Cauchy.

Adb : X=(x_n) barisan konvergen

Bukti :

Diambil $\varepsilon > 0$, maka terdapat H=$H\,(\varepsilon) > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $n,m\epsilon\boldsymbol{N}$ dengan $n,m \ge H$ berlaku $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Karena X barisan Cauchy, maka X terbatas, sehingga X memuat barisan bagian X'=$\left(x_{n_k}\right)$ yang konvergen ke x^*. Oleh karena itu, terdapat $K \ge H$ dengan $K\epsilon\{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ sedemikian hingga $|x_K - x^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Akibatnya untuk m = K diperoleh

$$|x_n - x^*| = |x_n - x_K + x_K - x^*|$$

$$\le |x_n - x_K| + |x_K - x^*|$$

$$< \boldsymbol{\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon}.$$

Karena berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka terbukti bahwa barisan X =(x_n) konvergen.

Definisi 3.R-2

Barisan bilanngan real $X = (x_n)$ *dikatakan kontraktif (contractive) jika terdapat konstanta* C *, dengan* $0 < C < 1$ *sedemikian sehingga*$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - (x_n)\ |$*untuk semua* **N**. *Bilangan C disebut konstan dari barisan kontraktif.*

Teorema 3.R-2

Setiap barisan kontraktif merupakan barisan Cauchy dan konvergen.

Akibat R-1 *Jika* $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x_n})$ *barisan kontraktif dengan konstanta* $\boldsymbol{C}$ *,* $\mathbf{0} < \boldsymbol{C} < \mathbf{1}$ *dan jika* $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{limX}$ *, maka*

(i) $|x^* - x_n| \leq \frac{C^{n-1}}{1-C}|x_2 - x_1\ |$

(ii) $|x^* - x_n| \leq \frac{C}{1-C}|x_n - x_{n-1}\ |$

3.6 **Sifat Barisan Divergen**

Pada subab inidiberikan beberapa sifat dari suatu barisan bilangan real (x_n) yang mendekati atau menuju ke $\pm\infty$, yaitu $lim(x_n) = \pm\infty$ dan $lim(x_n) = -\infty$. Ingat bahwa barisan divergen adalah barisan yang tidak konvergen.

Definisi 3.6-1 *Diberikan barisan bilangan real* $(\boldsymbol{x_n})$

(i) *Barisan dikatakan* ***mendekati*** $+\infty$, *ditulis* $lim(x_n) = +\infty$, *jika untuk setiap* $\alpha\epsilon\mathbb{R}$ *terdapat* $K(\alpha)\epsilon N$*sedemikian sehingga jika* $n \geq K(a)$, *maka* $n_x > a$.

(ii) *Barisan* (x_n) *dikatakan* ***mendekati*** $-\infty$, *ditulis* $lim(x_n) = -\infty$, *jika untuk setiap* $\beta\epsilon\mathbb{R}$ *terdapat* $K(\beta)\epsilon N$*sedemikian hingga jika* $n \geq K(\beta)$ *, maka* $x_n < \beta$.

(iii) *Barisan* (x_n) *dikatakan* ***divergen proper*** *(tepat/tegas) jika* $lim(x_n) = +\infty$ *atau* $lim(x_n) = -\infty$. *Berikut ini diberikan contoh bahwa* $(n^2) = +\infty$.

Contoh 3.6-1

$\lim(n^2) = +\infty$. Jika $K(\varepsilon) \in N$ sedemikian hingga $K(\propto) >\propto$, dan jika $n \geq K(\propto)$, maka diperoleh $n^2 \geq K(\propto)$, maka diperoleh $n^2 \geq n >\propto$.

Teorema 3.6-1 *Barisan bilangan real monoton merupakan barisan divergen proper jika dan hanya barisannya tidak terbatas*

(i) *Jika* (x_n) *barisan naik tak terbatas, maka* $lim(x_n) = +\infty$.

(ii) *Jika* (x_n) *barisan turun tak terbatas, maka* $lim(x_n) = -\infty$.

