2021

TEORI PELUANG

Hidayah Ansori
Noor Fajriah
Yuni Suryaningsih

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT
BANJARMASIN

TEORI PELUANG

Hidayah Ansori
Noor Fajriah
Yuni Suryaningsih

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA
FAKULTAS KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN
UNIVERSITAS LAMBUNG MANGKURAT
BANJARMASIN
JUNI 2021

TEORI PELUANG

Edisi Kesatu

Penulis:
Hidayah Ansori
Hj. Noor Fajriah
Yuni Suryaningsih

Desain Sampul: Hidayah Ansori

Diterbitkan Oleh: Jurusan PMIPA FKIP ULM, 2021
d/a Jl. Hasan Basri, KayutangiBanjarmasin, 70123
Telp/Fax. 085821029982

i – v + 265 hl, 15,5 × 23
Cetakan Pertama, September 2021
ISBN: 978-623-97654-2-2

PRAKATA

Puji Syukur kehadirat Allah SWT, karena dengan Rahmat dan Karunia-Nya penulisan bahan ajar Teori Peluang ini dapat selesai.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada Ketua Jurusan PMIPA FKIP yang telah memberikan fasilitas untuk dapat menyusun bahan ajar mata kuliah Teori Peluang. Teori Peluang merupakan mata kuliah wajib semester 3 bidang statistika yang membahas peluang dari segi praktis dan matematis.

Akhirnya semoga bahan ajar ini dapat bermanfaat bagi kita semua, saran-saran dari pembaca sangat diharapkan sehingga dapat diperbaiki pada kesempatan penerbitan yang akan datang

Banjarmasin, September 2021

Tim Penulis

DAFTAR ISI

I. PROBABILITAS/PELUANG

1.1 Notasi dan Istilah

Ruang Sampel

Definisi 1.1

Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan disebut ruang sampel dan dinotasikan dengan lambang S. Dicatat bahwa satu dan hanya satu hasil yang mungkin terjadi pada sebarang percobaan yang diberikan dari suatu eksperimen.

Menurut banyaknya hasil dalam ruang sampel, dibedakan dua macam sampel, yaitu ruang sampel diskrit dan ruang sampel kontinu.

Contoh 1.1

1. Percobaan melantunkan dua koin, himpunan hasil yang mungkin direpresentasikan oleh ruang sampel S = {MM, MB, BM, BB}.
2. Suatu percobaan melantunkan sebuah dadu. Bila diselidiki yang muncul sebelah atas, maka ruang sampelnya $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Apabila yang diselidiki sebelah atas nomor ganjil dan genap, maka ruang sampelnya S_2 = {ganjil, genap}
3. Percobaan yang melibatkan waktu/lainnya komponen sampai tidak berfungsi

$$S = \{t \mid 0 \leq t < \infty\} = [0 , +\infty)$$

Definisi 1.2

Jika suatu ruang sampel S adalah salah satu finit atau infinit terhitung (countable) maka disebut ruang sampel diskrit.

Misalkan melemparkan sebuah dadu satu kali, jika perhatian kita adalah mata dadu yang tampak maka ruang sampelnya adalah: S_1 = {1,2,3,4,5,6} akan tetapi bila kita perhatikan mata dadu tampak genap atau ganjil, maka ruang sampel adalah S_2 = {genap, ganjil}. Dari contoh ini jelas bahwa informasi yang diperoleh dari S_1 lebih jelas dari S_2, sebab terjadinya suatu hasil dalam S_1 pasti dapat menunjukkan terjadinya hasil dalam S_2 tetapi tidak sebaliknya. Dengan demikian akan timbul masalah ruang sampel mana yang dipilih, biasanya ruang sampel yang dipilih adalah yang setiap hasilnya tidak mungkin dipecah lagi.

Definisi 1.3

Jika suatu ruang sampel S mempunyai banyak elemen tak terhingga tak terhitung (uncountably infinite) maka disebut ruang sampel kontinu.

Contoh 1.2

1) Untuk eksperimen mengukur tinggi seseorang yang tingginya antara 164,5 dan 165,5

$$S = \{x \mid 164{,}5 < x < 165{,}5\}$$

2) Untuk eksperimen mengamati indeks prestasi 5 mahasiswa di suatu tahun akademik tertentu.

   $S = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i$ = prestasi mahasiswa ke-i, i = 1,2,3,4,5}

3) Untuk eksperimen mengambil sampel random berukuran n dari suatu populasi,

$$S = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i = \text{anggota populasi},\ i = 1,2,\dots,n\}$$

Contoh di atas (1 sampai dengan 3) semuanya merupakan ruang sampel kontinu

Definisi 1.4

Suatu kejadian merupakan himpunan hasil atau himpunan bagian dari ruang sampel S. Jika A merupakan suatu kejadian maka A terjadi bila terdiri dari hasil kejadian.

Dari definisi di atas jelas bahwa baik ruang sampel maupun kejadian kosong juga merupakan kejadian, disebut kejadian yang tidak sejati. Menurut banyaknya hasil dalam suatu kejadian dapat dibedakan dua macam kejadian, yaitu <u>kejadian sederhana</u> jika hasilnya hanya satu dan <u>kejadian majemuk</u> jika hasilnya lebih dari satu. Baik kejadian sederhana maupun kejadian majemuk keduanya merupakan <u>kejadian sejati</u>.

Contoh 1.3

1) Jika eksperimen adalah melempar sebuah mata uang dua kali dengan

   A = kejadian mendapat M pada lemparan pertama

   B = kejadian mendapat hasil kedua lemparan sama

   C = kejadian mendapat B pada lemparan kedua.

   maka

   A = {MB, MM}   B = {BB, MM)   C = {MB, BB}

2) Jika eksperimen adalah melempar sebuah dadu sekali dengan

   A = kejadian mendapat mata genap,

   B = kejadian mendapat mata ganjil,

   C = kejadian mendapat mata yang habis dibagi 3,

   D = kejadian mendapat mata yang ≤ 6

   E = kejadian mendapat mata yang > 6.

   A = {2, 4, 6}   B = {1, 3, 5}   C = {3, 6}   D = {1,2,3,4,5,6} dan E = { } = ϕ

Dari eksperimen contoh di atas nomor terlihat bahwa D adalah suatu kejadian yang pasti, sedangkan E adalah suatu kejadian yang tidak mungkin terjadi, jika eksperimen tersebut dilakukan. Kejadian A, B dan C dari 1) dan 2) adalah contoh kejadian majemuk.

Definisi 1.5

Komplemen suatu kejadian A terhadap S ialah himpunan semua unsur S yang tidak termasuk A. Komplemen A dinyatakan dengan lambang A^c.

Jelas bahwa A dan A^c tidak mungkin terjadi bersama-sama dan keduanya adalah suatu partisi dari S.

Contoh 1.4

1) Jika eksperimen adalah melempar sebuah mata uang dua kali dengan
   a. A = kejadian mendapat M pada lemparan pertama
   b. B = kejadian mendapat hasil kedua lemparan sama

   maka

   a. A^c dapat ditentukan dengan dua cara,

      Cara pertama:

      Karena S = {MM, MB, BM, BB} dan A = {MM, MB} maka

      A^c = {BM, BB}

      Cara kedua:

      Karena A = terdapat M pada lemparan pertama

      maka A^c = <u>tidak</u> terdapat M pada lemparan pertama

      = dapat <u>bukan</u> M pada lemparan pertama

      = {BM, BB}

   b. B^c = <u>dapat</u> hasil kedua lemparan tidak sama

2) Misalkan A suatu kejadian bahwa kartu merah terambil dari sekotak kartu bridge yang berisi 52 kartu, dan bahwa S menyatakan seluruh kartu, maka A^c adalah kejadian bahwa kartu yang terambil bukan berwarna merah tetapi hitam.

Definisi 1.6

Dua kejadian A dan B disebut saling terpisah (mutually exclusive) bila $A \cap B = \Phi$.

Jika A suatu kejadian paling tidak satu muka dan B kita misalkan kejadian bukan kedua-duanya maka A dan B saling terpisah.

B = A^c (komplemen dari A)

Contoh 1.5

Dalam sebuah kantong terdapat 10 benih pohon mangrove, masing-masing diberi nomor yang berurutan. Sebuah benih diambil dari dalam kantong secara acak, misal A adalah kejadian bahwa yang terambil benih bernomor genap dan B adalah kejadian terambil benih bernomor prima ganjil maka

Ruang sampel S = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, n(S) = 10

Kejadian A = {2,4,6,8,10}, n(A) = 5

Kejadian B = {3,5,7}, n(B) = 3

Ternyata kejadian A dan B tidak memiliki irisan $A \cap B = \emptyset$. Artinya kejadian A dan B adalah kejadian saling lepas.

Definisi 1.7

Kejadian $A_1, A_2, A_3, \cdots$ *dikatakan saling terpisah bila mereka berpasangan saling terpisah yaitu* $A_i \cap A_j = \Phi$ *dengan* $i \neq j$.

1.2 Teknik Pencacahan

Jika suatu proses gabungan merupakan gabungan dari k (≥2), proses dengan masing-masing dapat dilakukan menurut n_k (≥1) cara, maka proses gabungan tersebut dapat dilakukan dengan menurut

$n_1 \cdot n_2 \cdots\cdot n_k$ cara

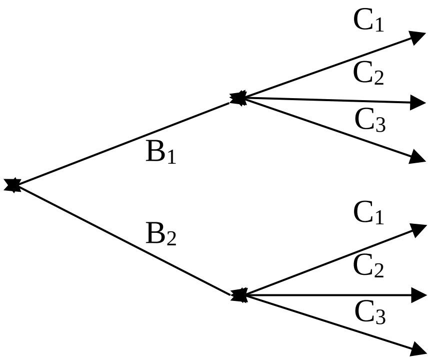
Prinsip ini dapat diperluas untuk lebih dari dua operasi

Contoh 1.6

1) Seseorang mempunyai 2 buah celana dan 3 baju, ada berapa cara dia dapat memakainya

   Penyelesaian

   Orang tersebut dapat memakai baju dan celana ada 2·3 cara = 6 cara. Jika memisalkan baju dengan B_1 dan B_2 dan celana dengan C_1, C_2, C_3 macam-macam cara untuk memilih baju dan celana dapat diperlihatkan dengan diagram pohon berikut



Gambar 1: Diagram Cara Pasangan Baju-Celana

   Jika untuk setiap trial terdapat n hasil yang mungkin, maka dalam suatu eksperimen yang terdiri dari k trial, ruang sampel yang dihasilkan eksperimen itu memuat n^k elemen (*outcome*) yang mungkin.

   Misalkan melantunkan 1 mata uang logam 1 kali akan mendapat 2 hasil, yaitu m dan b. Bila mata uang tersebut dilantunkan sebanyak 5 kali, maka ruang sampelnya akan memuat 2^5 elemen.

2) Seorang pedagang ikan menawarkan berbagai jenis ikan yang dijualnya, mulai dari ikan nila, ikan patin, ikan bawal, ikan lele,

serta ikan gabus. Selain itu, ikan-ikan tersebut juga dijual dengan ukuran yang berbeda-beda yaitu ukuran besar, sedang, dan kecil. Berapa banyak pilihan seorang pembeli dapat membeli ikan tersebut?

Penyelesaian

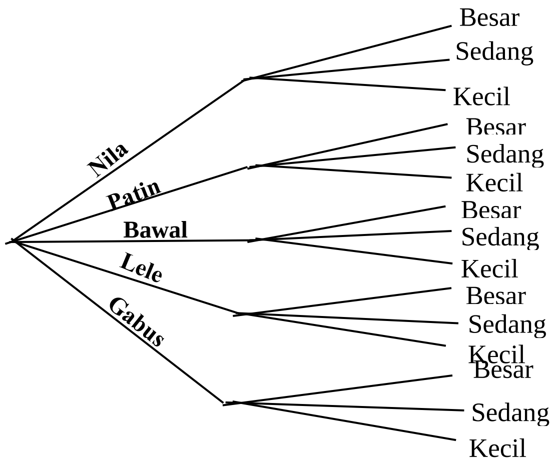
Pembeli dapat memilih jenis ikan dalam 4 cara ($n_1 = 4$)

Pembeli dapat memilih ukuran ikan dalam 3 cara ($n_2 = 3$)

Karena $n_1 = 4$ dan $n_2 = 3$, maka $n_1 \cdot n_2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Jadi, seorang pembeli dapat memilih satu dari 12 kemungkinan.

Macam-macam cara untuk memilih jenis dan ukuran ikan dapat diperlihatkan dengan diagram pohon berikut



Gambar 2: Diagram Cara Pasang Jenis dan Ukuran Ikan

3) Pada tahun 2019, Dinas Pariwisata Provinsi Kalimantan Selatan mengadakan lomba balap jukung yang diadakan di Siring. Dengan jarak 300 meter, 5 peserta berhasil lolos ke babak final. Akan dipilih 3 peserta yang akan menjadi pemenang. Ada berapa susunan pemenang yang mungkin muncul pada babak final tersebut?

Penyelesaian

Langkah 1 : Ada 5 peserta yang semuanya dapat keluar sebagai juara pertama;

Langkah 2 : Satu peserta sudah berhasil masuk garis akhir, maka sisa 4 peserta yang dapat keluar sebagai juara kedua; dan

Langkah 3 : Juara pertama dan kedua sudah masuk garis akhir, maka sisa 3 peserta yang dapat keluar sebagai juara ketiga.

Jadi, susunan pemenang yang mungkin muncul ada $5 \times 4 \times 3 = 60$ susunan.

Permutasi

Definisi 1.8

Suatu permutasi ialah suatu susunan yang dapat dibentuk dari satu kumpulan benda yang diambil sebagian atau seluruhnya

Contoh 1.7

Ambil tiga huruf a, b, dan c. Permutasi yang dapat dibuat adalah abc, acb, bac, bca, cab, dan cba. Dapat dilihat bahwa ada enam susunan yang berlainan. Bila $n_1 = 3$ susunan tempat pertama, $n_2 = 2$ tempat kedua, $n_3 = 1$ tempat ketiga, maka diperoleh $n_1.n_2.n_3 = 3.2.1 = 6$ cara.

Teorema 1

Banyaknya permutasi n benda yang berlainan adalah n!

Banyaknya permutasi empat huruf a, b, c, dan d adalah $4! = 24$. Sekarang ingin diselidiki banyaknya permutasi yang dapat dibuat dari 4 huruf bila 2 huruf diambil sekaligus. Permutasi tersebut adalah ab, ac, ad, ba, ca, da, bc, cb, bd, cd, dan dc.

Pada umumnya n benda yang berlainan jika diambil r sekaligus dapat disusun dalam $n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$ cara.

Teorema 2

Banyaknya permutasi dari n objek berbeda bila diambil r sekaligus adalah

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh 1.8

1) Berapakah permutasi dari 3 objek?

   Misalkan ketiga objek adalah a, b dan c, maka 3! = 3·2·1 = 6

   Yaitu abc, acb, bac, bca, cab, cba.

2) Berapa macam carakah dapat diisi kelima tempat pertama dalam suatu tim bola basket yang diambil dari 9 pria yang sanggup menempati setiap tempat.

   Banyaknya cara adalah $_9P_5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5 = 15120$

3) Lahan gambut adalah lahan basah yang terbentuk dari timbunan materi organik yang berasal dari sisa-sisa pohon, rerumputan, lumut, dan jasad hewan yang membusuk. Pak Tono memiliki 10 lahan gambut di berbagai daerah. Berapa banyak cara untuk memilih 3 Lahan yang masing-masing akan ia berikan kepada anakanya Dina, Dono, dan Doni?

   Banyaknya cara $nP_r = 10P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10.9.8.\cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$ cara

   Jadi, banyaknya cara untuk memberikan lahan pada anak Pak Tono adalah 720 cara.

Teorema 3

Banyaknya permutasi dari n benda berlainan dapat disusun melingkar adalah (n–1)!

Contoh 1.9

Bila 4 orang bermain bridge, maka permutasinya tidak berbeda bila tiap orang menggeser tempatnya sekali menurut arah jarum jam. Bila tempat seseorang dibuat tetap dan tempat yang lainnya diatur dalam 3! Cara maka diperoleh 6 susunan yang berlainan dalam permainan *bridge*.

Teorema 4

Banyaknya permutasi dari n objek yang terdiri dari k_1 jenis pertama, k_2 jenis kedua, …, dan k_m jenis ke-m adalah $\frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_m!}$

Teorema di atas dapat dijelaskan bahwa misalkan suatu himpunan yang terdiri dari n objek, dengan objek-objek ini ada k_1 objek yang sejenis (tidak dapat dibedakan satu sama lain), k_2 objek jenis kedua, …, k_m objek jenis ke-m. Jelas bahwa $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_k$

Contoh 1.10

1) Berapa banyak susunan huruf berbeda yang dapat dibuat dari semua huruf pada kata LAHANBASAH?

   Penyelesaian

   Jumlah huruf dari LAHANBASAH ada 10 huruf, yaitu

   $\mathrm{L} = 1, \mathrm{A} = 4, \mathrm{H} = 2, \mathrm{N} = 1, \mathrm{B} = 1, \text{dan } \mathrm{S} = 1$

   sedemikian hingga

$$P^{n}_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} = \frac{n!}{n_1!\,.\,n_2!\,.\ldots.\,n_k!}$$

$$P^{10}_{(1,4,2,1,1,1)} = \frac{10!}{1!\ 4!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{1 \times 4! \times 2 \times 1 \times 1 \times 1}$$
$$= 75600$$

Jadi, banyak susunan huruf yang berbeda yang dapat di susun dari kata LAHANBASAH adalah 75600.

2) Berapa permutasi yang berbeda dapat dibentuk dari semua huruf pada kata 'ALJABAR'?

   Penyelesaian

   N = jumlah huruf ada 7

   k_1 = jumlah huruf A ada 3

   k_2 = jumlah huruf L ada 1

   k_3 = jumlah huruf J ada 1

   k_4 = jumlah huruf B ada 1

   k_5 = jumlah huruf R ada 1

   Banyaknya permutasi = $\frac{7!}{3!1!1!1!1!}$ = 840

Kombinasi

Definisi 1.9

Kombinasi sebagian objek yang diambil dari sekumpulan objek berbeda adalah suatu pengaturan tanpa memperhatikan urutan dari objek-objek tersebut.

Teorema 5

Banyaknya kombinasi r objek yang diambil dari n objek berbeda, ditulis dengan $\binom{n}{r}$ atau C^n_r atau ${}_nC_r$ atau $C_{n,r}$, adalah

$$\frac{n!}{r!(n-r)\ !}$$

Bukti:

Dengan memperhatikan bahwa permutasi r objek yang diambil dari n objek yang berbeda adalah proses gabungan dari proses-proses kombinasi dan permutasi dari objek, maka berlaku

$$_nP_r = \binom{n}{r} {_rP_r}$$

atau

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \binom{n}{r} r!$$

sehingga

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Contoh 1.11

Dari kelompok yang terdiri dari 5 pria dan 3 wanita, berapa banyak panitia yang beranggotakan 3 orang dapat dibuat.

a) tanpa pembatasan
b) dengan 2 pria dan 1 wanita
c) dengan 1 pria dan 2 wanita bila seorang wanita tertentu harus ikut dalam panitia

Penyelesaian

a) $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = 56$

b) $\binom{5}{2}\binom{3}{1} = \frac{5!}{2!(5-2)!}\ \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{5!}{2!3!}\ \frac{3!}{1!2!} = 30$

c) $\binom{5}{1}\binom{1}{1}\binom{2}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!}\ \frac{2!}{1!(2-1)!} = 10$

Sampel dengan dan tanpa Pengembalian

- Sampel yang diambil sekaligus, yaitu yang semua elemennya diambil bersama-sama.
- Sampel dengan pengembalian, yaitu apabila elemen-elemennya diambil satu persatu dengan pengembalian
- Sampel tanpa pengembalian, yaitu apabila elemen-elemennya diambil satu persatu dengan tanpa pengembalian

Contoh 1.12

Jika dari 10 bola lampu dicoba 2 bola lampu secara random, maka banyaknya pasangan bola lampu yang dapat dicoba:

a) Untuk sampel yang dicoba sekaligus ada

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{1\cdot 2} = 45 \text{ pasang}$$

b) Untuk sampel yang dicoba dengan pengembalian ada

$$10^2 = 10\cdot 10 = 100 \text{ pasang}$$

c) Untuk sampel yang dicoba tanpa pengembalian ada

$$_{10}P_2 = \frac{10!}{8!} = 10\cdot 9 = 90 \text{ pasang}$$

Contoh 1.13

Lahan Rawa pasang surut merupakan salah sarut jenis lahan basah. Rawa adalah daerah rendah yang tergenang air dan pada umumnya permukaan air rawa selalu dibawah atau sama dengan permukaan air laut, sehingga airnya selalu menggenang dan permukaan airnya selalu tertutup oleh tumbuhan air. Nabila mempunyai peternakan sapi di lahan rawa pasang surut miliknya berjumlah 9 ekor. Kemudian Lisa ingin membeli 3 ekor sapi tersebut. Berapa banyak cara Nabila menjual Sapi kepada Lisa?

Penyelesaian

Diketahui n = 9; r = 3

Banyaknya cara :$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$= \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{10.\cancel{9}.\cancel{8}.\cancel{6!}}{\cancel{3}.\cancel{2}.1.\cancel{6!}} = 10.3.4 = 120 \text{ cara}$$

Jadi, banyaknya cara Nabila menjual Sapi kepada Lisa 120 cara

1.3 Definisi Peluang

Andaikan kejadian adalah suatu kejadian yang menjadi perhatian kita dengan A ≠ S dan A ≠ ∅, maka peluang terjadi A, ditulis P(A), dapat didefinisikan menurut beberapa cara

Definisi 1.10 (Definisi Klasik / peluang a priori)

Jika suatu eksperimen menghasilkan menghasilkan n hasil yang mungkin terjadi bersama-sama dan masing-masing mempunyai peluang yang sama terjadi, maka

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Dengan n(A) banyaknya hasil dalam A

Jika suatu eksperimen dilakukan (tanpa suatu keterangan tertentu) maka dianggap bahwa setiap hasil yang mungkin mempunyai hasil yang sama untuk terjadi.

Contoh 1.14

1. Sebuah dadu yang "baik" dilempar satu kali. A = terdapat mata genap, B terdapat mata habis dibagi 3, C = terdapat mata kurang dari 4. Hitunglah P(A), P(B), P(C), P(A ∪ B), P(B ∩ C^C) dan P(C')

   Dadu yang baik menjamin bahwa setiap hasil yang mungkin terjadi mempunyai peluang yang sama untuk terjadi. Artinya dadu dalam keadaan seimbang.

Karena S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {2, 4, 6}, B = {3, 6}, C = {1, 2, 3}, maka

$A \cup B = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}$

$B \cap C = \{3, 6\} \cap \{1, 2, 3\} = \{3\}$

$C' = \{4, 5, 6\}$

Dengan demikian n(S) = 6, n(A) = 3, n(B) = 2, n(C) = 3, $n(A \cup B)$ = 4 $n(B \cap C)$ = 1, n(C') = 3, sehingga

$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(C) = \frac{n(C)}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n} = \frac{1}{6}$

2. Jika 3 bola diambil secara acak dari mangkuk yang berisi 6 putih dan 5 bola hitam, berapa probabilitas bahwa salah satu bola putih dan hitam dua lainnya? Solusi. Jika kita menganggap urutan bola yang dipilih karena relevan, maka ruang sampel terdiri dari $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$ hasil. Selain itu, ada $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ hasil di mana bola pertama yang dipilih adalah putih dan dua lainnya berwarna hitam; $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$ hasil di mana yang pertama adalah hitam, yang kedua adalah putih, dan yang ketiga adalah hitam, dan $5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$ di mana dua yang pertama adalah hitam dan ketiga adalah putih. Oleh karena itu, dengan asumsi bahwa "secara acak" berarti bahwa setiap hasil di ruang sampel adalah sama mungkin terjadi, kita melihat bahwa probabilitas yang diinginkan adalah

$$\frac{120 + 120 + 120}{990} = \frac{4}{11}$$

Masalah ini juga bisa diselesaikan dengan menganggap hasil dari pengalaman sebagai himpunan bola tak terurut ditarik. Dari sudut pandang ini, ada hasil dalam ruang sampel. Sekarang, setiap rangkaian 3 bola sesuai dengan 3! Luar datang ketika urutan seleksi dicatat. Akibatnya, jika semua hasil yang diasumsikan memiliki kemungkinan yang sama ketika urutan seleksi dicatat, maka berikut bahwa mereka tetap memiliki kemungkinan yang sama ketika hasilnya diambil untuk menjadi set bola tak terurut yang dipilih. Oleh karena itu, dengan menggunakan representasi akhir percobaan, kita melihat bahwa yang diinginkan probabilitas adalah

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{4}{11}$$

seperti jawaban yang diperoleh sebelumnya.

3. Dari sebuah kotak yang berisi 3 kelereng merah, 4 kelereng putih dan 2 kelereng hijau, diambil 3 kelereng secara random dengan atau tanpa pengembalian. Hitunglah P (dapat kelereng hijau pada pengambilan pertama dan kedua).

   A = dapat kelereng hijau pada pengambilan pertama dan kedua

   = dapat kelereng hijau pada pengambilan pertama, kelereng hijau pada pengambilan kedua. dan kelereng sebarang warna pengambilan ketiga.

   Karena banyaknya semua kelereng dalam kotak ada 3 + 4 + 2 = 9, maka dengan aturan multiplikatif membilang,

a. Jika pengambilan adalah dengan pengembalian n = 9·9·9 dan n(A) = 2·2·9, sehingga

$$P(A) = \frac{2\cdot 2\cdot 9}{9\cdot 9\cdot 9} = \frac{4}{81}$$

b. Jika pengambilan adalah dengan tanpa pengembalian maka n = 9·8·7 dan n(A) = 2·1·7, sehingga

$$P(A) = \frac{2\cdot 1\cdot 7}{9\cdot 8\cdot 7} = \frac{1}{36}$$

Definisi 1.11 (Definisi Empiris / peluang posteriori)

Peluang terjadinya kejadian A dari suatu eksperimen adalah frekuensi relatif terjadinya A, jika eksperimen tersebut dilakukan/diulang sebanyak kali mungkin, artinya:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(A)}{n}$$

dengan n(A) = banyaknya hasil dari A dalam n ulangan.

Difenisi ini sebenarnya lebih masuk akal, sebab tidak diperlukan persyaratan "berat" seperti definisi klasik, tetapi suatu keberatannya adalah eksperimen harus/dapat dilakukan sebanyak mungkin.

Definisi ini biasanya digunakan sebagai interpretasi dari definisi klasik dan sebaliknya.

Contoh 1.15

1) Jika peluang penerbangan Yogyakarta-Bandung tepat waktu adalah 0,84, artinya: dari pengamatan yang cukup lama terhadap penerbangan Yogyakarta-Bandung, 84% menunjukkan penerbangan, tepat waktu.
2) Jika ramalan cuaca mengatakan peluang besok hujan adalah 30%, artinya: jika keadaan cuaca dari hari ke hari tidak berubah, 30%

hari diantaranya hujan.

3) Untuk mengatakan bahwa peluang seorang Ibu melahirkan bayi laki-laki adalah 75% atau 10%, tidak mungkin diperoleh dari mengamati suatu kelahiran saja. Tetapi harus diperoleh dari mengamati kelahiran Ibu-Ibu yang "cukup banyak" dan dalam keadaan kondisi yang sama.

Definisi 1.12 (Definisi Subjektif)

Peluang subjektif terjadinya suatu kejadian adalah peluang yang ditentukan berdasarkan pertimbangan-pertimbangan subyektif.

Biasanya dilakukan apabila definisi-definisi obyektif tidak dapat digunakan, misalnya dalam keadaan di mana eksperimen belum/ tidak pernah dilakukan.

- Sangat subyektif kepada pertimbangan seseorang.
- Biasanya menunjukkan keyakinan terhadap terjadinya atau tidak terjadinya kejadian yang menjadi perhatian.

Contoh 1.16

1) Berapakah peluang teman menyukai saya?
2) Berapakah peluang perang dunia ketiga akan meletus tahun depan?

Definisi 1.13 (Definisi Aksiomatis)

Misalkan S adalah ruang sampel suatu eksperimen, P adalah fungsi bernilai riil yang didefinisikan dari kejadian ke interval [0,1] P adalah fungsi peluang dan P(A) adalah peluang terjadinya kejadian A, jika dipenuhi sifat berikut.

$$P(A) \geq 0 \text{ untuk setiap } A \qquad (1)$$

$$P(S) = 1 \qquad (2)$$

Contoh 1.17

1) Jika suatu eksperimen menghasilkan A, B, C dan D adalah empat hasil yang mungkin dan saling asing dengan

   a) P(A) = 0,12, P(B) = 0,63, P(C) = 0,45 dan P(D) = -0,20 walaupun syarat (2) dan (3) dipenuhi tetapi (1) tidak dipenuhi, karena P(D) = -0,20 < 0

   b) P(A) = $\frac{9}{120}$, P(B) = $\frac{45}{120}$, P(C) = $\frac{27}{120}$ dan P(D) = $\frac{46}{120}$ syarat (2) tidak dipenuhi karena

   $$P(S) = P(A \cup B \cup C \cup D) = \frac{9}{120} + \frac{45}{120} + \frac{27}{120} + \frac{46}{120}$$

   $$= \frac{127}{120} > 1$$

2) Jika ruang sampel suatu eksperimen adalah diskrit dengan tak terhingga hasil yang mungkin, P dapat didefinisikan sedemikian sehingga $P(h_i)$ = $(\frac{1}{2})^i, i = 1,2,\cdots$ (1) berapapun nilai i akan selalu positif, (2) menggunakan deret geometri tak hingga $= \frac{1/2}{1-1/2} = 1$

   karena syarat (1), (2) dan (3) dipenuhi.

1.4 Aljabar Peluang

Perhitungan-perhitungan peluang bila memperhatikan definisi aksiomatis hanya dapat dilakukan apabila kejadian yang akan dicari peluangnya adalah gabungan dari beberapa kejadian yang saling asing, sehingga hubungan saling asing harus dijamin. Berikut ini akan disajikan rumus-rumus peluang yang sering digunakan untuk perhitungan peluang.

Beberapa Teorema Penting Mengenai Peluang

1) Jika A adalah suatu kejadian, maka

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Bukti

Karena $A \cup A^c = S$ dan $A \cap A^c = \emptyset$, maka

$P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$, dengan (3)

Karena (2), maka $1 = P(A) + P(A^c)$

Yang terbukti bahwa $P(A^c) = 1 - P(A)$

2) Jika A dan B suatu kejadian, maka

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

Bukti:

Karena $A = A \cap S = A \cap (B \cup B^c)$, maka dengan hukum distributif $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ dengan $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$, sehingga dengan (2) terbukti

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

3) Jika A dan B terjadi dan $A \subset B$, maka

$$P(A) \leq P(B)$$

Bukti

Karena $B = B \cap S = B \cap (A \cup A^c)$, maka dengan hukum distributif $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ dengan $(B \cap A) \cap (B \cap A^c) = \emptyset$, sehingga dengan definisi (3) diperoleh

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$$

Karena $A \subset B$, maka $P(B \cap A) = P(A)$. Dengan demikian terbukti bahwa

$$P(A) \leq P(B)$$

4) Jika $A \subset B$, maka $P(A) \leq P(B)$ dan $P(B-A) = P(B) - P(A)$

Bukti

a) Jika $A \subset B$, maka $P(A) \leq P(B)$ telah dibuktikan pada 3)

b) Akan ditunjukkan Jika $A \subset B$, maka $P(B-A)=P(B)-P(A)$

Pada konsep himpunan $B-A = B \cap A^c$, ...

5) Untuk setiap kejadian A, maka

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Dengan kata lain, peluang terletak antara 0 dan 1.

6) $P(\phi) = 0$ Dengan kata lain, kejadian mustahil memiliki peluang nol.

7) Jika $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, dengan $A_1, A_2, \ldots, A_n$, adalah kejadian-kejadian yang saling meniadakan maka

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

8) Jika A dan B dua kejadian sembarang, maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Hukum-hukum atau sifat-sifat yang berlaku untuk bentuk-bentuk hubungan antar kejadian yang telah didefinisikan atau kombinasinya disajikan berikut ini. Hukum-hukum atau sifat-sifat ini berguna dalam melakukan perhitungan-perhitungan antar kejadian,

- hukum. komutatif $A \cup B = B \cup A$,

  $A \cap B = B \cap A$
- hukum asosiatif $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- hukum distributif $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- hukum de Morgan $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$,

- $A \cup S = S$, $A \cap S = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup AC = S$, $A \cap A^C = \varnothing$, $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- $A \cap (B \cup B^C) = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$ dengan $A \cap B$ dan $A \cap B$ tidak mungkin terjadi bersama-sama

Contoh 1.18

1) Sebuah mata uang dilempar 100 kali, hitunglah peluang paling sedikit mendapatkan satu muka (M)

   Penyelesaian

   Jika A mendapatkan paling sedikit satu M,

   maka A^c = tidak mendapat paling sedikit M

   = hasil semua lemparan ada B

   Sehingga $n(A^c) = 1$. Dengan anggapan bahwa mata uang yang dilemparkan dalam keadaan seimbang, maka $n = 2^{100}$. sehingga

   $P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n} = \frac{1}{2^{100}}$

   Jadi $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

2) Jika dari satu kotak kartu diambil sebuah kartu secara random, maka peluang mendapat kartu jantung adalah kurang dari peluang mendapatkan kartu merah. Hal ini disebabkan karena kartu jantung adalah kartu merah, tetapi tidak sebaliknya.

Aturan Jumlah Peluang

Untuk setiap kejadian A, B berlaku $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Contoh 1.19

1) Sebuah dadu dilemparkan sekali. Tentukan peluang munculnya 2 atau 5.

Ruang sampelnya adalah S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Jika kita memberikan peluang yang sama terhadap titik-titik sampel ini, yang berarti kita mengasumsikan bahwa dadu tersebut adalah dadu ideal, maka

A : muncul angka 1

B : muncul angka 2

$P(A) = P(B) = \ldots = P(F) = \frac{1}{6}$

Kejadian munculnya 2 dan 5 diberi lambang $A \cup B$. Oleh karena itu,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

2) Jika peluang sebuah mobil berhenti di jalan karena rem macet adalah 0,23, karena ganti ban adalah 0,24 dan karena keduanya 0,09, hitunglah peluang mobil tersebut berhenti di jalan

Penyelesaian

Jika B = mobil berhenti di jalan, R = berhenti karena rem macet dan G = berhenti karena ganti ban, maka $B = R \cup G$ dengan $R \cap G \neq \varnothing$, sehingga

$P(B) = P(R \cup G) = P(R) + P(G) - P(R \cap G)$

$= 0{,}23 + 0{,}24 - 0{,}09 = 0{,}38$

3) Sebuah dadu dibuat sedemikian sehingga peluang muncul angka genap dua kali peluang muncul angka ganjil. Bila A = kejadian angka genap yang muncul dan B = kejadian muncul angka yang habis dibagi 3. Carilah $P(A \cap B)$ dan $P(A \cup B)$.

Penyelesaian

C : muncul angka genap

D : muncul angka ganjil

Karena jumlah semua peluang adalah 1 maka 3P(genap) + 3P(ganjil) = 1 dan bila setiap peluang diberi bobot p maka

$3(2p+3(p) = 1$ atau $p = \frac{1}{9}$. Dan karena A = {2,4,6}, B = {3,6} diperoleh $A \cap B$ = {6}, $A \cup B$ = {2, 3, 4, 6}, akibatnya $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$ dan $P(A \cup B) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

1.5 Peluang Bersyarat

Definisi 1.13

Jika A dan B adalah dua kejadian peluang bersyarat tejadi A dengan syarat B, ditulis $P(A|B)$, adalah

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{jika } P(B) > 0.$$

atau

$$P(A \cap B) \equiv P(B) \cdot P(A|B)$$

Catatan

- Jika P(B) = 0 yang artinya B tidak terjadi, maka $P(A|B)$ tidak didefinisikan
- Semua hukum-hukum atau sifat-sifat yang berlaku untuk peluang, juga berlaku untuk peluang bersyarat

Contoh 1.20

1) Peluang suatu penerbangan yang telah terjadwal teratur berangkat tepat waktu P(B) = 0,83, peluang tiba tepat waktu P(T) = 0,82 dan peluang berangkat dan tiba tepat waktu $P(B \cap T)$ = 0,78. Cari peluang bahwa pesawat (a) tiba tepat waktu bila diketahui berangkat tepat waktu, dan (b) berangkat tepat waktu jika diketahui tiba tepat waktu.

Penyelesaian:

a. Peluang pesawat sampai tepat waktu jika diketahui berangkat tepat waktu $P(T \mid B) = \dfrac{P(T \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}78}{0{,}83} = 0{,}94$

b. Peluang pesawat berangkat tepat waktu bila diketahui sampai tepat waktu: $P(B \mid T) = \dfrac{P(B \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}78}{0{,}82} = 0{,}95$

2) Tentukan peluang bahwa satu kali pelemparan sebuah dadu akan menghasilkan angka yang kurang dari 4 jika (a) tidak diberikan informasi lain dan (b) diketahui lemparan tersebut menghasilkan angka ganjil

Penyelesaian

a. Misalkan B menyatakan kejadian (kurang dari 4). Karena B = {1, 2, 3} gabungan dari munculnya 1, 2, atau 3, sehingga $P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

b. Misalkan A kejadian (bilangan ganjil), maka terlihat bahwa $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Selain itu $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Maka $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3}$

Jadi, pelemparan tersebut menghasilkan angka ganjil membuat peluang naik dari $\frac{1}{2}$ menjadi $\frac{2}{3}$.

3) Empat kartu diambil secara random satu persatu tanpa pengembalian. Tentukan probabilitas bahwa kartu yang terambil secara berturut-turut adalah As waru hitam (As_{wh}) As waru merah (As_{wm}), As wajik (As_{wj}), as semanggi (As_s)

Penyelesaian

$P(As_{wh} \cap As_{wm} \cap As_{w} \cap As_{s})$

$= P(As_{wh})\ P(As_{wm}|As_{wh}) \cdot P(As_{wj}|As_{wh} \cap As_{wm}) \cdot P(As_{sj}|As_{wh} \cap As_{wm} \cap As_{wj})$

$= \frac{1}{52}\frac{1}{51}\frac{1}{50}\frac{1}{49} = 0{,}079$

4) Kotak A berisi 10 bola merah (M_A) dan bila hijau (H_A). Kotak B berisi 12 bola merah (M_B) dan 17 bola hijau (H_B). Sebuah bola diambil secara random dari kotak A kemudian dikembalikan ke kotak B. Dari kotak B diambil sebuah bola secara random. Tentukan peluang bahwa 2 bola yang diambil berwarna hijau.

Penyelesaian

$$
\begin{aligned}
P(H_A \cap H_B) &= P(H_A)\ P(H_B|H_A) \\
&= \frac{15}{25} \cdot \frac{18}{30} \\
&= 0{,}36
\end{aligned}
$$

Teorema 6

Jika dua kejadian A_1 dan A_2 saling terpisah, maka

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{P[(A_1 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} \\
&= \frac{P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)]}{P(B)} \\
&= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} \\
&= P(A_1|B) + P(A_2|B)
\end{aligned}
$$

Definisi 1.14

Dua kejadian A dan B bebas jika dan hanya jika

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, atau$P(A/B) = P(A)$, atau $P(B/A) = P(B)$

dan Jika tidak demikian, A dan B tak bebas.

Definisi 1.15

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ saling bebas jika dan hanya jika

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdots P(A_n)$

dan

$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j), \quad i \neq j.$

Contoh 1.21

1) Jika dari suatu kotak yang berisi kelereng diambil beberapa kelereng dengan pengembalian, maka hasil setiap pengambilan saling bebas. Demikian dengan setiap hasil lemparan sebuah dadu atau mata uang lebih dari satu kali.
2) Jika A, B dan C adalah kejadian-kejadian dengan P(A) = P(B) = P(C) = ½ , $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$ = ¼ dan $P(A \cap B \cap C)$ = ¼ , apakah A, B dan C saling bebas?

   Penyelesaian

   Karena P(A) = P(B) = P(C) = ½ dan $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$ = ¼ maka setiap pasang A dan B, A dan C, B dan C saling bebas. Walaupun demikian karena $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. Maka A, B dan C tidak saling bebas.
3) Terdapat 3 dos berisi lampu. Dos 1 berisi 25 lampu dan 5 diantaranya rusak. Dos 2 berisi 35 lampu 10 diantaranya rusak. Dos 3 berisi 40 lampu dan 5 diantaranya rusak. Sebuah dos dipilih secara random, tentukan peluang bahwa produk yang diambil rusak!

   Penyelesaian

Misalkan A: lampu yang rusak

B_1: dos 1; B_2: dos 2; dan B_3: dos 3

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cap\ P(A \cap B_3)$$
$$= P(B_1)\ P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + P(B_3)P(A \mid B_3)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{30} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{40}$$

4) Di suatu daerah terdapat dua jenis lahan basah, yaitu lahan rawa pasang surut dan lahan gambut. Peluang lahan rawa pasang surut bisa ditanami padi adalah 0,85 dan peluang lahan gambut bisa ditanami padi adalah 0,54. Jika pada musim penghujan kedua lahan tersebut sama-sama bagus untuk dijadikan lahan persawahan, maka berapa peluang kedua lahan tersebut dapat ditanami padi pada musim penghujan?

Penyelesaian

P (A) = peluang lahan rawa pasang surut bisa ditanami padi
= 0,85

P (B) = peluang peluang lahan gambut bisa ditanami padi
= 0,54

Kejadian A dan B adalah kejadian saling bebas karena kejadian tesebut terjadi secara bersamaan yaitu kedua lahan tersebut bisa ditanam padi pada musim penghujan, tetapi kedua kejadian tidak saling memengaruhi. Kejadian penanaman padi di lahan rawa pasang surut tidak ada hubungannya dengan penanaman padi di lahan gambut, sehingga:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}85 \cdot 0{,}54 = 0{,}459$$

Jadi, peluang kedua lahan tersebut dapat ditanami padi pada musim penghujan adalah **0,459**.

1.6 Teorema Bayes

Jika B dan B' adalah peristiwa yang berhubungan dengan pengambilan pertama dari meja, dan jika A adalah suatu peristiwa yang berkaitan dengan hasil imbang kedua, maka itu berguna untuk mempertim-bangkan partisi A = $(A \cap B) \cup (A \cap B)$ untuk menghitung P(A), karena ini memisahkan A ke peristiwa yang melibatkan informasi tentang menarik. Secara umum, jika B_1, B_2, ... B_k saling terpisah (*mutually exclusive*) dan lengkap, dalam arti bahwa $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k = S$, maka $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_k)$

Hal ini berguna dalam teorema berikut.

Teorema 7

probabilitas total. Jika B_1, B_2, ... B_k adalah kumpulan peristiwa saling eksklusif dan lengkap, maka untuk setiap kejadian A.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) P(A|B_i)$$

Contoh 1.22

Kotak berisi 100 microchip, beberapa di antaranya diproduksi oleh pabrik 1 dan sisanya oleh pabrik 2, memiliki dua shift, dan microchip dari pabrik 1 dapat dikategorikan menurut mana perpindahan yang diproduksi mereka. Seperti sebelumnya, percobaan terdiri dari memilih microchip secara acak dari kotak dan pengujian untuk melihat apakah itu rusak. Apabila B_1 merupakan peristiwa yang diproduksi oleh perpindahan 1 (pabrik 1) B_2 peristiwa yang diproduksi oleh pergeseran 2 (pabrik 1) dan B_3 adalah yang diproduksi oleh pabrik 2. Seperti sebelumnya, A merupakan peristiwa memperoleh microchip yang rusak. Kategori yang diberikan oleh tabel 2

Jumlah microchip yang rusak dan non-cacat dari banyak kesamaan

	B_1	B_2	B_3	Total
Rusak	5	10	5	20
baik	20	25	35	80
Total	25	35	40	100

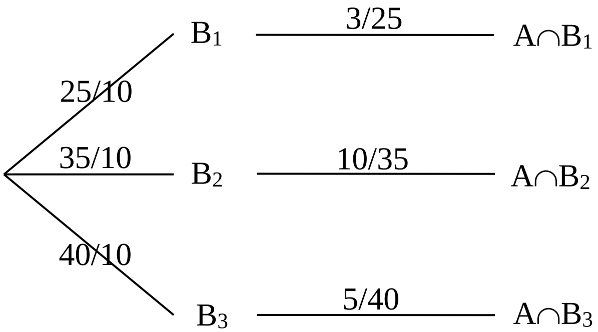
Berbagai probabilitas dapat dihitung langsung dari tabel. Sebagai contoh, $P(B_1) = 25/100$, $P(B_2) = 35/100$, $P(B_3) = 40/100$, $P(A|B_1) = 25/05$, $P(A|B_2) = 10/35$, dan $P(A|B_3) = 5/40$. adalah mungkin untuk menghitung P(A) baik secara langsung dari tabel, $P(A) = 20/100 = 0,20$, atau dengan menggunakan hukum probabilitas Total:

$$P(A) = P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

$$= \left(\frac{25}{100}\right)\left(\frac{5}{25}\right) + \left(\frac{35}{100}\right)\left(\frac{10}{35}\right) + \left(\frac{40}{100}\right)\left(\frac{5}{40}\right)$$

$$= 0,05 + 0,10 + 0,05 = 0,20$$

Masalah ini diilustrasikan dengan diagram pohon berikut.



Gambar 3: Diagram pohon ilustrasi

Contoh 1.23

Mempertimbangkan variasi berikut dalam contoh 1.13. microchip diurutkan menjadi tiga terpisah boxes. Box 1 berisi 25 microchip dari perpindahan 1, 2 kotak berisi 35 microchip dari perpindahan 2, dan 3 kotak berisi sisa 40 microchip dari pabrik 2. Percobaan baru terdiri dari memilih kotak secara acak, kemudian memilih microchip dari kotak. seperti gambar ilustrasi berikut

5 rusak 20 baik	10 rusak 25 baik	5 rusak 35 baik

Pada kasus ini tidak mungkin menghitung P(A) langsung dari tabel di atas, tetapi mungkin menggunakan persamaan pada teorema berikut dengan mendefinisikan kembali B_1, B_2 dan B_3 berturut-turut untuk pilihan box 1, box 2, box 3. Dengan demikian, probabilitas baru untuk B_1, B_2, dan B_3 adalah $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$, dan P (A) =

Teorema 8 Aturan Bayes

Jika diasumsikan keadaan seperti teorema 11 maka untuk j = 1, 2, ..., k,

$$P(B_j|A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P\ (A)}$$

Untuk data pada contoh sebelumnya peluang bersyarat bahwa microchip diperoleh dari box 1, memberikan peluang kerusakan seperti berikut

$$P(B_1|A) = \frac{(1/3)(5/25)}{(1/3)(5/25)+(1/3)(10/35)+(1/3)(5/40)}$$

$$= \frac{56}{171} = 0{,}327$$

Secara sama, $P(B_2|A) = 80/171 = 0{,}468$ dan

$P(B_3|A) = 31/171 = 0{,}205$.

perhatikan bahwa ini berbeda dari probabilitas bersyarat, $P(B) = 1/3 = 0.333$. Proporsi ini mencerminkan perbedaan dari item yang rusak dalam kotak. Dengan kata lain, karena kotak 2 memiliki proporsi yang lebih tinggi dari barang cacat, memilih item yang rusak secara efektif meningkatkan kemungkinan bahwa itu dipilih dari kotak 2.

Contoh 1.24

Di sebuah negara, diketahui bahwa 2% dari penduduk-nya menderita sebuah penyakit langka, 97% dari hasil tes klinik adalah positif bahwa seseorang menderita penyakit itu. Ketika seseorang yang tidak menderita penyakit itu dites dengan tes yang sama, 9% dari hasil tes memberikan hasil positif yang salah. Jika sembarang orang dari negara itu mengambil test dan mendapat hasil positif, berapakah peluang bahwa dia benar-benar menderita penyakit langka itu?

Secara sepintas, nampaknya bahwa ada peluang yang besar bahwa orang itu memang benar-benar menderita penyakit langka itu. Karena kita tahu bahwa hasil test klinik yang cukup akurat (97%). Tetapi apakah benar demikian? Marilah kita lihat perhitungan matematika-nya.

Marilah kita lambangkan informasi di atas sebagai berikut:

- B = Kejadian tes memberikan hasil positif.
- B^c = Kejadian tes memberikan hasil negatif.
- A = Kejadian seseorang menderita penyakit langka itu.

- A^c = Kejadian seseorang tidak menderita penyakit langkat itu.

Kita ketahui juga peluang dari kejadian-kejadian berikut:

- P (A) = 2%
- P (A^c) = 98%
- P (B | A) = 97%
- P (B | A^c) = 9%

Dengan menggunakan rumus untuk peluang bersyarat, dapat kita simpulkan peluang dari kejadian-kejadian yang mungkin terjadi dalam tabel di bawah ini:

Misalnya seseorang menjalani tes klinik tersebut dan mendapatkan hasil positif, berapakah peluang bahwa ia benar-benar menderita penyakit langka tersebut? Dengan kata lain, kita mencoba untuk mencari peluang dari A, dimana B atau P (A | B).