Bukti :

(i) Misalkan (x_n) barisan naik. Jika (x_n) terbatas, maka (x_n) konvergen. Jika (x_n) tidak terbatas, maka untuk sebarang $\alpha \in R$ terdapat $n(\propto) \in N$ sedemikian hingga $\propto < x_{n(\propto)}$. Tetapi karena (x_n) naik, diperoleh $\propto < x_n$ untuk semua $n \geq n(\propto)$. Karena $\propto$ sebarang, maka diperoleh bahwa $\lim(x_n) = +\infty$.

(ii) Bukti hampir sama dengan (a).

Teorema 3.6-2 *Diberikan barisan bilangan real* $(\boldsymbol{x_n})$ *dan* $(\boldsymbol{y_n})$, *dengan* $\boldsymbol{x_n} \leq \boldsymbol{y_n}$ *untuk semua* $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}$

(i) *Jika* $lim(x_n) = +\infty$, *maka* $lim(y_n) = +\infty$.

(ii) *Jika* $lim(y_n) = -\infty$, *maka* $lim(x_n) = -\infty$.

Bukti :

(i) Jika $\lim(x_n) = +\infty$ dan jika diberikan $\alpha \in \boldsymbol{R}$, maka terdapat $K(\propto) \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga jika $n \geq K(\propto)$, maka $\propto < x_n$. Karena diketahui $x_n \leq y_n$ untuk semua $n \in \boldsymbol{N}$, maka $\propto < y_n$ untuk semua $n \geq K(\propto)$. Karena $\propto$ sebarang, maka $\lim(y_n) = +\infty$.

(ii) Bukti hampir sama dengan (a).

Teorema 3.6-3

Diberikan barisan bilangan real (x_n) *dan* (y_n), *dan untuk suatu* $L \in \boldsymbol{R}, L > 0$ *diperoleh* $lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = L$ *maka* $lim(x_n) = +\infty$ *jika dan hanya jika* $lim(y_n) = +\infty$.

Bukti :

Diketahui $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = L$, artinya terdapat $K \in \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku

$$\frac{1}{2}L < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}L.$$

Oleh karena itu, diperoleh $\left(\frac{1}{2}L\right)y_n < x_n < \left(\frac{3}{2}L\right)y_n$ untuk semua $n \geq K$. Sehingga menggunakan Teorema 3.6.2, teorema terbukti.

3.7 **Deret Infinit**

Berikut ini diberikan pengantar singkat mengenai suatu deret infinit dari bilangan real.

Definisi 3.7-1

*Jika $X := (x_n)$ barisan di **R**, maka **deret infinit** (cukup disebut **deret**) yang dibentuk oleh X adalah barisan $S := (s_k)$ yang didefinisikan dengan*

$$s_1 \coloneqq x_1$$

$$s_2 \coloneqq s_1 + x_2 \qquad (= x_1 + x_2)$$

. . . . .

$$s_k \coloneqq s_{k-1} + x_2 \qquad (= x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

. . . . .

*x_n disebut dengan **terms** dari deret, dan S_k disebut **jumlahan parsial (partial sum).** Jika lim S ada, maka deret S dikatakan **konvergen** dan nilai limitnya adalah hasil dari jumlahan deret. Jika limitnya tidak ada, maka dikatakan deret S **divergen**.*

Deret infinit S yang dibangun oleh barisan $X := (x_n)$ disimbolkan dengan

$$\sum(x_n) \text{ atau } \sum x_n \text{ atau } \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Contoh 3.7-1

Diberikan barisan $X \coloneqq (r^n)_{n=0}^{\infty}$ dengn $r \in \boldsymbol{R}$ yang membangun deret :

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$$

Akan ditunjukkan bahwa jika $|r| < 1$, maka deret ini konvergen ke $\frac{1}{(1-r)}$ untuk $|r| < 1$.

Jawab :

Misalkan $S_n \coloneqq 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$ untuk $n \geq 0$, jika S_n dikalikan dengan *r* dan mengurangkan hasilnya dari S_n, maka diperoleh

$$S_n(1 - r) = 1 - r^{n+1}.$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$S_n - \frac{1}{1-r} = \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Sehingga

$$\left|S_n - \frac{1}{1-r}\right| \le \frac{|r|^{n+1}}{|1-r|}.$$

Karena $|r|^{n+1} \to 0$ saat $|r| < 1$, maka deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ konvergen ke $\frac{1}{(1-r)}$ saat $|r| < 1$.