Dari tabel di atas, dapat kita lihat bahwa P (A|B) adalah peluang dari positif yang benar dibagi dengan peluang positif (benar maupun salah), yaitu 0,0194/(0,0194 + 0,0882) = 0,1803.

Kita dapat juga mendapatkan hasil yang sama dengan menggunakan rumus teorema Bayes di atas:

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A)P(A)}$$

$$= \frac{97\% \times 2\%}{(97 \times 2\%) + (9\% \times 98\%)}$$

$$= \frac{0{,}0194}{0{,}0194 + 0{,}0882}$$

$$= \frac{0{,}0194}{0{,}1076} = 0{,}1803$$

Hasil perhitungan ini sangat berbeda dengan intuisi kita di atas. Peluang bahwa orang yang mendapat hasil tes positif itu benar-benar menderita penyakit langka tidak sebesar yang kita bayangkan. Cuma ada sekitar 18% kemungkinan bahwa dia benar-benar menderita penyakit itu.

Mengapakah demikian?

Ketika mengira-ngira peluangnya, seringkali kita lupa bahwa dari seluruh populasi negara itu, hanya 2% yang benar-benar menderita penyakit langka itu. Jadi, walaupun hasil tes adalah positif, peluang bahwa seseorang menderita penyakit langka itu tidaklah sebesar yang kita bayangkan.

Kita bisa juga meninjau situasi di atas sebagai berikut. Misalnya populasi negara tersebut adalah 1000 orang. Hanya 20 orang yang menderita penyakit langka itu (2%). 19 orang dari antaranya akan mendapat hasil tes yang positif (97% hasil positif yang benar). Dari 980 orang yang tidak menderita penyakit itu, sekitar 88 orang juga akan mendapat hasil tes positif (9% hasil positif yang salah).

Jadi, 1000 orang di negara itu dapat kita kelompokkan sebagai berikut:

- 19 orang mendapat hasil tes positif yang benar
- 1 orang mendapat hasil tes negatif yang salah
- 88 orang mendapat hasil tes positif yang salah
- 892 orang mendapat hasil tes negatif yang benar

Bisa kita lihat dari informasi di atas, bahwa ada (88 + 19) = 107 orang yang akan mendapatkan hasil tes positif (tidak perduli bahwa dia benar-benar menderita penyakit langka itu atau tidak). Dari 107 orang ini, berapakah yang benar-benar menderita penyakit? Hanya 19 orang dari 107, atau sekitar 18%.

Contoh 1.25

Tiga jenis pilihan tanaman palawija ingin ditanam di lahan rawa lebak. Peluang terpilihnya tanaman singkong adalah 0,2. Peluang terpilihnya tanaman ubi jalar adalah 0,4 dan peluang terpilihnya tanaman jagung adalah 0,6. Jika tanaman singkong yang dipilih, maka peluang peningkatan produktivitas pertanian adalah 0,3. Jika tanaman ubi jalar yang dipilih, peluang peningkatan produktivitas pertanian adalah 0,5. Jika tanaman jagung yang dipilih, maka peluang peningkatan produktivitas pertanian adalah 0,8. <u>Tentukan:</u>

a. Peluang peningkatan produktivitas pertanian
b. Bila diketahui terjadinya peningkatan produktivitas pertanian, berapa peluang bahwa ternyata tanaman singkong ditanam di lahan rawa lebak?

Penyelesaian

A : tanaman yang meningkatkan produktivitas pertanian

B_1 : tanaman singkong yang dipilih

B_2 : tanaman ubi jalar yang dipilih

B_3 : tanaman jagung yang dipilih

a. Peluang peningkatan produktivitas pertanian

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) \\
&= (0,2)(0,3) + (0,4)(0,5) + (0,6)(0,8) \\
&= 0,06 + 0,2 + 0,48 \\
&= 0,074
\end{aligned}
$$

Jadi peluang peningkatan produktivitas pertanian adalah **0,074**.

b. Peluang tanaman singkong ditanam di lahan rawa lebak jika diketahui terjadinya peningkatan produktivitas pertanian

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \cap B1)}{P\ (A)}$$

$$= \frac{P(B1)P(A|B1)}{P(A)}$$

$$= \frac{(0,2)(0,3)}{0,074} = \frac{0,06}{0,074} = 0,81$$

Jadi, jika diketahui terjadinya peningkatan produktivitas pertanian, peluang bahwa ternyata tanaman singkong ditanam di lahan rawa lebak adalah **0,81**.

1.7 Soal-soal Latihan

1. Sebuah kartu diambil secara acak dari setumpuk kartu remi biasa yang terdiri dari 52 kartu. Jelaskan ruang sampelnya jika jenis kartu (a) tidak diperhatikan dan (b) diperhatikan.
2. Sebuah mesin bola karet menghasilkan bola warna merah, hitam dan hijau
   a. Tulis kemungkinan ruang sampelnya.
   b. Tentukan semua kejadian yang mungkin
   c. Jika M adalah peristiwa merah, tulis hasil yang bukan M
   d. Jika H peristiwa hijau berapa $H \cap M$
3. Dua bola karet dan mesin pada soal nomor 2 diperoleh dengan dua kali percobaan, dengan urutan hasil diperhatikan asumsikan bahwa sekurang-kurangnya ada dua bola dari setiap warna pada mesin
   a. Bagaimana ruang sampelnya
   b. Berapa banyak kejadian yang mungkin yang memuat 8 hasil.
   c. Selanjutnya peristiwa-peristiwa dianggap peristiwa sederhana dengan C_1 = terambil bola merah pada

pengambilan pertama, C_2 = terambil sekurang-kurangnya sebuah bola warna merah.

4. Surat lamaran dua orang pria untuk jabatan di suatu perusahaan diletakan dalam suatu map yang sama dengan surat lamaran dua orang wanita. Ada dua jabatan yang lowong, yang pertama jabatan direktur dipilih secara acak dari keempat pelamar. Jabatan kedua wakil direktur, dipilih secara acak dari ketiga sisanya. Dengan menggunakan lambang P_2W_1, misalnya untuk menyatakan kejadian sederhana bahwa jabatan pertama diisi oleh pelamar pria kedua dan jabatan kedua diisi oleh pelamar wanita pertama.
   a. Tuliskan anggota ruang sampel S;
   b. Tuliskan anggota S yang berkaitan dengan kejadian A bahwa lowongan direktur diisi oleh pelamar pria;
   c. Tuliskan anggota S yang berkaitan dengan kejadian B bahwa satu dari dua lowongan diisi oleh pelamar pria;
   d. Tuliskan anggota S yang berkaitan dengan kejadian C bahwa tidak ada lowongan yang diisi oleh pelamar pria;
5. Ada 4 golongan darah: O,A,B,AB. Secara umum setiap orang dapat menerima darah dari yang lain asalkan segolongan dan seseorang dapat menerima darah dari golongan darah O dan semua donor dan seseorang donor ke donor berikutnya.
   a. Catat hasil yang mungkin (urutan diperhatikan)
   b. Catat semua kejadian dengan syarat bahwa donor ke 2 dapat menerima darah dari ke 1
   c. Catat hasil dengan syarat setiap donor dapat menerima darah yang lain.

6. Sejumlah partikel alfa dipancarkan oleh sampel radio aktif pada interval waktu tertentu
   a. Berikan ruang sampelnya
   b. saat mulai sampai sinar alfa dipancarkan, berikan ruang sampelnya
7. Suatu eksperimen yaitu ingin memeriksa berapa bagian kandungan suatu logam itu adalah emas. Buat ruang sampelnya.
8. Aki mobil diseleksi dan dites selanjutnya sampai suatu waktu aki tersebut tidak dapat dipakai lagi, tentukan ruang sampelnya.
9. Jika 4 orang Amerika, 3 orang Perancis dan 3 orang Inggris harus duduk dalam satu baris, berapa banyak pengaturan kursi yang mungkin ketika orang-orang dari kebangsaan yang sama harus duduk di samping satu sama lain?
10. Suatu tas berisi 6 bola putih, 4 merah dan 10 hitam. Dua bola diambil secara random. Tentukan peluang bahwa
    a) kedua bola hitam
    b) satu bola hitam dan merah lainnya
11. Dari satu kotak kartu, diambil 2 secara random. Tentukan peluang bahwa terambil satu raja dan lainnya ratu.
12. Suatu masalah statistik diberikan kepada 3 pelajar A, B dan C yang diselesaikan berturut-turut ½ , ¾ , ¼ . Berapa peluang masalah diselesaikan jika semua bekerja independen.
13. Dari 12 orang pemain bola basket
    a) banyaknya tim yang dapat disusun?
    b) jika akan disusun 2 tim, maka banyaknya tim yang dapat disusun ada?
14. Buktikan pernyataan di bawah ini:

a) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

b) $\binom{n}{r} = \binom{n-r}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

15. Berikan analisis verifikasi $\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}, 1 \le k \le n$ dan jelaskan

16. Banyaknya sampel random berukuran n yang dapat diambil dari suatu populasi berukuran N ada ...

17. Banyaknya cara pengelompokkan 9 orang menjadi tiga kelompok dengan masing-masing kelompok terdiri dari 4, 3, dan 2 orang ada ...

18. Berapa carakah 5 kelereng dengan warna yang berbeda dapat disusun dalam satu baris?

19. Kita diminta mengatur posisi duduk 5 orang pria dan 4 orang wanita dalam satu baris di mana wanita menduduki posisi yang genap. Berapa banyak susunan yang mungkin?

20. Dari 5 ahli matematika dan 7 ahli fisika, dibentuk sebuah panitia yang terdiri dari 2 ahli matematika dan 3 ahli fisika. Dalam berapa carakah hal ini dapat dilakukan jika (a) ahli matematika dan ahli fisika manapun dapat dimasukkan, (b) ada 1 ahli fisika tertentu yang harus termasuk di dalam panitia, (ada dua ahli matematika tertentu yang tidak boleh termasuk di dalam panitia?

21. Dari 7 konsonan dan 5 vokal, berapa banyak kata yang dapat dibentuk, terdiri dari 4 konsonan berbeda dan 3 vokal berbeda? Kata-kata tersebut tidak perlu memiliki arti.

22. Berapa banyak susunan linier yang berbeda yang ada dari huruf A, B, C, D, E, F untuk:
    a. A dan B bersebelahan sebelah satu sama lain?
    b. A sebelum B?
    c. A sebelum B dan B sebelum C?
    d. A sebelum B dan C sebelum D?
    e. A dan B bersebelahan dan C dan D juga bersebelahan?
23. Ditentukan A dan B dua kejadian sehingga P(A) = ¾ dan P(B) = 5/8, tunjukkan bahwa (a) $P(A \cup B) \geq ¾$ (b) $\frac{3}{8} \leq P(A \cap B) \leq \frac{5}{8}$
24. Jika A dan B merupakan kejadian sedemikian sehingga $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ dan $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$. Tentukan (a) P(A), (b) P(B), (c) $P(A \cap \overline{B})$
25. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah n kejadian yang independen dengan P(Ai) = $1 - \alpha^{-i}$, i = 1, 2, ..., n. Tentukan nilai dari $P(A_1, A_2, \ldots, A_n)$
26. Aki mobil diseleksi dan diuji selanjutnya sampai suatu waktu aki tersebut tidak dapat digunakan lagi, tentukan ruang sampelnya
27. Ada 100 bola karet yang terdiri dari 20 merah, 30 hitam, dan 50 hijau.
    a. Dapatkah dikatakan bahwa model peluang dari bola tersebut adalah P(R) = 0,2, P(B) = 0,3 dan P(G) = 0,5
    b. Jika warna Y juga ada maka dapatkah dikatakan bahwa model peluangnya adalah P(R) = 0,2, P(B) = 0,3 P(G) = 0,5 dan P(Y) = 0,1
28. Pada soal no. 3 terdapat 9 kemungkinan hasil dalam ruang sampel adalah sama tentukanlah
    a. P(keduanya merah)

b. $P(C_1)$

c. $P(C_2)$

d. $P(C_1 \cap C_2)$

e. $P(C_1' \cap C_2)$

f. $P(C_1 \cup C_2)$

29. Jika suatu eksperimen dilakukan, satu dan hanya satu pasti A_1, A_2 atau A_3 akan terjadi, tentukan $P(A_1)$, $P(A_2)$ dan $P(A_3)$ dengan asumsi bahwa

    a. $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$
    b. $P(A_1) = P(A_2)$ dan $P(A_3) = ½$
    c. $P(A_1) = 2P(A_2) = 3\,P(A_3)$

30. Sebuah koin seimbang ditos empat kali. Tulis hasil yang mungkin dan hitung peluang dari setiap kejadian berikut ini.

    a. Tepat 3 muka yang muncul.
    b. Sekurang-kurangnya 1 muka yang muncul
    c. Jumlah muka = jumlah belakang
    d. Munculnya muka lebih banyak dari belakang

31. Dua guru honor ditugasi untuk memberi kursus secara random pada mata pelajaran trigonometri (t), aljabar (a) dan dan kalkulus (k). Tuliskan ruang sampel dan tentukan peluang bahwa mereka mengajar kursus yang berbeda.

32. Jika A dan B adalah suatu peristiwa, tunjukkan bahwa:

    a. $P(A \cap B') = P(A) + P(A \cap B)$
    b. $P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B')$

33. Jika $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$ dan $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. Tentukanlah

    a. $P(B')$

b. $P(A \cup B')$

c. $P(B \cap A')$

d. $P(A' \cup B')$

34. Bila $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{8}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, dengan A, B, dan C saling lepas, hitung

a. $P(A \cup B \cup C)$

b. $P(A' \cap B' \cap C')$

35. Peluang A menang pada perlombaan pertama = 0,7, peluang menang pada perlombaan kedua = 0,6 dan peluang menang pada perlombaan kedua-duanya = 0,5, tentukan peluang dari

a. A menang pada suatu perlombaan (sekurangnya 1 perlombaan)

b. A menang tepat pada satu perlombaan

c. Peluang tidak menang pada kedua perlombaan.

36. Suatu keluarga mempunyai 2 TV, satu berwarna dan yang lainnya hitam-putih. Jika A kejadian TV warna hidup, dan B adalah kejadian TV hitam-putih hidup. P(A) = 0,4, P(B) = 0,3 dan $P(A \cup B) = 0,5$. Tentukanlah

a. P(keduanya hidup)

b. P(TV warna hidup yang lainnya mati)

c. P(tepat 1 hidup)

d. P(kedua-duanya mati)

37. Sebuah kotak berisi 3 kartu baik dan 2 kartu jelek. Pemain A mengambil sebuah kartu kemudian B sebuah kartu. Tentukan

c. P(A baik)

d. P(B baik | A baik)

e. $P(B \text{ baik} \mid A \text{ jelek})$

38. Suatu perusahaan perumahan menawarkan rumah dalam 4 pilihan model, 3 macam sistem pendingin, dengan atau tanpa garasi, dan dengan atau tanpa beranda. Berapa macam pilihan yang berbeda tersedia bagi seorang pembeli.

39. Tiap mahasiswa baru harus mengambil mata kuliah fisika, kimia dan matematika. Bila seorang mahasiswa dapat memilih satu dari 6 kuliah fisika, satu dari 4 kuliah kimia, dan satu dari 4 kuliah matematika, berapa banyak cara dia dapat menyusun programnya.

40. Dengan berapa carakah 5 pohon yang berlainan dapat ditanam pada suatu lingkaran.

41. Sembilan orang pergi ke gunung dengan 3 mobil, masing-masing dapat membawa 2, 4, dan 5 penumpang. Berapa carakah dapat dibuat untuk membawa kesembilan orang tersebut ke gunung?

42. Sebuah mata uang dilemparkan 100 kali, hitunglah peluang mendapatkan 100M
    a) mata uang dalam keadaan seimbang
    b) mata uang tidak dalam keadaan seimbang

43. Sebuah tas berisi 5 bola biru dan 3 merah, seorang anak mengambil sebuah bola selanjutnya mengambil sebuah bola yang lain tanpa dikembalikan, tentukan
    a. Peluang 2 bola biru
    b. Peluang 1 biru dan 1 merah
    c. Peluang sekurang-kurangnya 1 biru
    d. Peluang 2 bola merah.

44. Tiga komponen yang saling bebas dipasang seri, di mana setiap komponen gagal dengan kemungkinan p. Berapa peluang bahwa pada sistem pemasangan komponen secara seri tersebut tidak gagal.

45. Tiga komponen yang saling bebas dipasang paralel, di mana setiap komponen gagal dengan kemungkinan p. Berapa peluang bahwa pada sistem pemasangan komponen secara paralel tersebut tidak gagal.

46. Jika sebuah kotak berisi 5 kelereng putih, 3 kelereng biru, 2 kelereng hitam diambil 2 kelereng secara random tanpa pengembalian, hitunglah peluang mendapat

    a) kedua kelereng biru
    b) kelereng biru pada pengambilan pertama
    c) kelereng biru pada pengambilan kedua.

47. Kata kode dibentuk dari huruf A sampai Z

    a. Berapa banyak kata yang dapat dibentuk tanpa mengulang setiap kata.
    b. Berapa banyak kata dari 5 huruf yang dapat dibentuk jika tidak ada huruf berulang
    c. Berapa banyak kata dari 5 huruf yang dapat dibentuk jika huruf dapat diulang

48. Nomor plat kendaraan bermotor berisi 2 huruf yang diikuti 4 angka dan diakhiri 2 huruf kembali, seperti DA 7389 TN atau B 5457 FKF.

    a. Berapa banyak plat yang mungkin jika huruf dan angka bisa berulang untuk Banjarmasin
    b. Jika 2 digit huruf awal dapat berulang dan lainnya tidak.

c. Berapa banyak plat pada b) yang mempunyai nomor 4 digit tidak lebih dari 5500

49. Dalam berapa cara 3 laki-laki dan 3 perempuan dapat duduk dalam satu barisan jika laki-laki dan perempuan harus duduk bergantian

50. Berapa banyaknya nomor (yang terdiri dari 3 angka dan mempunyai angka ganjil) yang dapat dibuat dari angka 0, 1, 2, 3, 4 jika angka dapat diulang tetapi digit pertama tidak boleh nol.

51. Ada 10 objek yang berbeda diambil secara random 4 objek dengan pengembalian
    a. Berapa peluang bahwa tidak ada objek yang berulang lebih dari 1 kali
    b. Berapa peluang bahwa sekurang-kurangnya ada satu objek yang diperoleh lebih dari 1 kali

52. Sebuah grup terdiri dari 17 pria dan 13 wanita, akan dipilih 5 panitia, tentukan
    a. Berapa panitia yang mungkin dapat dibentuk
    b. Berapa banyak panitia yang mungkin dapat dibentuk dari 3 pria dan 2 wanita
    c. Jawab b jika satu bagian pria sendiri menjadi bagian atau ikut di dalamnya

53. Sebuah perkumpulan sepak bola mempunyai 49 pemain yang mampu menjadi tim spesial
    a. Jika 11 harus dipilih untuk bermain, berapa banyak tim yang mungkin

b. Jika dari 49 pemain itu ada 21 pemain penyerang dan 25 pemain bertahan, berapa peluang bahwa tim yang dipilih menjadi penyerang 5 pemain dan 6 pemain bertahan.

54. Ada 7 orang melamar suatu pekerjaan sebagai kasir di suatu department store
    a. Jika hanya 3 calon yang cocok, dalam berapa cara ketiga orang calon pekerja itu dipilih dari 7 peserta.
    b. Jika terdapat 3 laki-laki dan 4 perempuan mempunyai kualitas yang sama, kemudian ketiga pekerjaan dipilih secara random maka berapa peluang bahwa ketiga yang dipekerjakan tersebut sama jenis kelaminnya.
    c. Jika ada 4 perempuan dan 3 laki-laki maka dalam berapa carakah peserta itu akan antri jika 3 yang pertama perempuan
55. Dengan berapa cara 10 murid antri masuk kelas jika sepasang murid menolak mengikuti yang lain dalam barisan
56. Sebuah mesin mempunyai 9 tombol di dalam satu baris, setiap tombol mempunyai 3 posisi yaitu a, b dan c.
    a. Berapa banyak carakah yang dapat disusun di kedudukan tersebut.
    b. Soal a), tetapi jika setiap posisi menggunakan 3 cara.
57. Suatu kotak berisi 4 CD dengan warna yang berbeda. Disk 1 berwarna merah dan hijau, disk 2 berwarna merah dan putih, disk 3 berwarna merah dan hitam, disk 4 berwarna hijau dan putih. Satu disk dipilih secara random dari dalam kotak. Tentukan peristiwa berikut. A = satu sisi merah, B = satu sisi hijau, C = satu sisi putih, D satu sisi hitam.

a. Apakah A dan B peristiwa bebas atau tidak bebas.
b. Apakah B dan C peristiwa bebas atau tidak bebas.
c. Apakah sebarang pasangan saling lepas atau tidak.

II. VARIABEL RANDOM DAN DISTRIBUSI PELUANG

2.1 Variabel Random

Misalkan untuk setiap titik dari suatu ruang sampel kita pasangkan sebuah bilangan. Dengan demikian terdefinisi suatu fungsi pada ruang sampel tersebut. Fungsi ini disebut sebagai variabel random. Fungsi ini diberi lambang huruf besar seperti X atau Y.

Variabel Random Univariat

Variabel random univariat, ditulis X atau $X(\cdot)$ adalah fungsi bernilai riil yang didefinisikan pada S.

$X(\cdot)$ harus didefinisikan sedemikian sehingga $A_r = \{s \in S \mid X(s) \le r\}$ untuk setiap bilangan riil r.

Jika nilai-nilai variabel random diskrit, maka disebut variabel random diskrit. Sedangkan nilai-nilai variabel random kontinu disebut variabel random kontinu.

Contoh 2.1

1) Misalkan sebuah koin logam dilemparkan dua kali sehingga ruang sampelnya adalah S = {MM, MB, BM, BB}. Misalkan X menyatakan banyaknya muka yang muncul. Untuk setiap titik sampel kita dapat memasangkan suatu bilangan untuk X seperti tabel di bawah. Jadi sebagai contoh MM (dua muka), X = 2 sementara untuk MK (satu muka), X = 1. Maka X adalah variabel random.

Titik Sampel	MM	MB	BM	BB
X	2	1	1	0

Perlu diketahui bahwa ada banyak variabel random lain yang juga dapat didefinisikan untuk ruang sampel ini, sebagai contoh kuadrat dari banyaknya muka dikurangi banyaknya belakang.

2) Jika suatu eksperimen adalah melempar sebuah mata uang n kali, maka

   X = banyaknya M yang tampak adalah suatu variabel random (univariat) diskrit dengan x = nilai-nilai yang mungkin dari x = 0, 1, 2, …, n.

   Y = banyaknya B yang tampak adalah suatu variabel random diskrit dengan y = 0, 1, 2, …, n.

3) Jika suatu eksperimen adalah mengamati seorang mahasiswa, maka

   X = tinggi badan adalah variabel random kontinu

   Y = berat badan adalah variabel random kontinu

Variabel Random Bivariat

Jika X_1 dan X_2 adalah variabel random-variabel random univariat yang didefinisikan dalam ruang peluang yang sama, maka pasangan (X_1, X_2) adalah suatu <u>variabel random bivariat</u>.

Contoh 2.2

1) Jika sebuah dadu dilemparkan dua kali dan X_i = hasil lemparan ke-i, i = 1, 2, maka (X_1, X_2) adalah suatu variabel random bivariat
2) Jika suatu eksperimen adalah mengamati seorang mahasiswa dengan X_1 = tinggi badan dan X_2 = berat badan, maka (X_1, X_2) adalah suatu variabel random bivariat.

Variabel Random Multivariat

Jika X_1, X_2, …, X_n adalah variabel random-variabel random univariat yang didefinisikan dalam ruang peluang yang sama, maka (X_1, X_2, …, X_n) adalah suatu variabel random multivariat.

Contoh 2.3

Jika seorang dokter memeriksa 10 pasien dan X_i = hasil pemeriksanaan tekanan darah pasien ke-i, i = 1, 2, …., 10, maka (X_1, X_2, …, X_{10}) adalah suatu variabel random multivariat.

2.2 Variabel Random Diskrit

Definisi 2.1

Jika himpunan dari semua nilai yang mungkin dari suatu variabel random merupakan himpunan nilai terhitung (countable) x_1, x_2, ..., x_n atau x_1, x_2, ... maka X disebut variabel random diskrit. Fungsi f(x) = P[X=x], $x = x_1, x_2, ...$

Memberikan peluang untuk setiap nilai x yang mungkin disebut fungsi kepadatan peluang (fkp) diskrit

Suatu himpunan terhitung adalah apabila dapat dihubungkan dengan bilangan asli, atau himpunan dapat dibuat korespondensi satu-satu dengan himpunan bilangan asli.

Teorema 2.1

Suatu fungsi f(x) merupakan fkp diskrit jika dan hanya jika keduanya memenuhi sifat untuk himpunan countable infinite (tak hingga terhitung) dari bilangan real $x_1, x_2, ...$

$$f(x_i) \geq 0 \qquad (1)$$

untuk setiap x_i dan

$$\Sigma f(x_i) = 1 \qquad (2)$$

Contoh 2.4

Suatu pengiriman 8 komputer yang sama ke suatu toko terdapat 3 yang cacat. Bila suatu sekolah membeli 2 komputer ini secara random, cari distribusi peluang banyaknya yang cacat.

Penyelesaian: Misalkan X variabel random dengan nilai x kemungkinan banyaknya komputer yang cacat dibeli sekolah tersebut. Maka x dapat memperoleh setiap nilai 0, 1, dan 2.

$$f(0) = P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$

Jadi fungsi kepadatan peluang X adalah

$$f(2) = P(X=2) = \frac{\binom{3}{x}\binom{5}{2-x}}{\binom{8}{2}}, \ x = 0, 1, 2$$

Contoh 2.5

Kita ingin melemparkan dadu 12 sisi (*dodecahedral*) dua kali. Jika setiap permukaan ditandai dengan suatu bilangan bulat 1 hingga 12, maka tiap-tiap nilai mempunyai peluang sama. Didefinisikan bahwa tiap-tiap nilai x adalah suatu bilangan ganjil 2x – 1 sehingga fkp dari X berbentuk

f(x) = c(2x-1); untuk x = 1, 2, ..., 12

Dengan menggunakan perhitungan diperoleh bahwa

$$1 = \sum_{x=1}^{12} f(x) = c\sum_{x=1}^{12}(2x-1) = c\left[2\sum_{x=1}^{12} x - 12\right]$$

$$= c\left[\frac{2.(12)(13)}{2} - 12\right] = 144c, \text{ diperoleh } c = 1/144$$

Jadi f(x) = $\frac{2x-1}{144}$

Distribusi peluang yang sesuai dengan peluang-peluang pada interval dari bentuk (-∞,*x*] untuk semua bilangan real *x*. Peluang yang sesuai dengan kejadian yang diberikan dengan suatu fungsi yang disebut fungsi distribusi kumulatif.

Fungsi distribusi kumulatif didefinisikan seperti definisi 2.2 berikut:

Definisi 2.2

Fungsi distribusi kumulatif (fdk) dari variabel random diskrit X dengan fungsi kepadatan peluang f(x) didefinisikan untuk sebarang bilangan real x dengan

$$F(x) = P[X \le x] = \sum_{t \le x} f(t), \quad \text{untukx} = ..., -1, 0, 1, ...$$

Bila dihubungkan dengan fkp, maka berlaku sifat bahwa selisih fdk dikurangi fdk sebelumnya, seperti teorema 2.2 berikut.

Teorema 2.2

Misalkan X variabel random diskrit dengan fkp f(x) dan fdk F(x). Jika nilai yang mungkin dari X diurutkan secara naik, $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ *maka* $f(x_1) = F(x_1)$ *dan untuk i>1*

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Selanjutnya jika $x \le x_1$, maka $F(x) = 0$ dan untuk sebarang bilangan riil x

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

Dengan jumlah diambil atas semua indek i sehingga $x_i \le x$.

Contoh 2.6

Bila 50% mobil yang dijual oleh suatu agen bermesin diesel, cari rumus distribusi peluang banyaknya mobil bermesin diesel bagi ke 4 mobil berikutnya yang dijual oleh agen tersebut.

Jawab karena peluang menjual mobil bermesin diesel atau bensin 0,5, ke $2^4 = 16$ titik pada ruang sampel mempunyai peluang yang sama. Kejadian menjual x mobil bermesin diesel dan 4-x bermesin bensin dapat terjadi dalam $\binom{4}{x}$ cara, x bernilai 0, 1, 2, 3 atau 4. Jadi fungsi kepadatan peluang $f(x) = P(X=x) = \dfrac{\binom{4}{x}}{16}$ untuk x = 0, 1, 2, 3, 4.

Teorema 2.3

Suatu fungsi F(x) merupakan fdk untuk variabel random X jika dan hanya jika memenuhi sifat berikut

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$$

a < b berakibat F(a) $\leq$ F(b)

Contoh 2.7

Suatu kotak berisi 4 chips. Dua dilabel 2, satu dilabel 4 dan yang lain dilabel 8. Rata-rata bilangan untuk 4 chips tersebut adalah (2 + 2 + 4 + 8)/4 = 4. Percobaan memilih satu chips secara random dan dicatat bilangannya dan dihubungkan dengan suatu variabel random diskrit X mempunyai nilai yang berbeda yaitu, x = 2, 4 atau 8 dengan f(2) = $\frac{1}{2}$

f(4) = f(8) = $\frac{1}{4}$. Berhubungan dengan nilai harapan atau mean

μ = E(x) = 2($\frac{1}{2}$) + 4($\frac{1}{4}$) + 8($\frac{1}{4}$) = 4

Perlu dicatat juga bahwa model pemilihan dari suatu kumpulan yang banyak dengan nilai besar dari X dengan proporsi berturut-turut dalam kumpulan f(x) sama seperti contoh yang ditampilkan.

2.3 Variabel Random Kontinu

Definisi 2.4

Fungsi distribusi kumulatif F(x) suatu variabel random kontinu X dengan fungsi kepadatan peluang f(x) diberikan oleh

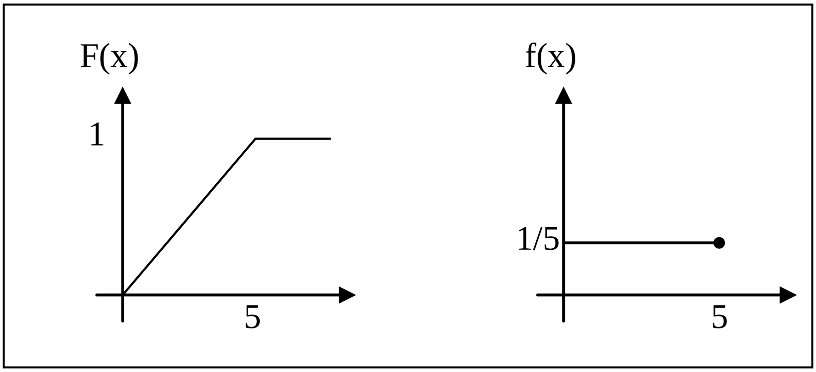
F(x) = P(X$\leq$x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, untuk $-\infty<x<\infty$

Contoh 2.8

Setiap hari orang bekerja naik bus ke tempat kerja. Bus baru datang setiap 5 menit, secara umum kedatangan orang ke tempat perhentian bus secara random pada waktu antara kedatangan bus. Kita dapat mengambil waktu tunggu pada sebarang pagi sebagai variabel random X.

Secara umum, jika F(x) merupakan fdk suatu variabel random kontinu X, maka derivatif nya (ada) dinotasikan dengan f(x), f(x) disebut fungsi kepadatan peluang, pada contoh di atas F(x) dapat dinyatakan untuk nilai-nilai X dalam interval [0,5] sebagai integral dari derivatifnya.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \tfrac{1}{5} dt = \frac{x}{5}$$



Gambar 1: Gambar fkp dan fdk

Definisi 2.5

Suatu variabel random X disebut variabel random kontinu jika fungsi f(x) merupakan fungsi kepadatan peluang (fkp) dari X sedemikian sehingga fdk dinyatakan sebagai.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Akibatnya $f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = F'(x)$

Teorema 2.4

Suatu fungsi f(x) merupakan fkp untuk sebarang variabel random kontinu X jika dan hanya jika memenuhi sifat

$$f(x) \geq 0$$

untuk semua x real, dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

dan $P(a<X<b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Contoh 2.9

Misalkan bahwa eror/galat suhu reaksi, dalam ^oC, pada percobaan laboratorium yang terkontrol merupakan variabel random X yang mempunyai fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{untuk x lainnya} \end{cases}$$

a. Tunjukkan bahwa syarat definisi dipenuhi
b. Hitung $P(0<x\leq 1)$

Penyelesaian

a. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3}dx = \left.\frac{x^3}{9}\right|_{-1}^{2} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9}$

= 1, jadi f(x) merupakan fungsi kepadatan peluang

b. P(0<x≤1) $= \int_0^1 \frac{x^2}{3} dx$

P(0<x≤1) $= \left. \frac{x^3}{9} \right|_0^1$

$= \frac{1}{9}$

Contoh 2.10

Suatu mesin produksi kawat tembaga. Panjang tembaga (dalam meter) diproduksi antara sukses merupakan variabel random X dengan fkp berbentuk

$$f(x) = \begin{cases} c(1+x)^{-3} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

dengan c konstan. Nilai dari c dapat ditentukan dengan menggunakan sifat di atas

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} c(1+x)^{-3} dx = c\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

dengan substitusi u = 1 + x dan menggunakan aturan pangkat untuk integral. Diperoleh c = 2

Jadi fkp dari X adalah f(x) = $\begin{cases} 2(1+x)^{-3} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

Fungsi distribusi kumulatif dari variabel random ini diberikan oleh

$$F(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int_0^x 2(1+t)^{-3} dt & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-(1+x)^{-2} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

2.4 Nilai Harapan

Definisi 2.6

Jika X variabel random dengan fungsi kepadatan peluang f(x) maka nilai harapan atau rataan dari X didefinisikan dengan

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x} x f(x) & \text{bila x diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{bila x kontinu} \end{cases}$$

Jika integral pada persamaan di atas konvergen mutlak, selain dari itu E(X) dikatakan tidak ada.

Contoh 2.11

Rata-rata panjang antara kerusakan pada suatu kawat adalah

$$\mu = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 dx + \int_{0}^{\infty} x \cdot 2(1+x)^{-3} dx$$

Jika disubstitusikan t = 1 + x, maka

$$\mu = 2\int_{0}^{\infty} (t-1) t^{-3} dt = 2\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Contoh 2.12

Carilah nilai harapan banyaknya kimiawan dalam panitia yang dipilih secara acak dari 4 kimiawan dan 3 biolog

Misalkan X menyatakan banyaknya kimiawan dalam panitia. Distribusi peluang X adalah

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}, \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

Diperoleh f(0) = $\frac{1}{35}$, f(1) = $\frac{12}{35}$, f(2) = $\frac{18}{35}$, f(3) = $\frac{4}{35}$.

JadiE(X) = $0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{18}{35}+3\cdot\frac{4}{35}$ = $\frac{12}{7}$ = 1,7

Jadi bila suatu panitia beranggotakan 3 orang dipilih secara random berulang-ulang dari 4 kimiawan dan 3 biolog, maka rata-ratanya akan beranggotakan 1,7 kimiawan.

Contoh 2.13

Misalkan X menyatakan umur dalam jam sejenis bola lampu. Fungsi kepadatan peluangnya diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20000}{x^3} & x > 100 \\ 0 & \text{untuk x lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah harapan umur jenis bola lampu tersebut.

Penyelesaian

$$E(X) = \int_{100}^{\infty} x\,\frac{20000}{x^3}\,dx = \int_{100}^{\infty} \frac{20000}{x^2}\,dx = 200$$

Jadi jenis bola lampu tadi dapat diharapkan rata-rata berumur 200 jam.

2.5 Beberapa Sifat dari Nilai Harapan

Teorema 2.5

Jika X variabel random dengan fkp f(x) dan u(x) merupakan fungsi bernilai real dengan domain termasuk pada domain dari nilai X yang mungkin, maka

E[u(X)] = $\sum u(x)f(x)$ *jika X diskrit*

E[u(X)] = $\int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)dx$ *jika X kontinu*

Teorema 2.6

Jika X variabel random dengan fkp f(x), a dan b konstan, g(x) dan h(x) merupakan fungsi bernilai real dengan domain temasuk pada nilai X yang mungkin, maka

$$E[ag(X) + bh(X)] = aE[g(X)] + bE[h(X)]$$

Berdasarkan hasil teorema di atas diperoleh pula

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Contoh 2.14

Banyaknya mobil X yang masuk ke pencuci mobil tiap hari antara jam 13.00 – 14.00 berdistribusi

X	4	5	6	7	8	9
P(X=x)	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Misalkan g(X) = 2X – 1 menyatakan upah karyawan dalam ribuan rupiah pada jam tersebut. Cari harapan pendapatan karyawan pada jam tersebut.

Penyelesaian

$$E[g(X)] = E(2X-1)$$

$$= \sum_{x=4}^{9}(2x-1)f(x)$$

$$= 7\cdot\tfrac{1}{12}+9\cdot\tfrac{1}{12}+11\cdot\tfrac{1}{4}+13\cdot\tfrac{1}{4}+15\cdot\tfrac{1}{6}+17\cdot\tfrac{1}{6}$$

$$= 12{,}66667$$

Jadi harapan pendapatan karyawan pada jam tersebut adalah Rp 12.666,67

Contoh 2.15

Misalkan X suatu variabel random dengan fungsi kepadatan peluang f(x) = $\begin{cases} \frac{x^2}{3} & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{untuk x lainnya} \end{cases}$

Hitunglah nilai harapan g(X) = 4X +3

Penyelesaian

E(4X + 3) = $\int_{-1}^{2} \frac{(4x+3)x^2}{3}\,dx$ = $\frac{1}{3}\int_{-1}^{2}(4x+3)x^2\,dx$ = 8

Definisi 2.7

Variansi dari variabel random X diberikan dengan

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

dengan $\mu = E(x)$

Varians adalah suatu bilangan bukan negatif. Akar kuadrat positif dari varians disebut *deviasi standar* dan ditentukan oleh

$$\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\mathrm{E}[(X-\mu)^2]}$$

Definisi 2.8

Momen ke k dengan sumbu asal dari variabel random X adalah

$$\mu_k' = E(X^k)$$

dan momen ke k merupakan rata-rata adalah

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k = E(X-\mu)^k$$

$E(X^k)$ mungkin ditentukan sebagai momen ke-k dari X atau momen pertama X^k. Momen pertama adalah rata-rata, dengan notasi sederhana μ lebih umum μ_1'. Momen pertama dengan rata-rata adalah nol,

μ_1 = E[X-E(X)] = E(X) – E(X) = 0

$\mu_2 = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$

Teorema 2.7

Jika X variabel random maka $Var(X) = E(X^2) - \mu^2$

Bukti

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E[(X-\mu)^2] \\
&= E(X^2-2\mu X+\mu^2) \\
&= E(X^2)-2\mu E(X)+\mu^2 \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\
&= E(X^2)-2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}
$$

Teorema 2.8

Jika X variabel random, a dan b konstan maka

$Var(aX+b) = a^2\ Var(X)$

Bukti

$$
\begin{aligned}
Var(aX+b) &= E[(aX + b - a\mu_x - b)^2] = E[a^2(X - \mu_x)^2] \\
&= a^2\ Var(X)
\end{aligned}
$$

Teorema 2.9

Jika distribusi dari X adalah simetrik dengan mean $\mu = E(X)$, *maka momen ketiga terhadap* μ *adalah nol,* $\mu_3 = 0$.

2.6 Distribusi Campuran (*Mix Distribution*)

Suatu fungsi distribusi kumulatif untuk variabel random X dinamakan campuran, jika fdk-nya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$F(x) = \alpha F_d(x) + (1- \alpha)\ F_c(x)$, dengan $0 < x < 1$

Contoh 2.16

Misal X adalah variabel random yang menyatakan waktu tunggu sebuah proses dengan fdk: F(x) = 0,4F_d(x) + 0,6 F_c(x) dengan F_d(x) = 1 dan F_c(x) = 1 – e^{-x}, untuk x > 0. Tentukan bentuk fkp campuran tersebut.

Penyelesaian:

$P(x \leq t)$ = $F(x)$

$P(x > t)$ = $1 - F(x)$

$x = 0 \rightarrow F(0) = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 0 = 0{,}4$

$x \leq 5 \rightarrow 0{,}4 + 0{,}6(1 - e^{-x}) = 0{,}636$

$F(x) = 0{,}4 \cdot 1 + 0{,}6(1 - e^{-x})$

$$P(x \leq t | x \geq 0) = \frac{P(x \geq 0) \text{ dan } P(x \leq t)}{P(x \geq 0)} = \frac{P(0 \leq x \leq t)}{P(x \geq 0)}$$

$$= \frac{F(t) - F(0)}{1 - F(x = 0)}$$

$$= \frac{0{,}4 + 0{,}6(1 - e^{-t})}{1 - 0{,}4}$$

$$= 1 - e^{-t}$$

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt}(1 - e^{-t}) = e^{-t}$$

Jadi $f(x) = e^{-x}, 0 < x < 1$

2.7 Variansi

Variansi dari variabel random X didefinisikan sebagai Var(X) = σ_x^2 = $E(x-E(x))^2$, σ> 0, dengan $E(x)=\mu$

atau $Var(X)=\sum(x-\mu)^2 f(x)$, variabel random diskrit

atau $Var(X)=\int_{\Omega}(x-\beta)^2 f(x)dx$, variabel random kontinu

Teorema 2.10

Jika X variabel random kontinu, maka $Var(X)=E(x^2)-\mu^2$

Contoh 2.17

Suatu koin dilempar tiga kali, dengan mean = 3/2. Tentukan varian dan simpangan bakunya.

Penyelesaian

x = 0, 1, 2, 3.

$$Var(X) = \sum(x-\mu)^2 f(x)$$

$$= \left(0-\frac{3}{2}\right)^2\frac{1}{8}+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\frac{2}{8}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\frac{3}{8}+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\frac{1}{8}$$

$$= 0{,}75$$

maka, σ = $\sqrt{Var(X)}$ = $\sqrt{0{,}75}$ = 0,8661

Teorema 2.11

Jika X variabel random dan a, b suatu konstanta, maka Var(ax+b) = Var(ax) sehingga Var(ax + b) = a^2*Var(ax)*

Jika X, Y dua buah variabel random, maka berlaku:

Var(x + y) = Var(x) + Var(y) + 2 cov(x,y)

Jika X, Y independen dan Cov(x,y) = 0, maka berlaku:

Var(x + y) = Var(x) + Var(y)

Cov(x,y) = E(xy) – E(x)E(y)

Jika X, Y independen, maka E(xy) = E(x)E(y), sehingga

Cov(x,y) = 0

$\rho(x,y)$ = *korelasi (x,y)* = $\dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sqrt{Var(y)}\sqrt{Var(x)}}$

Secara khusus, Var(x) = cov(x,x)

2.8 Momen

Momen ke-k di sekitar x = 0 dari variabel random X didefinisikan sebagai: $\mu_x = E(X^k)$

Momen ke-k di sekitar x = μ dari variabel random X didefinisikan sebagai: $\mu_x = E(X-\mu)^k$

Contoh 2.18

Misalkan ada seorang pembalap mobil yang diasumsikan waktu berkendaraan antara 20 – 30 menit. Jika X adalah variabel random yang menyatakan waktu dalam menit, maka tentukan momen ke-k dari variabel tersebut.

Penyelesaian

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/10 & 20 < x < 30 \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Momen ke-k dari variabel random tersebut adalah:

$m_k = E(X^k) = \int_{20}^{30} \frac{x^k}{10}\, dx = \dfrac{30^{k+1} - 20^{k+1}}{10(k+1)}$, dengan k = 1, 2, 3, ...

sehingga diperoleh

$m_1 = \dfrac{30^2 - 20^2}{10(2)} = 25$, dan $m_2 = \dfrac{30^3 - 20^3}{10(3)} = 633\frac{1}{3}$

Karena $m_1 = \mu_X$, sehingga diperoleh $\mu_X = 25$, dan karena $m_2 = \mu_x^2 + \sigma_x^2$, maka diperoleh $\sigma_x^2 = 8\frac{1}{3}$

2.9 Fungsi-fungsi Pembangkit Momen

Definisi 2.9

Jika X variabel random, maka nilai harapan

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \sum e^{tx} f(x) & \text{bila X diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx & \text{bila X kontinu} \end{cases}$$

Ini disebut fungsi pembangkit momen (fpm) dari X, jika nilai harapan ada untuk semua nilai t pada setiap interval berbentuk –h < t < h untuk setiap h > 0.

Teorema 2.12

Jika fpm dari X ada maka $E(X^r) = M_x^{(r)}(0)$, *untuk semua r = 1, 2, . .*

dan $M_x(t) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \dfrac{E(X^r)}{r!}$

Bukti

Untuk kasus variabel random kontinu X, fpm variabel random kontinu adalah

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx$$

Ketika fpm ada dapat ditunjukkan derivatif ke r ada dan didiferensialkan dalam tanda integral diperoleh

$$M_x^{(r)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{tx} f_X(x)\, dx$$

dari hasil tersebut untuk semua r = 1, 2, ...

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^0 f_X(x)\, dx = M_x^{(r)}(0)$$

Selanjutnya bila fpm ada maka dapat ditunjukkan bahwa ekspansi menjadi deret pangkat dengan pangkat nol adalah mungkin. Dengan bentuk koefisien $\frac{M_X^{(r)}(0)}{r!}$ dikombinasikan diperoleh

$$M_x(t) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{M_X^{(r)}(0) t^r}{r!} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{E(X^r)}{r!}$$

Untuk kasus diskrit caranya sama.

Contoh 2.19

Ditentukan suatu variabel random kontinu X dengan fkp $f(x) = e^{-x}$ jika $x > 0$, dan nol untuk lainnya. Fpm adalah

$$M_x(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} e^{-x} dx$$

$$M_x(t) = \int_0^{\infty} e^{-(1-t)x} dx$$

$$= -\frac{1}{1-t} e^{-(1-t)x} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1-t}\ , t<1$$

Contoh 2.20

Suatu variabel random diskrit X dengan fkp $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$ jika x = 0, 1, 2, ... dan nol untuk lainnya. Fpm dari X adalah

$$M_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x+1} = \tfrac{1}{2}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{e^t}{2}\right)^x$$

dengan menggunakan identitas deret geometri,

$$1+s+s^2+s^3+\cdots = \frac{1}{1-s}, \quad -1<s<1$$

Dengan $s = \dfrac{e^t}{2}$. Hasil dari fpm adalah $M_x(t) = \dfrac{1}{2-e^t}$, $t < \ln 2$

2.10 Sifat-sifat Fungsi Pembangkit Momen

Teorema 2.13

Jika $Y = aX + b$, maka $M_Y(t) = e^{bt} M_x(at)$

Bukti

$M_Y(t) = E(e^{tY})$

$= E(e^{t(aX+b)})$

$M_Y(t) = E(e^{atX} e^{bt})$

$= e^{bt}E(e^{atX})$

$= e^{bt} M_x(at)$

Teorema 2.14

Ketunggalan, Jika X_1 dan X_2 mempunyai fdk $F_1(x)$ dan $F_2(x)$ dan fpm $M_1(t)$ dan $M_2(t)$ maka $F_1(x) = F_2(x)$ untuk semua bilangan real x jika dan hanya jika $M_1(t) = M_2(t)$ untuk semua t pada interval $-h<t<h$ untuk setiap $h>0$.

Teorema 2.15

Jika fpm dari X ada, maka $E(x^r) = M_x^{(r)}(0)$ *dengan* $M_x(t) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{E(x^r)t^r}{r!}$

2.11 Soal-soal Latihan

1. Misalkan e = (i,j) merupakan hasil dari melempar dadu yang bersisi 4 sebanyak 2 kali. Buat fkp diskrit dan gambar grafik fdk untuk variabel random di bawah ini.
   a. Y(e) = i+j
   b. Z(e) = i-j
   c. W(e) = $(i-j)^2$
2. Suatu permainan melempar dadu sisi enam sekali dan melempar sebuah koin sekali. Skor Sesuai dengan jumlah angka mata dadu dan koin. Sebagai variabel random misalkan X. Daftarlah nilai yang mungkin dari X dan tabulasikan nilai dari:
   a. Daftar nilai yang mungkin dari X dan tabulasikan nilai dari fkp dan fdk pada titik diskontinu
   b. Sket grafik dari fdk
   c. Tentukan P[X>3]
   d. Tentukan peluang skornya merupakan bilangan bulat ganjil.
3. Sebuah tas berisi 3 koin 2 normal dan 1 tidak (dengan sisi sama) koin dirandom dan ditos 3 kali. X = Jumlah muka yang muncul (banyaknya muka yang muncul). Tentukkan fkp diskrit dan fdk serta gambarkan.
4. Dengan membeli sejenis saham tertentu seseorang dapat memperoleh keuntungan setahun sebesar Rp 4.000,00 dengan

peluang 0,3 atau rugi Rp 1.000,00 dengan peluang 0,7. Berapakah harapan penghasilannya?