Selanjutnya, diberikan kondisi-kondisi yang dapat memberikan jaminan bahwa suatu deret itu konvergen.

Teorema 3.7-1 Uji Suku ke-n

Jika deret $\sum x_n$ konvergen, maka $lim(x_n) = 0$.

Bukti :

Menggunakan Definisi 3.7.1, $\sum x_n$ konvergen apabila lim (s_k) ada. Karena $x_n = s_n - s_{n-1}$, maka $\lim(x_n) = \lim(s_n) - \lim(s_{n-1}) = 0$.

Teorema 3.7-2 Kriteria Cauchy

Deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M(\varepsilon) \in N$ sedemikian hingga jika m > n ≥ $M(\varepsilon)$, maka $|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon$

Teorema 3.7-3

Diberikan (x_n) Barisan bilangan real nonnegatif. Maka deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika barisan $S = (s_k)$ dari jumlah parsialnya terbatas dalam hal ini

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = lim(s_k) = sup\{s_k : k \in \mathbf{N}\}$$

Bukti :

Karena $(x_n) > 0$, maka barisan jumlahan parsial S naik monoton, yaitu

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_k \leq \cdots$$

$S = (s_k)$ konvergen jika dan hanya jika barisannya terbatas, dalam hal ini limitnya sama dengan sup$\{s_k\}$

Contoh 3.7-2

Buktikan Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ Konvergen

Jawab :

Karena Jumlahan parsialnya monoton, maka Cukup ditunjukan bahwa barisan bagian (s_k) terbatas. Jika $k_1 := 2^1 - 1 = 1$, maka $s_{k_1} = 1$. Jika $k_2 := 2^2 - 1 = 3$, maka

$$s_{k_2} = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) < 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2},$$

Dan jika $k_3 := 2^3 - 1 = 7$, maka diperoleh

$$s_{k_3} = s_{k_2} + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} +\right) < s_{k_2} + \frac{4}{4^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$$

Menggunakan induksi matematik, diperoleh bahwa jika $k_j := 2^j - 1$, maka

$$0 < s_{k_j} < 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$$

Karena ruas kanan merupakan jumlahan parsial dari deret geometri dengan $r = \frac{1}{2}$, maka lim $(s_k) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})} = 2$. jadi, deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen.

Teorema 3.7-4 Uji Perbandingan *Diberikan barisan bilangan real X:=(*$\boldsymbol{x_n}$*)* $\boldsymbol{dan\ Y} \coloneqq (\boldsymbol{y_n})$*, dan misalkan untuk suatu* $\boldsymbol{K} \in \boldsymbol{N}$ *berlaku* $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x_n} \leq \boldsymbol{y_n}$ *untuk* $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{K}$

(i) $Jika \sum y_n\ konvergen, maka\ \sum x_n\ konvergen$

(ii) $Jika \sum x_n\ divergen, maka\ \sum y_n\ divergen$.

Bukti :

(i) Misalkan $\sum y_n$ konvergen. diberikan $\varepsilon > 0$ dan $M(\varepsilon) \epsilon \boldsymbol{N}$ sedemikian hingga jika $m > n \geq M(\varepsilon)$, maka

$$y_{n-1} + \cdots + y_m < \varepsilon$$

Jika $m >$ max$\{K, M(\varepsilon)\}$, maka diperoleh bahwa

$$0 \leq x_{n-1} + \cdots + x_m \leq y_{n-1} + \cdots + y_m + < \varepsilon,$$

Yang berakibat bahwa $\sum x_n$ konvergen.

(ii) Menggunakan kontraposisi dari (a), maka teorema terbukti.

Teorema 3.7-5 Uji Perbandingan Limit

$Misalkan\ X \coloneqq (x_n)\ \ barisan\ positif\ naik\ tegas\ dan\ misalkan\ limit\ berikut\ ada\ dalam\ \boldsymbol{R}, yaitu$ $r \coloneqq lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$.