5. Fungsi kepadatan pengukuran yang telah disandi suatu jenis barang tertentu adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(1+x^2)} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{untuk x lainnya} \end{cases}.$$

Hitunglah E(X).

6. Tentukan distribusi peluang dari anak laki-laki dan perempuan dalam keluarga dengan 3 anak, jika diasumsikan terdapat peluang yang sama untuk anak laki-laki dan perempuan?

7. Untuk soal nomor 6, (a) tentukan fungsi distribusi F(x), (b) gambarkan grafik dari fungsi distribusi ini.

8. Sebuah kotak berisi 5 bola berwarna, 2 hitam dan 3 putih. Bola diambil tanpa pengembalian. Jika X adalah pengambilan sampai memperoleh bola hitam. Tentukan fkp f(x).

9. Hitung fungsi kepadatan peluang untuk variabel random X dengan fungsi kepadatan peluang f(x) = $k\,e^{-ax}(1-e^{-ax})$, untuk $0 \le x < \infty$

10. Variabel random diskrit mempunyai fkp f(x).

    a. Jika f(x) = $k(\frac{1}{2})^x$ untuk x = 1,2,3 dan 0 untuk lainnya, tentukan k.

    b. Apakah fungsi f(x) = $k[(\frac{1}{2})^x - \frac{1}{2}]$ untuk x = 0,1,2,… merupakan suatu fkp untuk suatu nilai k.

11. Variabel random diskrit mempunyai fkp berbentuk $f(x)= c(8-x)$ untuk $x = 0,1,2,3,4,5$ dan 0 untuk x lainnya. Tentukan:
   a. konstanta c,
   b. fdk $F(x)$,
   c. $P(X>2)$
   d. $E(X)$.
12. Suatu bilangan bulat tidak negatif untuk nilai variabel random X mempunyai fdk berbentuk $F(x) = 1-(\frac{1}{2})^{x+1}$ untuk $x = 0, 1, 2, ...$ dan nol jika $x<0$.
   a. Tentukan fkp dari X
   b. Tentukan $P[10<X\leq 20]$
   c. Tentukan P[X genap]
13. Misalkan X suatu variabel random sedemikian sehingga $P[X=x]> 0$ jika $x = 1, 2, 3, 4$, dan $P[X=x] = 0$ untuk lainnya. Anggap fungsi distribusi kumulatif (fdk) adalah $F(x) = 0{,}05x(1+x)$ untuk $x = 1, 2, 3, 4$.
   a. Gambar grafik dari fkp
   b. tentukan $E(X)$
14. Suatu variabel random kontinu mempunyai $f(x) = c(1-x)x^2$ jika $0<x<1$ dan nol untuk x lainnya. Tentukan:
   a. konstanta c
   b. $E(X)$
15. Diketahui $f(x) = kx^{-(k+1)}$ untuk $1<x<\infty$ dan 0 untuk x lainnya.
   a. Untuk nilai k yang mana sehingga f(x) adalah sebuah fkp.
   b. Tentukan fdk dalam soal (a)
   c. Untuk nilai k yang manakah sehingga E(X) ada?

16. Selidiki apakah fungsi berikut di bawah ini dapat menjadi fdk untuk domain yang diberikan.

    a. $F(x) = e^{-x}$; $0 \le x < \infty$

    b. $F(x) = e^{x}$; $-\infty < x \le 0$

    c. $F(x) = 1-e^{-x}$; $-1 \le x \le 0$

17. Pengukuran radius r dari suatu lingkaran mempunyai fkp $f(r) = 6r(1-r)$, $0<r<1$. dan $f(x) = 0$ untuk r lainnya. Tentukan

    a. Nilai harapan dari radius

    b. Nilai harapan keliling lingkaran

    c. Nilai harapan luas daerah lingkaran

18. Misalkan X mempunyai fkp kontinu $f(x) = 3x^2$ untuk $0<x<1$ dan 0 untuk x lainnya. Tentukan

    a. $E(X)$

    b. $Var(X)$

    c. $E(X^r)$.

    d. $E(3X-5X^2+1)$

19. Pada suatu toko komponen, permintaan tahunan untuk sebagian perangkat lunak adalah secara random diskrit X. Pemilik toko itu memesan 4 kopi untuk setiap paket dengan harga Rp. 100.000,00 perkopi, dan pemesan langganan membayar Rp. 350.000,00 perkopi. Pada akhir tahun paket ini pasti ada yang rusak dan tidak laku sehingga investasi toko itu rugi karena kopi yang tidak terjual. Fkp X

20. diberikan dengan tabel berikut.

X	0	1	2	3	4
f(x)	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

a. Tentukan E(X)

b. Tentukan Var(X)

c. Nyatakan Y sebagai fungsi linear dari X, dan tentukan E(Y) dan Var(Y).

21. Diasumsikan bahwa X adalah variabel random kontinu dengan fkp:

f(x) = exp[-(x+2)] jika $-2 < x < \infty$ dan nol untuk lainnya

a. Tentukan fungsi pembangkit momen dari X.

b. Gunakan fungsi pembangkit momen (a) untuk mencari E(X) dan $E(X^2)$

22. Misalkan X variabel random dengan fungsi pembang-kit momen

$M_x(t) = \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{5t}$

a. Apa distribusi dari X   b. Apa P[X=2]?

23. Diketahui:

$$f(x) = \begin{cases} kx^{-(k+1)} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{x lainnya} \end{cases}$$

a. tentukan nilai k sehingga f(x) fungsi peluang

b. tentukan fkp dari soal (a)

c. untuk nilai k yang mana sehingga E(X) ada?

24. Perhatikan fungsi kepadatan peluang

$$f(x) = \begin{cases} k\sqrt{x} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{x lainnya} \end{cases}$$

a. hitunglah k

b. carilah F(x) dan gunakan untuk menghitung P(0,3<X<0,6)

25. Suatu pengiriman 7 pesawat televisi berisi 2 rusak. Sebuah hotel membeli 4 buah pesawat secara random dari kelompok tadi. Bila X menyatakan banyaknya pesawat yang rusak yang dibeli oleh hotel tersebut, carilah distribusi peluang X.

26. Jika X = jumlah mata dadu yang tampak dalam pelemparan sebuah dadu satu kali, hitunglah ekspektasi g(X) = $2X^2 + 1$.

27. Tunjukkan bahwa

$$E[(aX+b)^n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} E(X^k)$$

28. Diketahui E(X) = μ dan Var(X) = σ^2. Tentukan mean dan variansi dari

a. e^x

b. 1/x (untuk $\mu \neq 0$)

c. Ln(X) (untuk X>0)

29. Dengan menggunakan F(X) pada soal nomor 12, carilah

a. P(X=1)

b. P(0<X≤2)

c. Grafik distribusi kumulatifnya.

30. Suatu bank menawarkan obligasi bagi pelanggannya dengan tahun jatuh tempo yang berlainan. Bila distribusi kumulatif T diketahui lamanya dalam tahun sampai jatuh tempo, diberikan oleh

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \le t < 3 \\ \frac{1}{2} & 3 \le t < 5 \\ \frac{3}{4} & 5 \le t < 7 \\ 1 & t \ge 7 \end{cases}$$

Carilah

a. P(T=5)

b. P(T>3)

c. P(1,4<T<6)

31. Distribusi peluang X, banyaknya cacat per 10 m serat sintesis dalam gulungan yang lebarnya seragam, diberikan oleh:

x	0	1	2	3	4
f(x)	0,41	0,37	0,16	0,05	0,01

Tentukan distribusi kumulatif dari X

32. Diasumsikan X adalah variabel random kontinu dengan fkp

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-2} & -2 < x < \infty \\ 0 & \text{x lainnya} \end{cases}$$

a. Tentukan fpm dari X

b. Gunakan fpm untuk menentukan E(X) dan $E(X^2)$

33. Diketahui fungsi distribusi peluang diskrit

$$f(x;k) = \begin{cases} \frac{1}{k} & x = 1,2,3,..., k \\ 0 & \text{x lainnya} \end{cases}$$

Tunjukkan bahwa fungsi pembangkit momen dari X adalah $M_x(t)$

$$= \frac{e^t(1-e^{kt})}{k(1-e^t)}$$

34. Diketahui Variabel random X berdistribusi $g(x;p) = pq^{x-1}$ untuk x = 1, 2, 3, … Tunjukkan bahwa fungsi pembangkit momen dari X berbentuk

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

35. Jika X adalah variabel random dengan $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ dengan $0 \le x < \infty$. Tentukan:
    a) fungsi pembangkit momen untuk X
    b) rata-rata dari X
    c) nilai harapan dari X^2.

36. Jika X adalah suatu variabel random dengan $f_X(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, untuk x = 0, 1, 2, …. Tentukan
    (a) fungsi pembangkit momen dari X dan
    (b) nilai harapan dari X.

III. DISTRIBUSI-DISTRIBUSI PELUANG KHUSUS

Bab ini akan membahas beberapa distribusi peluang khusus untuk variabel random diskrit dan kontinu. Distribusi Bernoulli, distribusi Binomial, distribusi Hipergeometris, distribusi Geometri, distribusi Binomial Negatif, distribusi Poisson, dan distribusi Uniform disajikan untuk distribusi peluang diskrit. Adapun distribusi peluang kontinu yang disajikan adalah distribusi Normal, distribusi Uniform, distribusi Gamma, distribusi Eksponensial, distribusi Weibull, distribusi t, F, dan Beta.

3.1 Distribusi-distribusi Peluang Diskrit Khusus

Kita menggunakan teknik perhitungan pada bab 1 untuk menemukan distribusi peluang diskrit khusus.

3.1.1 Distribusi Bernoulli

Distribusi peluang diskrit yang paling sederhana yang variabel randomnya diperoleh pada suatu percobaan (*trial*) tunggal dari sebarang eksperimen, misalkan hanya diperhatikan dua kejadian, katakan E dan komplemennya E'. Sebagai contoh E dan E' menyatakan muka dan belakang pada pelemparan suatu koin, cacat atau baik pada pengambilan satu item dari suatu manufaktur. Apabila E mempunyai peluang $p = P(E)$ konsekuensinya E' mempunyai peluang $q = P(E') = 1-p$.

Variabel random X diasumsikan hanya bernilai 0 dan 1 diketahui sebagai variabel Bernoulli, dan performance dari sebarang eksperimen dengan hanya dua tipe hasilnya disebut trial Bernoulli. Lebih lanjut, jika eksperimen hanya sukses (E) atau gagal (E') maka variabel Bernoulli dapat dikaitkan sebagai

$$X(e) = \begin{cases} 1 & jika\, e \in E \\ 0 & jika\, e \in E' \end{cases}$$

Notasinya X ~ BIN(1,p)

Fkp dari X diberikan dengan f(0) = q dan f(1) = p. Distribusi ini dikaitkan sebagai distribusi Bernoulli, dan fkp dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = p^x q^{1-x}, \; x = 0, 1$$

Perlu diperhatikan bahwa E(X) = 0.q + 1.p = p dan $E(X^2) = 0^2.q + 1^2.p = p$, sehingga $Var(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$.

3.1.2 Distribusi Binomial

Suatu eksperimen dikatakan sebagai eksperimen binomial bila dipenuhi hal-hal berikut:

- Eksperimen merupakan gabungan dari n percobaan identik yang saling bebas.
- Setiap percobaan hanya mempunyai 2 hasil, yang biasanya disebut sukses (=S) dan gagal (=G).
- Peluang mendapatkan sukses dalam setiap percobaan adalah p = P(S) dan peluang mendapatkan gagal q = P(G) = 1 – p.

Perhatian dalam suatu eksperimen binomial adalah menentukan berapa peluang mendapatkan suatu harga X yaitu harga variabel random yang menyatakan banyaknya sukses dalam eksperimen binomial.

Contoh 3.1

Sampling dengan pengembalian. Ditentukan masalah 5 kelereng dari suatu kumpulan 10 kelereng hitam dan 20 putih, di mana kereng dilempar satu sekali, dan setiap kali dikembalikan sebelum pelemparan berikutnya. Kita misalkan X banyaknya pelemparan kelereng hitam, dan f(2) = P[X=2]. Untuk memilih secara pasti dua hitam (h) dan konsekuensinya 3 putih (p), ini mudah untuk semua permutasi dari dua h dan 3 p, BBWWW, BWBWW dan seterusnya. Di sini ada $\binom{5}{2}$ = 10 permutasi yang mungkin untuk tipe ini dan setiap satu mempunyai peluang sama. Katakan $(10/30)^2(20/30)^3$. Yang mana produk dari dua nilai P(h) = 10/30 dan tiga nilai dari P(p) = 20/30.

Peluang dapat diperoleh pada cara ini sebab melantunkan dengan pengembalian dapat diharapkan sebagai trial bernoulli independen. Jadi diperoleh f(2) = $\binom{5}{2}\left(\frac{10}{30}\right)^2\left(\frac{20}{30}\right)^3$.

Definisi 3.1

Suatu usaha Bernoulli dapat menghasilkan sukses dengan peluang p dan gagal dengan peluang q = 1-p, maka distribusi peluang variabel random binomial X, yaitu banyaknya sukses dalam n usaha independen, ialah

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n.$$

Notasinya X ~ BIN(n,p)

Contoh 3.2

1. Peluang untuk mendapatkan dua muka dalam 6 lemparan dari koin ideal adalah

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!(6-2)!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}$$

2. Suatu suku cadang dapat menahan uji goncangan tertentu dengan peluang ¾. Hitunglah peluang bahwa tepat 2 dari 4 suku cadang yang diuji tidak rusak.

   Penyelesaian

   Misalkan tiap uji yang satu tidak mempengaruhi/ dipengaruhi yang berikutnya. Jadi p = ¾.

$$b(2;4,3/4) = \binom{4}{2}\left(\tfrac{3}{4}\right)^2\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\frac{3^2}{4^2} = \frac{27}{128}$$

   Sekarang kita secara umum akan menentukan sifat-sifat umum dari distribusi binomial.

Untuk menentukan nilai harapan dapat menggunakan fungsi pembangkit momen, yaitu bahwa

$M'_x(0) = E(X)$ dan $M''_x(0) = E(X^2)$ dengan menggunakan fungsi pembangkit momen akan ditunjukkan bahwa

Jika X ~ Bin(n,p), maka

$$M_x(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(pe^t)^x q^{n-x}$$

$= (pe^t + q)^n \quad -\infty<t<\infty$ dari ekspansi binomial

$M'_x(t) = n(pe^t + q)^{n-1}\, pe^t$ sehingga $M'_x(0) = np$

Selanjutnya

$M''_x(t) = n(n-1)(pe^t + q)^{n-2}\, pe^t\, pe^t + pe^t\, n\,(pe^t + q)^{n-1}$

$M''_x(0) \quad = n(n-1)(pe^0 + q)^{n-2}\, pe^0\, pe^0 + pe^0\, n\, (pe^0 + q)^{n-1}$

$\qquad = n(n-1) \cdot 1 \cdot p \cdot p + p \cdot n \cdot 1$

$\qquad = n^2\, p^2 - np^2 + np$

dan $M''_x(0) \quad = E(X^2)$, sehingga

$E(X^2) = M''_x(0) = n^2\, p^2 - np^2 + np$

$Var(X) \quad = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = M''_x(0) - \{M'_x(0)\}^2$

$\qquad = n^2\, p^2 - np^2 + np - \{np\}^2.$

$\qquad = n^2\, p^2 - np^2 + np - n^2\, p^2$

$\qquad = np - np^2$

$\qquad = np\, (1 - p)$

$\qquad = npq$

Percobaan binomial dapat menjadi percobaan multinomial apabila setiap usaha memberikan lebih dari dua hasil yang mungkin.

Contoh 3.3

Bila usaha tertentu dapat menghasilkan k macam hasil E_1, E_2, ..., E_k dengan peluang p_1, p_2, ..., p_k maka distribusi peluang variabel random X_1, X_2, ..., X_k yang menyatakan banyak terjadinya E_1, E_2, ..., E_k dalam n usaha bebas ialah

$$f(X_1,X_2,...,X_k;p_1,p_2,...,p_k,n) = \binom{n}{x_1, x_2, \cdots, x_k} p_1^{X_1} p_2^{X_2} \cdots p_k^{X_k}$$

$$dengan \ \sum_{i=1}^{k} x_i = n \ \ dan \ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

contoh 3.4

Bila dua dadu dilantunkan 6 kali, berapakah peluang mendapat jumlah 7 atau 11 muncul dua kali, sepasang bilangan yang sama satu kali, dan kombinasi lainnya 3 kali.

Penyelesaian

Misalkan kejadian berikut menyatakan :

A_1 : jumlah 7 atau 11 muncul

A_2 : pasangan bilangan yang sama muncul

A_3 : baik pasangan bilangan yang sama maupun jumlah 7 atau 11 tidak muncul.

Peluang masing-masing kejadian di atas adalah $p_1 = 2/9$, $p_2 = 1/6$ dan $p_3 = 11/18$. Nilai ini tidak berubah selama keenam usaha dilakukan. Dengan menggunakan distribusi multinomial dengan $x_1 = 2$ dan $x_2 = 1$ dan $x_3 = 3$, maka diperoleh peluang yang ditanyakan

$$f\left(2,1,3,\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{6},\tfrac{11}{18},6\right) = \binom{6}{2,1,3}\left(\tfrac{2}{9}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^1\left(\tfrac{11}{18}\right)^3$$

$$= \frac{6!}{2!.1!.3!}\cdot\frac{2^2}{9^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{11^3}{18^3}$$

$$= 0{,}1127$$

3.1.4 Distribusi Hipergeometris

Suatu percobaan Hipergeometris mempunyai dua sifat yaitu:

a. Ruang sampel ukuran n diambil tanpa pengembalian dari N benda.

b. Sebanyak M benda dapat diberi nama sukses sedangkan sisanya N-M diberi nama gagal.

Definisi 3.3

Distribusi peluang variabel random Hipergeometris X, yaitu banyaknya peluang sukses dalam variabel random ukuran n yang diambil dari N benda yang mengandung M bernama sukses dan N-M bernama gagal, ialah

$$h(x;N,n,M) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, x = 0, 1, 2, ..., n.$$

Teorema 3.2

Rataan dan variansi distribusi Hipergeometris h(n,M,N) adalah

$\mu = \frac{nM}{N}$ *dan Var(X) =* $\frac{nM}{N}\frac{N-n}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)$

bukti

$$E(X) = \frac{\sum_{x=0}^{n}\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= M\sum_{x=0}^{n}\frac{(M-1)!}{(x-1)!(M-x)!}\frac{\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$= M\sum_{x=0}^{n}\frac{\binom{M-1}{x-1}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$, ambil y = x – 1 menjadi

$$= M\sum_{x=0}^{n}\frac{\binom{M-1}{y}\binom{N-M}{n-1-y}}{\binom{N}{n}}$$, Karena $\binom{N-M}{n-1-y} = \binom{(N-1)-(M-1)}{n-1-y}$

dan $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}$, maka

$$E(X) = M\sum_{x=0}^{n}\frac{\binom{M-1}{y}\binom{N-M}{n-1-y}}{\binom{N}{n}} = \frac{nM}{N}$$

Variansi dicari dengan cara yang sama

$$E[X(X-1)] = \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \ldots = \frac{N-n}{N-1}.n.\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)$$

Contoh 3.5

1. Sepuluh produk diambil dari sebuah dos besar berisi 1000 produk, 400 diantaranya cacat, sampel tersebut diambil secara random. Berapa peluang dari 10 yang diambil tadi, terdapat 5 produk yang cacat.

   Penyelesaian

   x = 5, n = 10, N = 1000, M = 400

   $h(x;N,n,M) = h(5,10,1000,400)$

   $$= \frac{\binom{400}{5}\binom{600}{5}}{\binom{1000}{10}}$$

   = 0,2013

2. Suatu kotak berisi 40 suku cadang dikatakan memenuhi syarat penerimaan bila berisi tidak lebih dari 3 yang cacat. Caranya ialah dengan memilih 5 suku cadang dengan random dari dalamnya dan menolak kotak tersebut bila diantaranya ada yang cacat.

Berapakah peluang mendapatkan tepat satu yang cacat dalam sampel berukuran 5 bila kotak tersebut berisi 3 yang cacat?

Penyelesaian

Kejadian ini merupakan distribusi Hipergeometris dengan n = 5, N = 40, M = 3 dan x = 1, peluang mendapatkan satu yang cacat adalah

$$h(1;40,5,3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{40-3}{5-1}}{\binom{40}{5}} = 0,3011$$

3. Suatu panitia 5 orang akan dipilih secara acak dari 3 kimiawan dan 5 fisikawan. Hitunglah peluang banyak-nya kimiawan dalam panitia tersebut.

Misalkan variabel random X menyatakan banyaknya kimiawan dalam panitia. Kedua sifat percobaan Hipergeometris terpenuhi. Jadi, P(X=0)

$$= h(0; 8,5,3) = \frac{\binom{3}{0}\binom{5}{5}}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{56}$$

$$P(X=1) = h(1; 8,5,3) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{4}}{\binom{8}{5}} = \frac{15}{56}$$

$$P(X=2) = h(2; 8,5,3) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{30}{56}$$

$$P(X=3) = h(3; 8,5,3) = \frac{\binom{3}{3}\binom{5}{2}}{\binom{8}{5}} = \frac{10}{56}$$

Berikut ini disajikan distribusi hipergeometrik X dalam bentuk tabel

x	0	1	2	3
h(x,8,5,3)	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{36}{56}$	$\frac{10}{56}$

Selanjutnya untuk lebih singkat digunakan notasi untuk distribusi Hipergeometris dengan parameter n, M, N digunakan h(n,M,N)

3.1.5 Distribusi Geometri

Variabel random X dikatakan berdistribusi geometri bila mempunyai fungsi kepadatan peluang berbentuk $f(x;p) = pq^{x-1}$, x = 1, 2, 3, ...

Secara umum sifat f(x) ≥ 0 dan $\sum_{\text{semua } x_i} f(x_i) = 1$ dipenuhi dengan persamaan fkp geometri sebab 0<p<1 dan

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x;p) = p\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = p(1+q+q^2+\ldots) = p\left(\frac{1}{1-q}\right)$$

$$= \frac{p}{p} = 1$$

Notasinya X ~ GEO(p)

Fungsi distribusi Kumulatif) adalah

$$F(x;p) = \sum_{t=1}^{x} pq^{t-1} = 1 - q^x,\ x = 1, 2, 3, \ldots$$

Contoh 3.6

Dalam suatu proses produksi diketahui bahwa rata-rata di antara 100 butir hasil produksi 1 cacat. Berapakah peluang bahwa setelah 5 butir yang diperiksa baru menemukan cacat pertama?

Penyelesaian

Gunakan distribusi geometri untuk x = 5 dan p = 0,01, maka diperoleh hasil g(5;0,01) = (0,01)$(0,99)^4$ = 0,0096

Teorema 3.4

Rataan dan Variansi variabel random distribusi geometrik adalah

$\mu = \frac{1}{p}$ *dan Var(X) =* $\frac{1-p}{p^2}$

Bukti:

$$E(X) = \sum_x^\infty x f(X) = \sum_x^\infty x p q^{x-1} = p \sum_x^\infty \frac{dq^x}{dq}$$

$$= p \frac{d}{dq} \sum_x^\infty q^x$$

$$= 1/p$$

3.1.6 Distribusi Binomial Negatif

Pada percobaan (*trial*) bernoulli independen, misal X notasi dari banyaknya trail yang diperlukan memperoleh r sukses. Maka distribusi peluang dari X adalah distribusi binomial negatif dengan fkp diskrit diberikan oleh

$$f(x;r,p) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \qquad x = r, r+1, \ldots$$

Notasi X ~ NB(r,p)

Contoh 3.7

Carilah peluang bahwa orang yang melantunkan 3 uang logam sekaligus akan mendapatkan semua muka atau semua belakang untuk kedua kalinya pada lantunan kelima.

Penyelesaian

Dengan menggunakan distribusi binomial negatif untuk x = 5, r = 2 dan p = ¼ diperoleh

$$f(5;2,1/4) = \binom{4}{1}\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{256}$$

Jika X~NB(r,p) maka E(X) = $\frac{r}{p}$, Var(X) = $\frac{rq}{p^2}$ dan $M_X(t) = \left[\frac{pe^t}{1-qe^t}\right]^r$

3.1.7 Distribusi Poisson

Suatu variabel random diskrit X dikatakan mempunyai distribusi Poisson dengan parameter μ>0 dengan bentuk fkp diskrit:

$$f(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Notasi spesial untuk variabel random X berdistribusi Poisson dengan parameter μ adalah

X ~ POI(μ)

Fungsi distribusi kumulatif fdk dari X ~ POI(μ) adalah: F(x;μ) = $\sum_{k=0}^{x} f(k;\mu)$

Contoh 3.8

Rata-rata banyaknya partikel radioaktif yang melewati suatu perhitungan selama 1 milidetik dalam suatu percobaan di laboratorium adalah 4. Berapakah peluang 6 partikel melewati perhitungan itu dalam 1 milidetik tertentu.

Penyelesaian

Dengan menggunakan distribusi Poisson untuk x = 6 dan μ = 4 diperoleh

$$P(6,4) = \frac{e^{-4}4^6}{6!} = 0{,}1042$$

Jika X ~ POI(μ) maka $M_X(t) = e^{-\mu}e^{\mu e^t}$

Jadi $M_X(t) = e^{\mu(e^t-1)}$

Selanjutnya $M_X'(t) = e^{\mu(e^t-1)}\mu e^t = M_X(t)\,\mu e^t$ akibatnya

$M_X'(0) = M_X(0)\,\mu e^t = \mu$, dengan cara yang sama

$M_X''(t) = [M_X(t)+ M_X'(t)]\mu e^t$, sehingga

$M_X''(0) = [M_X(0)+ M_X'(0)]\mu e^t = (1 + \mu)\mu$ dan

$Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = (1 + \mu)\mu - \mu^2 = \mu$

Teorema 3.5

Jika X ~ BIN(n,p) maka untuk setiap x = 0, 1, 2, ... dan p→0 dengan np = μ konstan,

$$\lim_{x\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$$

Bukti

$$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\tfrac{\mu}{n}\right)^x\left(\tfrac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\mu^x}{x!}\left(\tfrac{n}{n}\right)\left(\tfrac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\tfrac{n-x+1}{n}\right)\left(1-\tfrac{\mu}{n}\right)^x\left(1-\tfrac{\mu}{n}\right)^{-x}$$

Hasil diperoleh dengan mengambil limit pada dua sisi persamaan dan menggunakan kalkulus

$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu}$ dan $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-x} = 1$

3.1.8 Distribusi Uniform Diskrit

Suatu variabel random diskrit X mempunyai distribusi uniform diskrit pada bilangan bulat 1, 2, 3, ..., N dan mempunyai fkp dengan bentuk

$$f(x) = \frac{1}{N} \quad x = 1, 2, ..., N$$

Notasi spesial untuk ini adalah X ~ DU(N)

Teorema

Jika X~DU(N), maka $E(X) = \frac{1}{2}(N+1)$ dan $Var(x) = \frac{1}{12}(N^2 - 1)$

Bukti

$$E(X) = \sum_{x=1}^{N} x f(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{N} x \frac{1}{N}$$

$$= \frac{1}{N}(1 + 2 + \cdots + N)$$

$$= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{2} \; N(N+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(N+1)$$

$$Var(X) = \sum_{x=1}^{N} x^2 f(x) - \left(\sum_{x=1}^{N} x f(x)\right)^2$$

$$= \frac{1}{N}(1^2 + 2^2 + \cdots + N^2) - \left(\frac{1}{4}(N+1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{N}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{1}{4}(N+1)^2$$

$$= \frac{2N^2 + 3N + 1}{6} - \frac{N^2 + 2N + 1}{4}$$

$$= \frac{4N^2 + 6N + 2 - 3N^2 - 6N - 3}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(N^2 - 1)$$

Contoh 3.8

Bila bola lampu dipilih secara acak dari sekotak bola lampu yang berisi 1 yang 40 watt, 1 yang 60 watt, 1 yang 75 watt dan 1 yang 100 watt, maka tiap unsur ruang sampel S = {40,60,75,100} muncul dengan peluang ¼. Jadi distribusinya seragam dengan f(x;4) = ¼, x = 40, 60, 75, 100.

Mean sebagai berikut:

$$E(X) = \frac{(N+1)}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N} = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$$

Untuk contoh di atas diperoleh

$$\mu = \frac{40+60+75+100}{4} = 68{,}75$$

$$\sigma^2 = \frac{(40-68,75)^2+(60-68,75)^2+(75-68,75)^2+(100-68,75)^2}{4}$$

$$= \frac{(-28,75)^2+(-8,75)^2+(6,25)^2+(31,25)^2}{4}$$

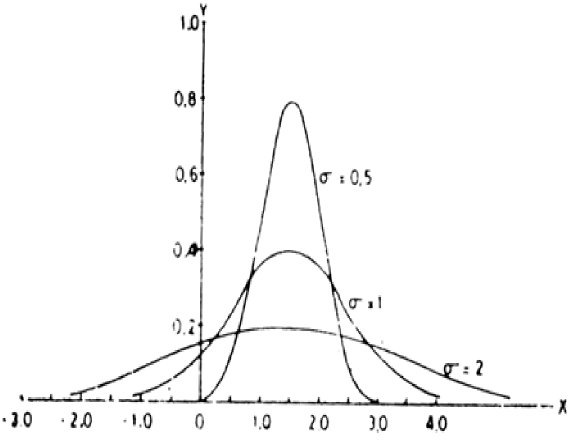
$= 479,6875$

Contoh 3.9

Sebuah dadu dilemparkan, tiap unsur ruang sampel *S={1,2,3,4,5,6}* muncul dengan peluang 1/6. Jadi distribusi seragam dengan

$f(x) = \frac{1}{6}$, untuk x = 1, 2, 3, 4, 5, 6

3.2 Distribusi-distribusi Kontinu Khusus



Gambar 2: Fungsi Distribusi Normal dengan nilai σ=2, σ=1, dan σ=0,5

3.2.1 Distribusi Normal

Distribusi normal merupakan distribui peluang kontinu yang yang sering digunakan di seluruh bidang statistika.Suatu variabel random X mempunyai distribusi Normal dengan mean μ dan varians σ^2 jika mempunyai fkp berbentuk

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

untuk $-\infty < x < \infty$ dengan $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$ ini dinotasikan dengan

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

Distribusi normal juga sering disebut sebagai distribusi Gaussian. Kasus khusus dari distribusi normal adalah distribusi normal standar yang diperoleh dengan substitusi z = $\frac{x-\mu}{\sigma}$. Diadopsi notasi spesial untuk ini katakan

$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ $\qquad -\infty < z < \infty$

$Z \sim N(0,1)$, dan fdk normal diberikan oleh

$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t)dt$

Banyak sifat geometris dasar fkp normal standar dapat diperoleh dengan metode kalkulus

$\phi(z) = \phi(-z)$

untuk semua z real, sehingga $\phi(z)$ merupakan suatu fungsi genap. Dengan kata lain, distribusi normal standar simetrik pada z = 0. Selanjutnya sebab bentuk spesial dari $\phi(z)$, kita punya

$\phi'(z) = -z\phi(z)$

dan

$\phi''(z) = (z^2 - 1)\,\phi(z)$

Konsekuensinya, $\phi(z)$ mempunyai suatu maksimum pada z = 0 dan titik infleksi pada z = ±1. Dicatat juga bahwa $\phi(z) \rightarrow 0$ dan $\phi'(z) = -z[\sqrt{2\pi}\exp(z^2/2)] \rightarrow 0$ untuk $z \rightarrow \pm\infty$.

Juga mungkin menggunakan persamaan untuk menemukan E(Z) dan $E(Z^2)$. Secara berturut-turut,

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z)dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(z)dz$$

$$= \phi(z)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

dan

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2\phi(z)dz$$

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} [\phi''(z) + \phi(z)]dz$$

$$= \phi'(z)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)dz$$

$$= 0 + 1 = 1$$

Secara sama hasil berikut untuk kasus yang lebih umum $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Berdasarkan substitusi pada z = (x - μ)/σ, kita punya

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z)\phi(z)dz$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)dz + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z)dz$$

$$= \mu$$

dan

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z)^2 \phi(z)dz$$

$$= \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)dz + 2\mu\sigma \int_{-\infty}^{\infty} z\phi(z)dz + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} z^2\phi(z)dz$$

$$= \mu^2 + \sigma^2$$

Diperoleh berikut bahwa

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = (\mu^2 + \sigma^2) - \mu^2 = \sigma^2$

Teorema 3.6

Jika $X \sim N(\mu,\sigma^2)$., maka

1. $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim X \sim N(0,1)$.
2. $F_X(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Teorema 3.7

Jika X ~ N(μ,σ^2)., maka $M_X(t) = e^{\mu t+\sigma^2 t \;/2}$

$E(X-\mu)^{2r} = \dfrac{(2r)!\,\sigma^{2r}}{r!\,2^r}$ *r = 1, 2, ...*

$E(X-\mu)^{2r-1} = 0$ *r = 1, 2, ...*

Bukti

$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$, misalkan z = $\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ maka x = zσ+μ, dan dx = σdz,

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{t(z\sigma+\mu)}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z^2-2z\sigma t-2\mu t)}dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma t)^2+\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}dz$$

$M_X(t) = e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma t)^2}dz$, misalkan u = $\frac{1}{2}(z-\sigma t)^2$ atau z = $\sigma t+\sqrt{2u}$ dan dz = $(2u)^{-1/2}$ du diperoleh bahwa

$$M_X(t) = e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u}(2u)^{-1/2}du$$

$$= e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}du$$

$$M_X(t) = e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du$$

$$= e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}du$$

$$= e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Contoh 3.10

(a) Pada suatu distribusi normal dengan mean 12 dan s.d. 2, temukan peluang untuk interval (daerah di bawah kurva) dari x = 9,6 sampai dengan x = 13,8. (b) untuk suatu distribusi normal dengan mean 2 dan s.d 3, temukan nilai dari variat sedemikian sehingga peluang variat dari mean adalah 0,4115.

Penyelesaian

(a) $\quad P(9{,}6 \le x \le 13{,}8) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{9,6}^{13,8} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-12}{2}\right)^2}dx$

$$P(-2{,}2 \le Z \le 0{,}9) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-1,2}^{0,9} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,2dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1,2}^{0,9} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1,2}^{0} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{0,9} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$P(-2{,}2 \le Z \le 0{,}9) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1,2}^{0} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{0,9} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

3.2.2 Distribusi Uniform Kontinu

Misalkan suatu variabel random X dapat diasumsikan nilainya hanya pada interval terbatas, katakan interval terbuka (a,b) dan misalkan fkp konstan, katakan f(x) = c atas interval tersebut. Berdasarkan sifat jumlah peluang sama dengan 1 berakibat $c = \frac{1}{b-a}$

sebab $1 = \int_a^b c\, dx = c(b-a)$.

Khusus distribusi ini diketahui sebagai distribusi uniform pada interval (a,b). Fkp-nya adalah

$$f(x;a,b) = \frac{1}{b-a}, \quad a<x<b$$

dan 0 untuk lainnya. Notasi untuk X dengan fkp di atas adalah

$$X \sim UNIF(a,b)$$

Fdk dari X ~ UNIF(a,b) mempunyai bentuk

$$F(x;a,b) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & b \le x \end{cases}$$

Jika X ~ UNIF(a,b) maka $E(X) = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, x\, dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, dx$

$$E(X) = \frac{1}{b-a}\,\frac{b^2-a^2}{2}$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{1}{b-a} x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{b-a} \left(\frac{b^3 - a^3}{3} \right)$$

$$= \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)}$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$Var(X) = E(x)^2 - (E(x))^2$$

$$= \left(\frac{b^2 + ab + a^2}{3} \right) - \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right)$$

$$= \left(\frac{b^2 + ab + a^2}{3} \right) - \left(\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \right)$$

$$Var(X) = \left(\frac{4b^2 + 4ab + 4a^2}{12} \right) - \left(\frac{3a^2 + 6ab + 3b^2}{12} \right)$$

$$= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Jadi $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

3.2.3 Distribusi Gamma

Definisi 3.4

Fungsi gamma dinyatakan dengan $\Gamma(\kappa)$ *untuk semua* $\kappa > 0$ *diberikan dengan* $\Gamma(\kappa) = \int_0^\infty t^{\kappa-1} e^{-t} dt$

Sebagai contoh jika $\kappa = 1$, maka $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^0 e^{-t} dt = 1$

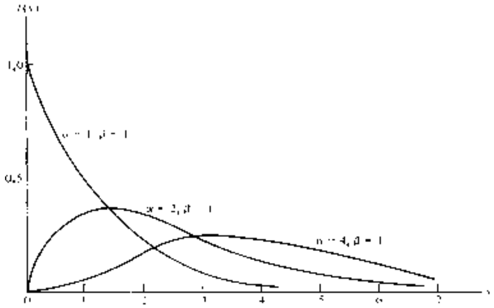
Teorema 3.8

Fungsi gamma memenuhi sifat-sifat berikut:

$\Gamma(\kappa) = (\kappa - 1)\Gamma(\kappa - 1) \quad \kappa > 0$

$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n = 1, 2, \ldots$

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$



Gambar 3: Fungsi Kepadatan Peluang Gamma

Definisi 3.5

Variabel random X dikatakan mempunyai distribusi gamma dengan parameter $\kappa > 0$ *dan* $\theta > 0$ *jika mempunyai fkp berbentuk*

$$f(x;\theta,\kappa) = \frac{1}{\theta^{\kappa}T(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\frac{x}{\theta}} \qquad x>0$$

dan nol untuk lainnya.

Notasi khusus untuk X berdistribusi gamma X~GAM(θ,κ)

Fdk untuk X~GAM(θ,κ) adalah

$$F(x;\theta,\kappa) = \int_0^x \frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} t^{\kappa-1} e^{-\frac{t}{\theta}} dt$$

Teorema 3.9

Jika X~GAM(θ,κ) di mana n suatu bilangan positif, maka fdk dapat ditulis $F(x;\theta,\kappa) = 1 - \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(x/\theta)^i}{i!} e^{-\frac{x}{\theta}}$

Mean dari X~GAM(θ,κ) diperoleh sebagai berikut.

$E(X) \quad = \kappa\theta$ bukti

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\kappa+1-1} \theta^{\kappa}\, e^{-\frac{x}{\theta}} d\left(\frac{x}{\theta}\right)\theta$$

$$= \frac{\theta}{\Gamma(\kappa)} \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\kappa+1-1} e^{-\frac{x}{\theta}} d\left(\frac{x}{\theta}\right)$$

$$= \frac{\theta}{\Gamma(\kappa)} \Gamma(\kappa+1)$$

$$= \frac{\theta}{\Gamma(\kappa)} \kappa\,\Gamma(\kappa)$$

$= \theta\,\kappa$

Sebelum menentukan variansi terlebih dahulu menentukan nilai harapan X2,

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\theta^\kappa \Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\theta^\kappa \Gamma(\kappa)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\kappa+2-1} \theta^{\kappa+1}\, e^{-\frac{x}{\theta}} d\left(\frac{x}{\theta}\right)\theta$$

$$= \frac{\theta \cdot \theta}{\Gamma(\kappa)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\kappa+2-1} e^{-\frac{x}{\theta}} d\left(\frac{x}{\theta}\right)$$

$$E(X^2) = \frac{\theta^2 \cdot (\kappa+1)\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa)}$$

$$= \frac{\theta^2 \cdot (\kappa+1)\,\kappa\,\Gamma(\kappa)}{\Gamma(\kappa)}$$

$$= \theta^2\kappa(1+\kappa)$$

Jadi $E(X^2) = \theta^2\kappa(1+\kappa)$ kemudian,

$$Var(X^2) = E(x)^2 - (E(x))^2$$

$$= \theta^2\kappa(1+\kappa) - (\theta\kappa)^2$$

$$= \theta^2\kappa + \theta^2\kappa^2 - \theta^2\kappa^2 = \theta^2\kappa$$

Sehingga Var(X) = $\kappa\theta^2$

Tentu saja momen dapat juga ditentukan menggunakan fpm

$M_X(t) = (1-\theta t)^{-\kappa}$

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\theta^\kappa \Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\theta^\kappa \Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\frac{x}{\theta}+tx} dx$$

$$M_X(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^\kappa \Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-x(\frac{1}{\theta}-t)} dx \text{ , misalkan } y = x(\tfrac{1}{\theta}-t)$$

$$\frac{y}{\frac{1}{\theta}-t} = x \text{ , } dx = \frac{dy}{\frac{1}{\theta}-t}$$

$$M_X(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\theta^\kappa \Gamma(\kappa)} \left(\frac{y}{\frac{1}{\theta}-t}\right)^{\kappa-1} e^{-y} \frac{dy}{\frac{1}{\theta}-t}$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\theta^\kappa \Gamma(\kappa)} y^{\kappa-1} \left(\tfrac{1}{\theta}-t\right)^{1-\kappa} e^{-y} dy \cdot \left(\tfrac{1}{\theta}-t\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\theta^\kappa \left(\frac{1}{\theta}-t\right)^\kappa \Gamma(\kappa)} \int_0^\infty y^{\kappa-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{\theta^\kappa \left(\frac{1}{\theta^\kappa}(1-\theta t)^\kappa\right) \Gamma(\kappa)} \Gamma(\kappa)$$

$$= \frac{1}{(1-\theta t)^\kappa}$$

$$= (1-\theta t)^{-\kappa}$$

Dan derivatif ke-r untuk kasus ini adalah

$$M_X^{(r)}(t) = (\kappa+r-1)\cdots(\kappa+1)\kappa\theta^r (1-\theta t)^{-\kappa-r}$$

$$M_X^{(r)}(t) = \frac{\Gamma(\kappa+r)}{\Gamma(\kappa)} \theta^r (1-\theta t)^{-\kappa-r}$$

Dan momen ke-r dari X yaitu $M_X^{(r)}(0)$ adalah

$$E(X^r) = \frac{\Gamma(\kappa+r)}{\Gamma(\kappa)} \theta^r$$

3.2.4 Distribusi Eksponensial

Suatu variabel random X mempunyai distribusi eksponensial dengan parameter $\theta > 0$ jika mempunyai fkp berbentuk

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Fungsi fdk dari X adalah

$$F(x;\theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

jadi θ merupakan parameter skala.

Notasi $X \sim GAM(\theta,1)$ dapat gunakan untuk distribusi eksponensial tetapi biasa digunakan notasi, mean dan varian

Mean: E(X) = θ,

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} \, d\left(\frac{x}{\theta}\right) \cdot \theta$$

$$= \theta \int_0^\infty \left(\frac{x}{\theta}\right)^{2-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} \, d\left(\frac{x}{\theta}\right)$$

$$= \theta \, \Gamma(2)$$

$$= \theta$$

Jadi $E(X) = \theta$

Selanjutnya menentukan nilai harapan X^2 untuk menentukan variansi:

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\, dx$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty \left(\frac{x}{\theta}\right)^2 \cdot \theta\, e^{-\frac{x}{\theta}}\, d\left(\frac{x}{\theta}\right) \cdot \theta$$

$$= \theta^2 \int_0^\infty \left(\frac{x}{\theta}\right)^{3-1} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}\, d\left(\frac{x}{\theta}\right)$$

$$= \theta^2\, \Gamma(3)$$

$$= 2\,\theta^2$$

Variansi:

$$Var(X) = E(x^2) - (E(X))^2$$

$$= 2\,\theta^2 - (\theta)^2$$

$$= \theta^2$$

Fungsi pembangkit Momen

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{\theta}+tx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{\theta}-t)x}\, dx \text{ , misalkan } y = (1-t)\frac{1}{\theta}x \text{ , } x = \frac{\theta\, y}{1-t}$$

$$dx = \frac{\theta\, dy}{1-t}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{-y}\, \frac{\theta\, dy}{1-t}$$

$$= \frac{1}{1-t}\int_0^\infty e^{-y}\,dy$$

$$= -\frac{1}{1-t}e^{-y}\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{1-t}\left(e^{-\infty}-e^{-0}\right)$$

$$= -\frac{1}{1-t}(0-1)$$

$$= (1-t)^{-1}$$

3.2.5 Distribusi Weibull

Suatu variabel random X mempunyai distribusi Weibull dengan parameter $\beta > 0 \,\text{dan}\, \theta > 0$ jika mempunyai fkp berbentuk

$$f(x;\theta,\beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\theta^\beta}x^{\beta-1}e^{-(\frac{x}{\theta})^\beta} & x > 0 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Notasi untuk X berdistribusi Weibull adalah

$X \sim WEI(\theta,\beta)$

Selanjutnya fdk untuk X berdistribusi Weibull diperoleh dengan integral dari $f(x;\theta,\beta)$ diperoleh

$$F(x;\theta,\beta) = \begin{cases} 1-e^{-(\frac{x}{\theta})^\beta} & x > 0 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Contoh 3.11

Mean dari $X \sim WEI(\theta,\beta)$ adalah

$E(X) = \theta\Gamma(1+\frac{1}{\beta})$, diperoleh dari

$$= \int_{x=0}^{\infty} x \frac{\beta}{\theta^{\beta}} x^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\theta})^{\beta}} dx$$

$$E(X) = \frac{\beta}{\theta^{\beta}} \int_{x=0}^{\infty} x^{\beta} e^{-(\frac{x}{\theta})^{\beta}} dx$$

Misalkan $\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta} = y$ dan $x = \theta\, y^{1/\beta}$ diperoleh $dx = \frac{\theta}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy$

$$E(X) = \frac{\beta}{\theta^{\beta}} \int_{y=0}^{\infty} (\theta\, y^{\frac{1}{\beta}})^{\beta} e^{-y} (\frac{\theta}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy)$$

$$= \frac{\beta}{\theta^{\beta}} \int_{y=0}^{\infty} \theta^{\beta}\, y e^{-y} \frac{\theta}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy$$

$$= \theta \int_{y=0}^{\infty} y^{\frac{1}{\beta}+1-1}\, e^{-y}\, dy$$

$$= \theta\, \Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)$$

dan

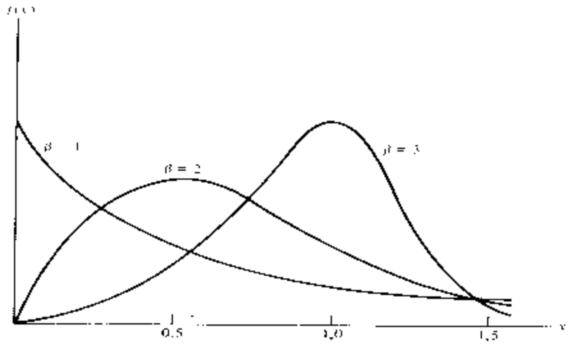
$$E(X^2) = \int_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\beta}{\theta^{\beta}} x^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\theta})^{\beta}} dx = \frac{\beta}{\theta^{\beta}} \int_{x=0}^{\infty} x^{\beta+1} e^{-(\frac{x}{\theta})^{\beta}} dx$$

Misalkan $\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta} = y$ dan $x = \theta\, y^{1/\beta}$ diperoleh $dx = \frac{\theta}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy$

$$E(X^2) = \frac{\beta}{\theta^{\beta}} \int_{x=0}^{\infty} (\theta\, y^{1/\beta})^{\beta+1} e^{-y} \left(\frac{\theta}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy\right)$$

$$= \theta^2 \int_{x=0}^{\infty} y^{1+\frac{2}{\beta}-1} e^{-y} dy = \theta^2 \Gamma(1+\tfrac{2}{\beta})$$

sehingga Var(X) = $\theta^2 \left[\Gamma(1+\tfrac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1+\tfrac{1}{\beta})\right]$



Gambar 4: Gambar Fungsi Kepadatan Peluang Weibull

3.2.6 Distribusi-distribusi t Students

Distribusi t students ditemukan dari distribusi normal, seperti disajikan pada Teorema 3.10 dan 3.12.

Teorema 3.10

Jika $Z \sim N(0,1)$ dan $V \sim \chi^2(v)$, dan jika Z dan V independen, maka distribusi dari

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/v}}$$

adalah diserahkan kepada distribusi t-student dengan derajat kebebasan *v* dinotasikan dengan $T \sim t(v)$. Pdf diberikan dengan

$$f(t;v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2}$$

Teorema 3.11

Jika $T \sim t(v)$, maka untuk $v > 2r$

$$E(T^{2r}) = \frac{\Gamma((2r+1)/2)[\Gamma((v-2r)/2)]^2}{\Gamma(1/2)\Gamma(v/2)}$$

$E(T^{2r-1}) = 0, \quad r = 1, 2, \ldots$

$$\text{Var (T)} = \frac{v}{v-2}, \quad 2 < v.$$

Teorema 3.12

Jika $X_1, \ldots, X_n$ menyatakan sampel random dari $N(\mu, \sigma^2)$, maka

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

3.2.7 Distribusi F Snedecor

Distribusi lain yang juga penting dalam statistika disebut distribusi Fsnedecor yang ditemukan dari distribusi normal.

Teorema 3.13

Jika $V_1 \sim \chi^2(v_1)$ dan $V_2 \sim \chi^2(v_2)$ adalah independen, maka variabel random

$$X = \frac{V_1 / v_1}{V_2 / v_2}$$

Mempunyai fkp untuk x > 0;

$$g(x; v_1, v_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{v_1/2} x^{(v_1/2)-1}\left(1 + \frac{v_1}{v_2}x\right)^{-(v_1+v_2)/2}$$

Ini diketahui sebagai distribusi F Snedecor dengan v_1 dan v_2 dan dinotasikan dengan $F(v_1, v_2)$.