$(i) Jika\ r \neq 0, maka \sum x_n\ konvergen\ jika\ dan\ hanya\ jika\ \sum y_n\ konvergen$

$(ii)\ Jika\ r = 0, maka \sum y_n\ konvergen\ jika\ dan\ hanya\ jika\ \sum x_n\ konvergen$

Bukti :

(i) Diketahui $r := \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$, terdapat $K \in \mathrm{N}$ sedemikian hungga untuk n $\geq$ K berlaku $\frac{1}{2}r \leq \frac{x_n}{y_n} \leq 2r$, sehingga diperoleh $\left(\frac{1}{2}r\right)y_n \leq x_n \leq (2r)y_n$. Menggunakan Uji Perbandingan dua kali, maka pernyataan (a) terbukti. Jika r=0, maka terdapat $K \in \mathrm{N}$ untuk setiap n $\geq K$ berlaku

$$0 \leq x_n \leq y_n \,.$$

(ii) Menggunakan Teorema Uji Perbandingan maka pernyataan (b) terbukti.

Contoh 3.7-3

Buktikan Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ konvergen.

Jawab :

Diketahui ketaksamaan berikut benar $0 \leq \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$ untuk $n \in \mathrm{N}$.

Karena telah diketahui bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergen, maka menggunakan Uji Perbandingan diperoleh bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ konvergen.

S. Latihan

1. Tunjukkan barisan $((-1)^n)$ bukan barisan Cauchy dengan menggunakan definisi.

   Kunci :

   Ingat bahwa $|(-1)^n - (-1)^{n+1}| = 2$ untuk setiap n anggota bilangan asli

2. Jika $x_1 > 0$ dan$x_{n-1} := (2 + x_n)^{-1}$ untuk $n \geq 1$, tunjukan bahwa (x_n) merupakan barisan kontraktif. Tentukan limitnya.

   Kunci :

   Tunjukkan bahwa $|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{4}|x_n - x_{n-1}|$

   Limitnya $\sqrt{2} - 1$

3. Buktikan bahwa jika $x_n > 0$ untuk setiap n anggota bilangan asli maka $lim(x_n) = 0$ jika dan hanya jika $lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = +\infty$

   Kunci :

   Ingat bahwa $|x_n - 0| < \varepsilon$ jika dan hanya jika $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$

4. Tunjukkan bahwa

   a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$

   b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha} > 0$, jika $\alpha > 0$.

   c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

   Kunci :

   a. Ingat bahwa $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

T. Rangkuman

Barisan bilangan real X =(x_n) disebut **Barisan Cauchy** jika untuk setiap ε>0 terdapat $H(\varepsilon)\epsilon$ **N** sedemikian hingga untuk setiap *n,m* ϵ **N** dengan *n,m* ≥*H(ε),* berlaku $|x_n - x_m|$< ε. Barisan bilangan real $X = (x_n)$ dikatakan kontraktif (*contractive*) jika terdapat konstanta C , dengan $0 < C < 1$ sedemikian sehingga$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - (x_n)\,|$, untuk semua N. Bilangan C disebut konstan dari barisan kontraktif.

Barisan dikatakan **mendekati** +∞, ditulis lim(x_n) = +∞, jika untuk setiap $\alpha\epsilon\mathbb{R}$ terdapat $K(\alpha)\epsilon N$sedemikian sehingga jika $n \geq K(a)$, maka $n_x > a$. Barisan (x_n) dikatakan **mendekati** $-\infty$, ditulis $lim(x_n) = -\infty$, jika untuk setiap $\boldsymbol{\beta\epsilon R}$ terdapat $K(\beta)\epsilon\boldsymbol{N}$sedemikian hingga jika $n \geq K(\beta)$, maka $x_n < \beta$. Barisan (x_n) dikatakan **divergen proper** (tepat/tegas) jika $lim(x_n) = +\infty$ atau $lim(x_n) = -\infty$. Berikut ini diberikan contoh bahwa $(n^2) = +\infty$.