Teorema 3.14

Jika $X \sim F(v_1, v_2)$ maka

$$E(X^r) = \frac{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^r \Gamma\left(\frac{v_1}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \qquad v_2 > 2r$$

$$E(X) = \frac{v_2}{v_2-2} \qquad 2 < v_2$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)} \qquad 4 < v_2$$

Contoh 3.12

Misal $X_1, \ldots, X_n$ dan $Y_1, \ldots, Y_n$ sampel random independen dari populasi dengan distribusi berturut-turut $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ dan $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Jika $v_1 = n_1 - 1$ dan $v_2 = n_2 - 1$, maka $v_1 S_1^2 / \sigma_1^2 \sim \chi^2(v_1)$ dan $v_2 S_2^2 / \sigma_2^2 \sim \chi^2(v_2)$ sehingga

$$\frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} \sim F(v_1, v_2)$$

dan jadi

$$P\left(\frac{S_1^2 \sigma_2^2}{S_2^2 \sigma_1^2} \le f_{0,95}(v_1, v_2)\right) = 0{,}95$$

dan

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2 f_{0,95}(v_1,v_2)} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = 0,95$$

Jika n_1 = 16 dan n_2 = 21 maka $f_{0,95}(15{,}20)$ = 2,20, dan untuk dua sampel sedemikian mudah dikatakan bahwa 95% "yakin" (confident bahwa rasio $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \frac{S_1^2}{S_2^2 f_{0,95}(15{,}20)}$.

3.2.8 Distribusi Beta

Suatu variabel F dapat ditransformasikan ke distribusi Beta. Jika $X \sim F(v_1,v_2)$ maka variabel random

$$Y = \frac{(v_1/v_2)X}{1+(v_1/v_2)X}$$

Mempunyai fkp

$$f(y;a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} y^{a-1}(1-y)^{b-1}, \quad 0 < y < 1$$

dengan a = $v_1/2$ dan b = $v_2/2$. Ini merupakan fkp distribusi beta dengan parameter a>0 dan b > 0, dinotasikan dengan Y~BETA(a,b).

Mean dan variansi dari Y mudah ditunjukkan bahwa

$$E(Y) = \frac{a}{a+b}$$

$$Var(Y) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$$

Contoh 3.13

Misalkan X ~ exp(θ) dan satu dihitung untuk memperhatikan peluang terdiri dari $X_{k:n}$, kita punya

$F(\mathrm{x}) = 1 - e^{-2/\theta} U_{k:n} = F(X_{k:n}) \sim \mathrm{BETA}(k,n\text{-}k+1)$

3.3 Soal-soal Latihan

1. Suatu roulette terbagi atas 25 sektor dengan luas yang sama dan diberi nomor 1 sampai 25. Carilah rumus distribusi peluang X, yaitu bilangan yang muncul bila roda roulette diputar.
2. Delegasi ke suatu konferensi akan tiba dengan pesawat terbang, bus, mobil sendiri atau kereta api dengan peluang masing-masing 0,4, 0,2, 0,3 dan 0,1 Berapa peluang bahwa di antara 9 delegasi yang dipilih secara acak, 3 tiba dengan pesawat terbang, 3 tiba dengan bus, 1 tiba dengan mobil sendiri dan 2 tiba dengan kereta api?
3. Bila 7 kartu diambil secara acak dari sekotak kartu berisi 52 kartu, berapa peluang bahwa
   a. terdapat 2 darinya tergambar (jack, queen, king)
   b. paling sedikit 1 daripadanya sebuah queen
4. Pada 10 soal ujian benar salah
   a. Berapa peluang yang diperoleh untuk semua jawaban yang benar oleh peserta ?
   b. Berapa peluang yang diperoleh untuk delapan jawaban yang benar oleh peserta ?
5. Untuk mengelabui petugas pabean, seorang pelancong menaruh 6 tablet narkotik dalam sebuah botol yang berisi 9 pil vitamin yang sama bentuk dan warnanya. Bila petugas pabean memeriksa 3 tablet secara random untuk dianalisis, berapakah

peluang pelancong tersebut akan ditahan karena membawa narkotik?

6. Suatu permainan bola basket menembak 10 masuk dan peluang dari memukul adalah 0,5 untuk setiap tembakan.
   a. Berapa peluang untuk menembak 6 masuk?
   b. Berapa peluang untuk menembak 6 masuk, jika peluang setiap tembakan adalah 0,6?
   c. Berapa nilai harapan dan variansi dari banyaknya memasukkan bila $p = 0{,}5$?
7. Dari 10 peluru, diambil 4 secara acak dan kemudian ditembakkan. Bila kotak itu mengandung 3 peluru yang cacat dan tidak akan meledak, berapakah peluang bahwa (a) keempatnya meledak, (b) paling banyak 2 yang tidak akan meledak?
8. Jika peluang diambil dari kuda pemenang dalam suatu balapan 0,2, dan jika X adalah banyaknya kemenangan yang diperoleh dari 20 balapan, berapa:
   a. $P[X=4]$
   b. $P[X\leq 4]$
   c. $E[X]$ dan $Var[X]$
9. Suatu panitia beranggotakan 3 orang dipilih secara acak dari 4 dokter dan 2 perawat. Tulislah rumus distribusi peluang variabel random X yang menyatakan banyaknya dokter dalam panitia tersebut. Hitunglah $P(2\leq X\leq 3)$

10. Suatu kantor mempunyai 10 pegawai, tiga laki-laki dan tujuh perempuan. Manager memilih 4 secara random untuk menghadiri suatu kursus singkat pada peningkatan kualitas.
    a. Berapa peluang banyaknya laki-laki dan perempuan terpilih sama?
    b. Berapa peluang bahwa perempuan terpilih lebih?
11. Lima kartu diambil tanpa pengembalian dari 52 kartu. Berikan peluang tiap kejadian berikut
    a. Tepat dua As
    b. Tepat dua king
    c. Lebih dari dua as
    d. Paling sedikit dua as
12. Peluang dari meluncurkan missile berhasil adalah 0,9. Uji peluncuran sehingga mencapai tiga berhasil. Apa peluang untuk tiap berikut
    a. Tepat enam peluncuran diperoleh
    b. Lebih dari enam peluncuran diperoleh
    c. Kurang dari empat peluncuran diperoleh
13. Peluang pembelian suatu televisi berwarna di suatu toko televisi adalah 0,3. Hitunglah peluang bahwa pembeli televisi kesepuluh di toko tersebut akan merupakan pembeli televisi berwarna kelima.
14. Di suatu simpang jalan rata-rata terjadi 3 kecelakaan perminggu. Berapakah peluang pada suatu minggu tertentu
    a. tepat 5 kecelakaan yang akan terjadi?
    b. Kurang dari 3 kecelakaan akan terjadi?

c. Paling sedikit 2 kecelakaan akan terjadi?

15. Diberikan X variabel random berdistribusi Weibull dengan $X \sim WEI(10,2)$. Tentukan

a. $E(X)$

b. $Var(X)$

c. $M_X(t)$

16. Dalam pengujian sejenis ban truk melalui jalan yang kasar ditemukan bahwa 25% truck mengalami kegagalan karena ban pecah. Dari 15 truck yang diuji. Carilah peluangnya bahwa

a. dari 3 sampai 6 mengalami ban pecah

b. kurang dari 4 yang mengalami ban pecah

c. lebih dari 5 mengalami ban pecah

17. Peluang seorang sembuh dari covid adalah 0,9. Berapakah peluang tepat 5 dari 7 orang yang teridentifikasi positif covid akan sembuh?

18. Bila variabel random X berdistribusi Gamma dengan $\alpha = 2$ dan $\beta = 1$, hitunglah $P(1{,}8 < X < 2{,}4)$

19. Gunakan fungsi gamma dengan $y = \sqrt{2x}$ untuk membuktikan bahwa $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

20. Dari kotak berisi 10 peluru, diambil 4 secara random dan kemudian ditembakkan. Bila kotak itu mengandung 3 peluru yang cacat dan tidak akan meledak, berapakah peluang bahwa

a. keempatnya meledak

b. paling banyak 2 yang tidak akan meledak?

21. Suatu panitia beranggotakan 3 orang dipilih secara random dari 4 dokter dan 2 perawat. Tulislah rumus distribusi peluang variabel random X yang menyatakan banyaknya dokter dalam panitia tersebut. Hitung $P(2 \leq X \leq 3)$.

22. Carilah peluang seorang melantunkan suatu uang logam mendapat
    a. muka yang ketiga pada lantunan yang ketujuh
    b. muka yang pertama pada lantunan yang keempat

23. Suatu restoran menyediakan salad berisi rata-rata 5 macam sayuran. Cari peluangnya bahwa salad berisi lebih dari 5 macam sayuran.
    a. pada suatu hari tertentu
    b. pada 3 dari 4 hari mendatang
    c. pertama sekali di bulan April pada tanggal 5 April.

24. Diketahui suatu distribusi normal baku, carilah nilai k sehingga
    a. $P(Z<k) = 0{,}0427$
    b. $P(Z>k) = 0{,}2946$
    c. $P(-0{,}93<Z<k) = 0{,}7235$

25. Umur suatu kap mobil tertentu berdistribusi Weibull dengan tingkat kegagalan $Z(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Hitunglah peluang masih terpasang di mobil setelah 4 tahun.

26. Misal $X \sim GEO(p)$
    a. Tentukan fpm dari X.
    b. Temukan fpm dari X
    c. Temukan E(X)

d. Temukan E[X(X-1)]

e. Temukan Var(X)

27. Misalkan X ~ NB(r,p)

a. Tentukan fpm dari X.

b. Temukan E(X)

c. Temukan Var(X)

28. Jika X mempunyai distribusi Poisson dan jika P[X=0] = 0,2. Tentukan P[X>4].

29. Misalkan X ~ POI(μ)

a. Faktorial fungsi pembangkit momen (fpm) dari X, $G_X(t)$

b. Gunakan $G_X(t)$ untuk menemukan E(X)

c. Gunakan $G_X(t)$ untuk menemukan G[X(X-1)]

30. Misalkan X ~ UNIF(a,b), tentukan peluang bahwa akar dari persamaan g(t)=0 adalah real, dengan $g(t) = 4t^2 + 4Qt + Q + 2$

31. Gunakan teorema fungsi Gamma untuk membuktikan

a. $\Gamma(5)$

b. $\Gamma(5/2)$

32. Misalkan X ~ GAM(1,2), tentukan mode dari X

33. Jika X ~ WEI(θ,β), temukan $E(X^k)$ asumsikan bahwa $k > -\beta$.

34. Kekuatan gunting (dalam pon) pada suatu titik pateri sebagai variabel random berdistribusi Weibull, X ~ WEI(400, 2/3)

a. Temukan P(X>410)

b. Temukan peluang bersyarat P[X>410|X>390]

c. Temukan E(X)

d. Temukan Var(X)

35. Anggap bahwa Z ~ N(0,1). Temukan peluang berikut:

a. $P(Z \leq 1{,}5)$

b. $P(Z > -0{,}49)$

c. $P(0{,}35 < Z < 1{,}28)$

d. $P(|Z| > 1{,}28)$

36. Tentukan nilai dari a dan sedemikian sehingga:

a. $P(Z \leq a)$

b. $P(|Z| < b)$

37. Anggap bahwa X ~ N(3;0,16). Temukan peluang berikut:

a. $P(X > 3)$

b. $P(X > 3{,}3)$

c. $P(2{,}8 \leq X \leq 3{,}1)$

d. Persentil ke-98 dari X

e. Tentukan nilai c sehingga $P(3-c < X < 3+c) = 0{,}67$

38. Misalkan bahwa panjang umur, dalam tahun, baterai alat bantu pendengaran berbentuk variabel random yang berdistribusi Weibull dengan a = ½ dan b = 2.

a. berapa lama baterai tersebut dapat diharapkan tahan

b. berapa peluangnya baterai tersebut masih dapat dipakai setelah 2 tahun?

39. Carilah rataan dan variansi distribusi Weibull.

40. Peluang bahwa seseorang lulus ujian praktek mengendarai mobil adalah 0,7. Carilah peluang seorang yang lulus

a. pada ujian ketiga

b. sebelum ujian keempat

41. Anggap bahwa $X \sim N(1,2)$

a. Temukan $E(X-1)^4$.

b. Temukan $E(X^4)$.

IV. DISTRIBUSI PELUANG GABUNGAN

Pada beberapa aplikasi menggunakan lebih dari satu variabel random, misalkan $X_1, X_2, ..., X_k$. Secara matematika variabel-variabel ini sebagai sebagai komponen dari vektor-vektor berdimensi-k, disebut juga variabel random Multivariat.

4.1 Distribusi-distribusi Diskrit Gabungan

Bila X dan Y dua variabel random diskrit, distribusi terjadinya secara simultan dapat dinyatakan dengan fungsi $f(x,y)$ untuk setiap pasang (x,y) dalam rentang variabel random X dan Y. $f(x,y)$ dinamakan distribusi peluang gabungan X dan Y.

$$f(x,y) = P(X=x, Y=y)$$

yaitu nilai f(x,y) menyatakan peluang bahwa hasil x dan y terjadi bersama-sama.

Definisi 4.1

Fungsi $f(x,y)$ adalah distribusi peluang gabungan atau fungsi kepadatan peluang variabel random diskrit X dan Y bila $f(x,y) \geq 0$ untuk semua (x,y)

1) $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$

2) $P(X = x, Y = y) = f(x,y)$ dan $P[(X,Y) \in A] = \sum_x \sum_y f(x,y)$

Contoh 4.1

Dua isi ballpoint dipilih secara random dari sebuah kotak yang berisi 3 isi warna biru, 2 merah dan 3 hijau. Bila X menyatakan banyaknya yang berwarna biru dan Y warna merah yang dipilih, hitunglah

a. Fungsi peluang gabungan f(x,y) dan

b. $P[(X,Y)\in A]$, bila A daerah $\{(x,y) \mid x + y \leq 1\}$

Penyelesaian

a. Fungsi peluang gabungan f(x,y) = $\dfrac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}$

b. P[(X,Y)∈A] = P(X+Y≤ 1) = f(0,0) + f(0,1) + f(1,0)

$= \frac{3}{28} + \frac{6}{28} + \frac{9}{28}$

f(x,y)		x			Jumlah baris
		0	1	2	
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
	1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$		$\frac{3}{7}$
	2	$\frac{1}{28}$			$\frac{1}{28}$
Jumlah kolom		$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

Bila X dan Y variabel random kontinu, fungsi kepadatan peluang gabungan f(x,y) adalah suatu permukaan yang terletak di atas bidang xy, dan P[(X,Y)∈A] dengan A adalah setiap daerah di bidang xy yang sama dengan isi silinder kanan yang dibatasi oleh dasar A dan permukaan.

Definisi 4.2

Fungsi f(x,y) adalah distribusi peluang gabungan atau fungsi kepadatan peluang variabel random kontinu X dan Y bila

1) *f(x,y) ≥ 0 untuk semua (x,y)*
2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$
3) $P[(X,Y) \in A] = \int_A \int f(x,y)dxdy$

Contoh 4.2

Suatu perusahaan coklat mengirim berkotak-kotak coklat dengan campuran krem, tofe, dan kacang berlapis coklat cerah dan pekat. Bila kotak dipilih secara random, serta X dan Y masing maing menyatakan proporsi yang krem belapis coklat cerah dan pekat, dan misalkan bahwa fungsi pada gabungannya ialah

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{untuk x, y lainnya} \end{cases}$$

a. Tunjukkan bahwa syarat 2 definisi 4.2 dipenuhi

b. Cari $P[(X,Y) \in A]$, bila A daerah {(x,y)|0<x<$0 < x < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$}

Penyelesaian

a. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\, dxdy$

$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \frac{2x^2}{5} + \frac{6xy}{5}\Big|_{x=0}^{x=1} dy$

$= \int_0^1 \left(\frac{2}{5} + \frac{6y}{5}\right) dy$

$= \frac{2y}{5} + \frac{3y^2}{5}\Big|_0^1$

$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$

$= 1$

b. P[(X,Y) ∈A] $= P(0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2})$

$= \int_{1/4}^{1/2}\int_0^{1/2} \frac{2}{5}(2x+3y)\, dxdy$

$= \int_{1/4}^{1/2} \frac{2x^2}{5} + \frac{6xy}{5}\Big|_{x=0}^{x=1/2} dy$

$= \int_{1/4}^{1/2} \left(\frac{1}{10} + \frac{3y}{5}\right) dy$

$= \frac{y}{10} + \frac{3y^2}{10}\Big|_{1/4}^{1/2}$

$$P[(X,Y) \in A] = \frac{1}{10}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\right)\right]$$
$$= \frac{13}{160}$$

Bila diketahui distribusi peluang gabungan f(x,y) dari variabel random diskrit X dan Y maka distribusi peluang g(x) dari y sendiri dapat diperoleh dengan menjumlahkan f(x,y) terhadap semua nilai Y. Demikian juga, distribusi peluang h(y) dari Y sendiri dapat diperoleh dengan menjumlahkan f(x,y) terhadap semua nilai X. Kita sebut g(x) dan h(y) masing-masing sebagai distribusi marginal dari X dan Y. Bila X dan Y variabel random kontinu, untuk penjumlahan dihitung dengan integral.

Definisi 4.3

Distribusi marginal dari X sendiri dan Y sendiri didefinisikan sebagai

$g(x) = \sum_y f(x,y)$ *dan* $h(y) = \sum_x f(x,y)$

untuk X, Y diskrit

$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ *dan* $h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

untuk X, Y kontinu

Contoh 4.3

Tunjukkan bahwa jumlah kolom dan baris tabel 4.1 memberikan distribusi marginal dari X sendiri dan Y sendiri.

Penyelesaian

Untuk variabel random X,

P(X=0) = g(0) $= \sum_{y=0}^{2} f(0,y)$

P(X=0) = g(0) = f(0,0) + f(0,1) + f(0,2)

$$= \frac{3}{28}+\frac{3}{14}+\frac{1}{28} = \frac{5}{14}$$

P(X=1) = g(1) $= \sum_{y=0}^{2} f(1,y)$

= f(1,0) + f(1,1) + f(1,2)

$$= \frac{9}{28} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{15}{28}$$

P(X=2) $= g(2) = \sum_{y=0}^{2} f(2, y) = f(2,0) + f(2,1) + f(2,2)$

$$= \frac{3}{28} + 0 + 0 = \frac{3}{28}$$

yang merupakan jumlah lajur tabel 4.1. Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa nilai h(y) merupakan jumlah barisnya. Dalam bentuk tabel distribusi marginal ini dapat ditulis sebagai berikut:

Tabel 4.2

y	0	1	2
g(x)	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$

y	0	1	2
h(y)	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$

Contoh 4.4

Cari g(x) dan g(y) untuk contoh:

Suatu perusahaan coklat mengirim berkotak-kotak coklat dengan campuran krem, tofe, dan kacang berlapis coklat cerah dan pekat. Bila kotak dipilih secara random, serta X dan Y masing-masing menyatakan proporsi yang krem belapis coklat cerah dan pekat, dan misalkan bahwa fungsi gabungannya ialah

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2x + 3y & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{untuk x, y lainnya} \end{cases}$$

penyelesaian:

menurut definisi

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y) dy$$

$$= \frac{4xy}{5} + \frac{6y^2}{10} \Big]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{4x+3}{5}$$

untuk 0≤x≤1 dan g(x)=0 untuk x lainnya, begitu juga

h(y) = $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)dx = \frac{2(1+3y)}{5}$

untuk 0≤y≤1 dan h(y)=0 untuk y lainnya.

Definisi 4.4

Misalkan X dan Y dua variabel random diskrit maupun kontinu. Distribusi bersyarat variabel random Y bila X=x, dinyatakan dengan

f(y/x) = $\frac{f(x,y)}{g(x)}$*, g(x)>0*

begitu pula, distribusi bersyarat variabel random X, bila diketahui Y=y, dinyatakan dengan

f(x/y) = $\frac{f(x,y)}{h(y)}$*, h(y)>0*

Bila kita ingin mencari peluang variabel random diskrit X berada antara a dan b bila diketahui bahwa variabel random diskrit Y=y maka hitunglah

P(a<X<b|Y=y) = $\sum_x f(x|y)$

Penjumlahan meliputi nilai seluruh nilai X antar a dan b. Bila X dan Y kontinu maka hitunglah

P(a<X<b|Y=y) = $\int_a^b f(x|y)dx$

Contoh 4.5

Kembali kecontoh sebelumnya, Cari distribusi bersyarat X, bila Y=1 dan gunakan ini untuk menghitung P(X=0|Y=1).

Penyelesaian

Kita ingin mencari f(x|y) untuk y = 1. Pertama-tama temukan bahwa

h(1) = $\sum_{x=0}^{2} f(x, 1) = \frac{3}{14} + \frac{3}{14} + 0 = \frac{3}{7}$

sekarang

f(x|1) = $\frac{f(x,1)}{h(1)} = \frac{7}{3} f(x, 1)$, x = 0, 1, 2.

Jadi

$f(0|1) = \frac{7}{3} f(0,1) = \frac{7}{3} \frac{3}{14} = \frac{1}{2}$

$f(1|1) = \frac{7}{3} f(1,1) = \frac{7}{3} \frac{3}{14} = \frac{1}{2}$

$f(2|1) = \frac{7}{3} f(2,1) = \frac{7}{3} 0 = 0$

dan distribusi bersyrat X, bila Y = 1, adalah

X	0	1	2
f(x|1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Akhirnya,

P(X=0/Y=1) = f(0/1) = ½

Jadi bila diketahui bahwa 1 dari kedua isi ballpoint terambil berwarna merah maka peluangnya ½ bahwa isi yang satu lagi bukan biru.

Contoh 4.6

Misalkan X bagian dari pelari pria dan Y bagian dari pelari wanita yang menyelesaikan lomba-lomba maraton dapat dinyatakan sebagai fungsi kepadatan gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{untuk} \qquad \text{nilai x, y lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah g(x), h(y), f(y|x) dan tentukan peluangnya bahwa kurang dari 1/8 pelari wanita yang menyelesaikan suatu marator bila diketahui bahwa tepat ½ dari pelari pria menyelesaikan maraton tersebut.