Jika $X := (x_n)$ barisan di $\boldsymbol{R}$, maka **deret infinit** (cukup disebut **deret**) yang dibentuk oleh X adalah barisan $S := (s_k)$ yang didefinisikan dengan

$$
\begin{array}{ll}
s_1 \coloneqq x_1 & \\
s_2 \coloneqq s_1 + x_2 & (= x_1 + x_2) \\
\cdots\cdots & \\
s_k \coloneqq s_{k-1} + x_2 & (= x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \\
\cdots\cdots &
\end{array}
$$

x_n disebut dengan ***terms*** dari deret, dan S_k disebut **jumlahan parsial *(partial sum)*.** Jika lim S ada, maka deret S dikatakan **konvergen** dan nilai limitnya adalah hasil dari jumlahan deret. Jika limitnya tidak ada, maka dikatakan deret S **divergen**. Deret infinit S yang dibangun oleh barisan $X := (x_n)$ disimbolkan dengan

$$\sum(x_n) \text{ atau } \sum x_n \text{ atau } \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

U. Tes Formatif 5

Pilihlah salah satu sebagai jawaban yang tepat menurut kalian

1. Berikut ini adalah Barisan Cauchy, kecuali...
   a. $\left(\frac{n+1}{n}\right)$
   b. $(\text{In } n)$
   c. $\left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$
   d. $\left(\frac{2n}{n^2+1}\right)$
2. Berikut ini merupakan barisan terbatas yang bukan barisan Cauchy, kecuali
   a. $\left(\frac{n+1}{n}\right)$
   b. $(2(-1)^n)$
   c. $\left(\frac{2n(-1)^n}{n}\right)$
   d. $(ln(-1)^n)$
3. Barisan di bawah ini adalah divergen tegas, kecuali...
   a. $(\sqrt{n})$
   b. $(\sqrt{n+1})$
   c. $(\sqrt{n-1})$
   d. $\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)$
4. Barisan yang divergen tegas adalah...
   a. $\left(\frac{\sqrt{n}}{(n^2+1)}\right)$

b. $\left(\frac{(n^2+1)}{\sqrt{n}}\right)$

c. $\left(\frac{(n^2+1)}{n^2}\right)$

d. $\left(\frac{(n\quad+1)}{n}\right)$

5. Deret yang konvergen adalah...

a. $\sum cos\ n$

b. $\sum \frac{cosn}{n^2}$

c. $\sum \frac{1}{n(lnn)^c}\ , c > 1$

d. $\sum \sin n$

Cocokkanlah jawaban kalian untuk soal-soal di atas dengan kunci jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat pada akhir modul ini. Hitung jumlah jawaban yang benar dan gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui penguasaan kalian terhadap materi Kegiatan Belajar 3

$$Tingkat\ penguasaan = \frac{jumlah\ jawaban\ yang\ benar}{10}\, x\ 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang kalian capai:

90% - 100%	Baik sekali
80% - 89%	Baik
70% - 79%	Cukup
< 70%	Kurang

Kalau kalian belum memcapai penguasaan minimal 80% sebaiknya ulangi kegiatan belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai, tetapi jika sudah mencapai penguasaan minimal 80% maka lanjutkan belajar ke kegiatan selanjutnya.

V. Kunci Jawaban Tes Formatif:

Tes Formatif 1

1. c
2. a
3. d
4. c
5. d

Tes Formatif 2

1. b
2. a
3. b
4. d
5. b

Tes Formatif 3

1. c
2. d
3. d
4. a
5. a

Tes Formatif 4

1. a
2. b
3. c
4. d
5. b

Tes Formatif 5

1. b
2. d
3. d
4. b
5. b

W. Referensi

Bartle, R. G., and Donald, R.S. (2000) *Introduction to real analysis.* New York: John Wiley & Sons. Inc.

Darmawijaya, S. (2006). *Pengantar analisis real.* Yogyakarta: FMIPA UGM,

INDEKS

TENTANG PENULIS

NOOR FAJRIAH, dosen program studi pendidikan matematika dengan pangkat/golongan/jabatan Pembina tingkat 1/IV.b/Lektor Kepala.

YUNI SURYANINGSIH, dosen program studi pendidikan matematika dengan pangkat/golongan/jabatan Penata muda tingkat 1/III.b/Asisten Ahli