Penyelesaian

Menurut definisi

g(x) = $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

= $\int_0^x 8xydy$

= $4xy^2]_{y=0}^{y=x}$

= $4x^3$. 0<x<1,

dan

h(y) = $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

= $\int_y^1 8xydx$

= $4xy^2]_{x=y}^{x=1}$

=$4y(1-y^3)$. 0<y<1,

sekarang

f(y|x) = $\frac{f(x,y)}{g(x)}$ = $\frac{8xy}{4x^3}$= $\frac{2y}{x^2}$, 0<y<x

dan

P(Y<1/8|X=1/2) = $\int_0^{1/8} 8ydy$ = 1/16

Contoh 4.7

Diketahui fungsi kepadatan gabungan

f(x,y) = $\begin{cases} x(1+3y^2) & 0<x<1 \qquad 0<y<1 \\ 0 & \text{untuk} \qquad \text{nilai x, y lainnya} \end{cases}$

Carilah g(x), H(y), f(xly) dan hitunglah $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{1}{3})$

Penyelesian

Menurut definisi

g(x) = $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$

= $\int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4} dy$

= $\frac{xy}{4} + \frac{xy^3}{4}\Big]_{y=0}^{y=1}$

$= \frac{x}{2}.\ 0<x<2,$

dan

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x(1+3y^2)}{4} dy$$

$$= \frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8}\Big]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{1+3y^2}{2}.\ 0<y<1,$$

jadi

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} = \frac{x(1+3y^2)/4}{(1+3y^2)/2} = \frac{x}{2}\ ,\ 0<x<2$$

dan

$$P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\middle|Y = \frac{1}{3}\right) = \int_{1/4}^{1/2} \frac{x}{2} dx = \frac{3}{64}$$

Definisi 4.5

Fungsi kepadatan peluang gabungan (fkp gabungan) ber-dimensi-k dari variabel random diskrit $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$
didefinisikan dengan

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = P[X_1=x_1, X_2=x_2, ..., X_k=x_k]$$

untuk semua nilai $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ yang mungkin dari X
Dalam konteks ini notasi $[X_1=x_1, X_2=x_2, ..., X_k=x_k]$ menyatakan interseksi dari k kejadian $[X_1=x_1] \cap [X_2=x_2] \cap ... \cap [X_k=x_k]$

Contoh 4.8

Suatu tempat berisi 1000 bunga terdiri dari 400 bunga warna merah. Dari sisanya 400 bunga putih dan 200 bunga pink. Jika 10 bunga dipilih secara random tanpa pengembalian, maka jumlah bunga merah

X_1 dan banyaknya bunga warna putih X_2 dalam sampel mempunyai distribusi peluang diskrit gabungan. Distribusi peluang gabungan pasangan (X_1,X_2) , secara spesifik adalah:

$$f(x_1,x_2) = \frac{\binom{400}{x_1}\binom{400}{x_2}\binom{200}{10-x_1-x_2}}{\binom{400}{10}}$$

untuk semua $0 \leq x_i$ dan $x_1 + x_2 \leq 10$. Peluang secara eksak untuk dua bunga merah, lima putih dan tiga pink adalah f(2,5) = 0,0331. Dicatat bahwa pertama secara khusus x_1 dan x_2 ditentukan dan banyaknya bunga pink diperoleh dengan $10-x_1-x_2$ sehingga cukup untuk menentukan dua variabel

4.1.1 Distribusi Hipergeometrik Diperluas

Misalkan bahwa suatu kumpulan yang terdiri dari berhingga item N dan merupakan k+1 tipe berbeda, M_1 dari tipe 1, M_2 dari tipe 2 dan seterusnya. Dipilih n item secara random tanpa pengembalian, misalkan n_1 banyaknya item tipe satu terpilih. Vektor $X=(X_1,X_2,., X_k)$ mempunyai distribusi hipergeometrik diperluas dan pdf gabungan berbentuk

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \frac{\binom{M_1}{x_1}\binom{M_2}{x_2}\cdots\binom{M_k}{x_k}\binom{M_{k+1}}{x_{k+1}}}{\binom{N}{n}} \qquad (4.1)$$

untuk semua $0 \leq x_i \leq M_i$ dengan $M_{k+1} = N-\sum_{i=1}^{k} M_i$ dan $x_{k+1} = n-\sum_{i=1}^{k} x_i$

Notasi spesial untuk ini adalah $X \sim HYP(n,M_1, M_2, \ldots,M_i,N)$

4.1.2 Distribusi Multinomial

Misalkan bahwa terdapat k+1 kejadian *mutually exclusive* katakan E_1, E_2, ..., E_k, E_{k+1} yang merupakan sebarang dari eksperimen dan misalkan $p_i = P(E_i)$ untuk i = 1, 2, ..., k+1.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_{k+1}!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_{k+1}^{x_{k+1}} \qquad (4.2)$$

untuk semua $0 \le x_i \le n$dengan $x_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} x_i$ dan $p_{k+1} = 1 - \sum_{i=1}^{k} p_i$

Notasi khusus $X \sim MULT(n,p_1,p_2 \ldots p_k)$

Contoh 4.9

1. Dadu sisi empat digelindingkan 20 kali, dan banyaknya hasil dicatat. Peluang yang sesuai adalah pertama 4, kedua 6 dan 5 ketiga dan 5 keempat dapat dihitung dari rumus (4.2) dengan p_i = 0,25, dan $[20!/(4!)\,(6!)\,(5!)\,(5!)](0,25)^{20}$ = 0,0089.
2. Jika diperhatikan hanya dengan catatan pertama, ketiga dan bilangan genap seperti pada rumus (4.2) dengan $p_1 = p_3$ = 0,25 dan 1 - p_1 - p_3 = 0,5. Peluang dari empat pertama, lima ketiga dan sebelas bilangan genap adalah $[20!/(4!)(5!)\,(11!)](0,25)^9(0,5)^{11}$ = 0,0394
3. Jika sebuah dadu ideal dilemparkan 12 kali, probabilitas untuk memperoleh angka 1, 2, 3, 4, 5, 6 masing-masing tepat dua kali adalah

$$P(X_1=2, X_2=2, \ldots, X_6 = 2) = \frac{12!}{2!2!2!2!2!2!}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2\left(\tfrac{1}{6}\right)^2$$

$$= \frac{1925}{559.872} = 0{,}00344$$

Teorema 4.1

Suatu fungsi $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ merupakan fkp gabungan dari beberapa nilai vektor variabel random $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ jika dan hanya jika memenuhi sifat-sifat berikut:

$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geq 0$ untuk semua nilai $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ yang mungkin

dan $\sum_{x_1} \ldots \sum_{x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$

Definisi 4.6

Jika pasangan (X_1, X_2) variabel random diskrit yang mempunyai fkp gabungan $f(x_1,x_2)$ maka fkp marginal dari X_1 dan X_2 adalah

$$f_1(x_1) = \sum_{x_2} f(x_1, x_2) \tag{4.3}$$

dan

$$f_2(x_2) = \sum_{x_1} f(x_1, x_2) \tag{4.4}$$

Contoh 4.10

Jika $(X_1, X_2) \sim MULT(n;p_1,p_2)$, maka fkp marginal dari X_1 adalah

$$f_1(x_1) = \sum_{x_2} f(x_1, x_2) = \sum_{x_2=0}^{n-x_1} f(x_1, x_2)$$

$$= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} p_1^{x_1} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n-x_1)!\, p_2^{x_2}[(1-p_1)-p_2]^{(n-x_1)-x_2}}{x_1![(n-x_1)-x_2]!}$$

dan

$$f_2(x_2) = \sum_{x_1} f(x_1, x_2) = \sum_{x_2=0}^{n-x_1} f(x_1, x_2)$$

$$= \frac{n!}{x_1!(n-x_1)!} p_1^{\ x_1} \sum_{x_2=0}^{n-x_1} \frac{(n-x_1)!\, p_2^{\ x_2} [(1-p_1)-p_2]^{(n-x_1)-x_2}}{x_1![(n-x_1)-x_2]!}$$

Ini merupakan X_i berdistribusi Binomial (n,p_1)

Definisi 4.7

Fungsi distribusi kumulatifgabungan dari variabel random-k X_1, X_2, ..., X_k merupakan fungsi yang didefinisikan oleh

$F(x_1, x_2,..., x_k) = P[X_1 \leq x_1, \dots X_k \leq x_k]$

Teorema 4.2

Suatu fungsi $F(x_1, x_2)$ merupakan fdk bivariate jika dan hanya jika

$\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = F(-\infty, x_2) = 0$ *untuk semua x_2*

$\lim\limits_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = F(x_1, -\infty) = 0$ *untuk semua x_1*

$\lim\limits_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty}} F(x_1, x_2) = F(\infty, \infty) = 1$

$F(b,d) - F(b,c) = - F(a,d) + F(a,c) \geq 0$ untuk semua $a<b$ dan $c<d$

$\lim\limits_{h \to 0^+} F(x_1 + h, x_2) = \lim\limits_{h \to 0^+} F(x_1, x_2 + h) = F(x_1, x_2)$ *untuk semua x_1 dan x_2*

Contoh 4.11

Ditentukan fungsi dengan definisi berikut

$$F(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & jika\, x_1 + x_2 < -1 \\ 1 & jika\, x_1 + x_2 \geq -1 \end{cases}$$

Jika kita ambil a = c = -1 dan b = d = 1, maka

F(1,1) - F(1,-1) - F(-1,1) + F(-1,-1) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1

4.2 Distribusi-distribusi Kontinu Gabungan

Definisi 4.8

Suatu dimensi-k nilai vektor variabel random X = ($X_1, X_2, ..., X_k$) dikatakan kontinu jika suatu fungsi f($x_1, x_2, ..., x_k$) disebut fungsi kepadatan peluang gabungan dari X sehingga fdk gabungan dapat ditulis dengan

$$F(x_1,x_2,...,x_k) = \int_{-\infty}^{x_k} ... \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1,..., t_k)dt_1...dt_k \quad \text{untuk semua } x = (x_1, x_2, ..., x_k)$$

Seperti kasus dimensi-1, fkp gabungan dapat diperoleh dari fdk dengan diferensial. Selengkapnya

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 ... \partial x_k} F(x_1,..., x_k) \qquad (4.5)$$

bilamana derivatif parsial nya ada.

Teorema 4.3

Sebarang fungsi f($x_1, x_2, ..., x_k$) merupakan fkp gabungan dari dimensi-k variabel random jika dan hanya jika

f($x_1, x_2, ..., x_k$) $\geq$ 0 untuk semua $x_1, x_2, ..., x_k$ dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,..., x_k)dx_1...dx_k = 1$$

Contoh 4.5

$$F(x_1, x_2, ..., x_k) = \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_1} f(t_1,t_2)dt_1dt_2 = \int_{0}^{x_2}\int_{0}^{x_1} 4t_1t_2\, dt_1dt_2$$

$$= x_1^2x_2^2 \quad 0 < x_1 < 1 \text{ dan } 0 < x_2 < 1$$

Ini juga mungkin dihitung untuk peluang gabungan oleh integrasi fkp gabungan atas daerah. Untuk contoh kita dapat mencari peluang untuk kedua trial dari eksperimen, konsentrasi rata-rata kurang dari

0,5. Kejadian ini dapat direpresentasikan dengan $[(X_1,X_2)/2 < 0,5]$ atau lebih umurn dengan $[(X_1,X_2) \in A]$ dengan $A = \{(X_1,X_2) | (X_1,X_2)/2 \in 0,5\}$. Jadi

$P[(X_1,X_2)/2 < 0,5] = P[(X_1,X_2) \in A]$

$$[(X_1,X_2)/2 < 0,5] = \iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x_2} 4x_1 x_2 dx_1 dx_2$$

$$= \int_0^1 2x_2(1-x_2)^2 dx_2 = \frac{1}{6}$$

Untuk secara umum dimensi-k variabel random kontinu $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ dan A suatu kejadian dimensi-k kita punya

$$P[(X \in A)] = \int ... \int f(x_1, ..., x_k) dx_1 ... dx_k$$

Untuk lebih mudahnya notasi dari distribusi marginal disimpulkan dengan variabel random diskrit gabungan. Suatu konsep yang sama dapat dikembangkan untuk variabel random, tetapi pendekatan berbeda. Lebih detailnya, ditentukan fdk gabungan $F(x_1,x_2)$ dari pasangan variabel random $X = (X_1,X_2)$. Fdk X_1 adalah

$$F_1(x_1) = P[X_1 \le x_1] = P[X_1 \le x_1, X_2 \le \infty] = F(x_1,\infty)$$

$$F_1(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1,x_2}(t_1,t_2) dt_2 \right) dt_1 = \int_{-\infty}^{x_1} f_1(t_1) dt_1$$

Jadi untuk kasus kontinu, fungsi distribusi dapat kita interpretasikan sebagai marginal fdk dari X_1 diberikan dengan $F(x_1,\infty)$ dan pasangan fkp yang sesuai dengan $F_1(x_1)$ adalah persamaan tertutup dalam yaitu

$$f_1(x_1) = \frac{d}{dx_1} F_1(x_1)$$

$$= \frac{d}{dx_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_1} (f(t_1, t_2) dt_1) dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2$$

Secara sama hasil dapat diperoleh untuk X_2 seperti ditunjukkan definisi berikut

Definisi 4.9

Jika pasangan (X_1,X_2) variabel random kontinu mempunyai fungsi kepadatan peluang gabungan f (x_1,x_2) maka marginal dari X_1 dan X_2 adalah

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1$$

Definisi 4.10

Jika X = (X_1,X_2, ... X_k) merupakan variabel random dimensi-k dengan fdk F(x_1, x_2, ..., x_k) maka marginal fdk dari X_j adalah $F_j(x_j) = \lim_{\substack{x_j \to \infty \\ \text{semua } x \neq j}} F(x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_k)$

4.3 Variabel-variabel Random Independen

Definisi 4.11

Variabel random independen. Variabel random $X_1, X_2, \ldots X_k$ dikatakan independen jika untuk setiap $a_i < b_i$

$$P[a_1 \le X_1 \le b_1, \ldots, a_k \le X_k \le b_k] = \prod_{i=1}^{k} P[a_i \le X_i \le b_i]$$

Teorema 4.4

Dua variabel random X_1 dan X_2 dengan fkp gabungan $f(x_1,x_2)$ adalah independen jika dan hanya jika

1) Himpunan $\{(x_1, x_2) \mid f(x_1,x_2) > 0\}$ merupakan produk Kartesian AxB, dan
2) Fungsi kepadatan peluang gabungan dapat difaktorkan sebagai produk fungsi-fungsi dari x_1 dan x_2, $f(x_1,x_2) = g(x_1)h(x_2)$

Contoh 4.12

Fungsi kepadatan peluang gabungan dari X_1 dan X_2 adalah

$f(x_1,x_2) = 8x_1x_2, \quad 0<x_1<x_2<1$

nol untuk lainnya. Pada kasus ini himpunan pendukung adalah $\{(x_1,x_2) l\ 0 < x_1 < 1, \text{dan } 0 < x_2 < 1\}$ yang mana dapat direpresentasikan dengan A x B di mana A dan B kedua-duanya merupakan interval terbuka (0,1). Sifat bagian (1) dan (2) dari teorema dipenuhi karena sebab $8x_1x_2$ dapat difaktorkan menjadi $g(x_1)h(x_2)$. Jadi X_1 dan X_2 indepefiden.

Contoh 4.13

Fungsi kepadatan peluang gabungan dari X_1 dan X_2 adalah

$f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \; 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$

nol untuk lainnya. Pada kasus ini himpunan pendukung adalah $\{(x_1,x_2)| 0 < x_1< 1$, dan $0 < x_2< 1\}$ yang mana dapat direpresentasikan dengan A x B dengan A dan B kedua-duanya merupakan interval terbuka (0,1). Sifat bagian (2) dari teorema tidak dipenuhi karena sebab $X_1 + X_2$ tidak dapat difaktorkan menjadi $g(x_1)h(x_2)$. Jadi X_1 dan X_2 dependen.

4.4 Soal-soal Latihan

1. Tentukan peluang bahwa dalam pelemparan sebuah koin ideal sebanyak 6 kali, akan muncul

   a. 0, b. 1, c. 2, d. 3, e. 4, f. 5, g. 6 muka.
2. Berapa peluang untuk memperoleh jumlah 9 tepat satu kali dalam 3 lemparan dari sepasang dadu.
3. Jika 30% dari bohlam lampu yang diproduksi oleh suatu perusahaan rusak, tentukan peluang bahwa dalam suatu sampel dari 100 lampu,

   a. 0, b. 1, c. 2, d. 3, e. 4, f. 5 akan rusak
4. Sebuah kotak berisi 5 kelereng merah dan 10 kelereng putih. Jika 8 kelereng dipilih secara random (tanpa penggantian), tentukan peluang bahwa

   a. 4 diantaranya akan merah

   b. semuanya akan putih

   c. paling sedikit satu akan merah
5. Suatu kotak bunga berisi 1000 tangkai dengan 400 merah, 400 putih dan 200 pink. Tujuh tangkai diambil tanpa pengembalian. Tentukan peluang untuk setiap kejadian di bawah ini

a. Tepat 5 merah (r) dan 2 putih (w)

b. Tepat 5 merah (r) dan 2 pink (p)

6. Lima kartu diambil tanpa pengembalian dari kotak yang berisi 52 kartu, x = banyaknya Ace, y banyaknya king, z banyaknya queen. Tentukan peluang dari

   a. A = [X=2]
   b. B = [Y=2]
   c. $A \cap B$
   d. $A \cup B$
   e. A diberikan B
   f. [X=x]
   g. [X < 2]
   h. $[X \geq 2]$
   i. [X = 2, Y = 2, Z = 1]
   j. Tuliskan pernyataan untuk fkp gabungan X,Y,Z
   k. A = [X=2]

7. Kerjakan kembali nomor 6 untuk kartu diambil dengan pengembalian

   a. A = [X=2]

   b. B = [Y=2]

   c. $P(A \cap B)$

   d. $P(A \cup B)$

   e. P(A diberikan B) = P(Al B)

8. X dan Y variabel random dengan fdk yaitu:

$$F(x,y) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}xy(x+y) & jika\, 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ \tfrac{1}{2}x(x+1) & jika\, 0 < x < 1, \quad 1 \le y \\ \tfrac{1}{2}y(y+1) & jika\, 1 \le x, \quad 0 < y < 1 \\ 1 & jika\, x \ge 1, \quad y \ge 1 \\ 0 & jika\ yang\ lainnya \end{cases}$$

Tentukanlah

a. f(x,y) gabungan

b. P[x, y]

c. P[x + y:5 0,5]

d. P[x + y:51,5]

e. P[x+y:5z] z>0

9. X dan Y variabel random kontinu dengan fkp sebagai berikut

$$f(x)=\begin{cases} k(x+y) & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{x dan y lainnya} \end{cases}$$

a. Carilah k agar f merupakan fkp

b. Carilah marginal $f_1(x)$ dan $f_2(y)$

c. Carilah F(x,y)

d. Carilah $f(y \mid x)$

e. Carilah $f(x \mid y)$

10. Jika X dan Y variabel random diskrit dengan

$$f(x,y) = c\,\frac{2^{x+y}}{x!\,y!},\ x = 0, 1, 2, \ldots \quad y = 0, 1, 2, \ldots$$

a. Tentukan harga c

b. Tentukan marginal fkp dari x dan y

c. Apakah x dan y independen

11. Jika X dan Y variabel random diskrit dengan fkp gabungan yaitu $f(x_1,x_2) = C(x_1+x_2)$, dengan $x_1 = 0, 1, 2$ dan $X_2 = 0, 1, 2$ Tentukan harga c.
12. Dua kartu diambil secara random tanpa pengembalian dari kotak. Ambil X = banyaknya hati dan Y = banyaknya kartu hitam.
    a. Tuliskan fdk F(x,y)
    b. Tabulasikan fdk gabungan, F(x,y)
    c. fkp marginal dari $f_1(x)$ dan $f_2(y)$
    d. Tunjukkan X dan Y tidak independen
    e. P[Y=1, X =1] dan f. P[y=y, X =1]
13. Anggap fkp gabungan adalah daya tahan benda yaitu: $f(x,y) = e^{-(X+Y)}$ untuk $0<x<\infty$ dan $0<y<\infty$ dan $f(x,y) = 0$ untuk yang lainnya. Tentukan
    a. fkp marginal dari $f_1(x)$ dan $f_2(y)$
    b. fdk gabungan F(x,y)
    c. P[X>2]
    d. P[X<Y]
    e. P[X+Y>2]
14. Jika X_1 dan X_2 adalah kelangsungan hidup (dalam hari) dari 2 tikus putih dengan X_1 dan X_2 independen, $X_1 \sim PAR(1,1)$ dan $X_2 \sim PAR(1,2)$
    a. Tentukan fkp gabungan X_1 dan X_2
    b. Tentukan peluang hidup tikus kedua kurang dari tikus pertama
15. Bila X_1 dan X_2 merupakan variabel random diskrit dengan fkp seperti tabel

X_2 / X_1	1	2	3	4
1	1/12	1/6	0	3/12
2	0	1/9	1/5	14/45
3	1/18	1/4	2/15	474/1080
4	5/36	19/36	5/15	1

a. Tentukan fkp marginal dari X_1 dan X_2.

b. Apakah X_1 dan X_2 independen

c. $P[X_1 < 2]$

16. Misalkan X dan Y variabel random kontinu dengan fkp gabungan

a. Tentukan fkp marginal x

b. Carilah fkp bersyarat yaitu Y dengan syarat X=x

c. $P[Y>0,1 \mid x=0,5]$

V. SIFAT-SIFAT VARIABEL RANDOM

Jika X dan Y variabel random dengan fungsi peluang gabungan *f(x,y)*, maka

$$\mu_x = E(X) = \begin{cases} \sum_x \sum_y xf(x,y) = \sum_x xg(x) & \text{untuk x,y diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{xf(x,y)dxdy} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{xg(x)dx} & \text{untuk x,y kontinu} \end{cases}$$

$$\mu_y = E(Y) = \begin{cases} \sum_y \sum_x yf(x,y) = \sum_y yh(y) & \text{untuk x,y diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{yf(x,y)dxdy} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{yh(y)dy} & \text{untuk x,y kontinu} \end{cases}$$

Sifat-sifat nilai harapan untuk X dan Y diskrit atau kontinu

1. $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$
2. $E\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i E(X_i)$, jika a_i konstan
3. Jika X dan Y independen maka $E(XY) = E(X)E(Y)$

5.1 Kovariansi

Definisi 5.1

Momen ganda ke-r dan ke-s terhadap pusat dari dua varibel random X dan Y, ditulis $\mu'_{r,s} = E[X^r Y^s]$, *r dan s = 0, 1, 2, ...*

Definisi 5.2

Momen ganda ke-r dan ke-s terhadap rataan dari dua varibel random X dan Y, ditulis $\mu_{r,s} = E[(X-\mu)^r (Y-\mu)^s]$, *r dan s = 0, 1, 2, ... Kovariansi dua variabel random X dan Y ditulis* $\sigma_{X,Y}$ *atau cov (X,Y) adalah* $Cov(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$

Jika X dan Y adalah dua variabel random yang saling bebas, maka $\sigma_{X,Y}$ = 0. Tetapi sebaliknya belum tentu.

Jika $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah variabel random-variabel random dan

$Y_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ dan $Y_2 = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$ dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dan $b_1, b_2, \ldots, b_n$, maka

$$Cov(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i Var(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j + a_j b_i) Cov(Y_i, Y_j)$$

Kovarian dua variabel random X dan Y adalah <u>ukuran keeratan hubungan</u> atau <u>ukuran asosiasi</u> X dan Y.

Contoh 5.1

1) Dua tablet diambil secara random dari suatu botol yang berisi 3 aspirin, 2 sedatif, dan 4 laksatif. Jika X = banyaknya aspirin dan Y = banyaknya sedatif. Hitunglah Cov (X,Y).

   Setelah dilakukan perhitungan diperoleh bahwa P(X=1,Y=2) = P(X=2,Y=1) = P(X=2,Y=2) = 0, karena banyaknya tablet yang diambil tidak mungkin lebih dari dua. Untuk menghitung P(X=x, Y=y) yang lain digunakan

   P(X=0, Y=1) = P(aspirin=0, sedatif=1)

   = P(aspirin=0, sedatif=1, laksatif=1)

$$= \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

   sehingga diperoleh tabel seperti berikut ini:

		y			
		0	1	2	
x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$
	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
	2	$\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{12}$
		$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

Dari tabel di atas dapat dihitung bahwa

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} xy \quad f_{X,Y}(x,y) = 1 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{2} x f_X(x) = 0 \cdot \tfrac{5}{12} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{12} = \frac{2}{3} \quad \text{dan}$$

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{2} y f_Y(y) = 0 \cdot \tfrac{7}{12} + 1 \cdot \tfrac{7}{18} + 2 \cdot \tfrac{1}{36} = \tfrac{4}{9} \quad \text{, sehingga}$$

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = \tfrac{1}{6} - \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{9} = -\tfrac{7}{54}$$

Sifat-sifat Kovariansi

1. Jika X dan Y variabel random, maka

   $$\sigma_{xy} = Kov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_y$$

2. Jika X dan Y variabel random, a dan b konstan, maka
   a. $Kov(aX, bY) = abKov(X,Y)$
   b. $Kov(X+a, Y+b) = Kov(X,Y)$
   c. $Kov(X, aX+b) = aVar(X)$
3. Jika X dan Y independen, maka $Kov(X,Y) = 0$

5.2 Variansi

Jika X dan Y variabel random dengan fungsi peluang gabungan f(x,y) maka

$$Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)+2Kov(X,Y)$$

Jika X dan Y independen maka

$$Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y)$$

Jika $X_1, X_2 \cdots, X_k$ variabel random dan $a_1, a_2 \cdots, a_k$ konstan maka

$$Var\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum a_i a_j Kov(X_i, X_j)$$

Jika $X_1, X_2 \cdots, X_k$ independen, maka $Var\left(\sum_{i=1}^{k} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 Var(X_i)$

5.3 Koefisien Korelasi

Definisi 5.3

Korelasi dua variabel random X,Y ditulis $\rho_{X,Y}$ *adalah*

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$$

Jika Var(X), Var(Y) ada dan Var(X) > 0, Var(Y) > 0.

Baik kovariansi maupun korelasi keduanya merupakan ukuran hubungan linear antara dua variabel random

Jika ρ koefisien korelasi X dan Y, maka $-1 \le \rho \le 1$

Contoh 5.2

1. Perhatikan tabel berikut.

Y / X	0	1	2	g(x)
0	0	$\frac{2}{70}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{5}{70}$
1	$\frac{3}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{30}{70}$
2	$\frac{9}{70}$	$\frac{18}{70}$	$\frac{3}{70}$	$\frac{30}{70}$
3	$\frac{3}{70}$	$\frac{2}{70}$	0	$\frac{5}{70}$
h(y)	$\frac{15}{70}$	$\frac{40}{70}$	$\frac{15}{70}$	1

$$\mu_x = E(X)$$

$$= \sum_x \sum_y x f(x,y) = \sum_x x g(x)$$

$$= \frac{30+60+15}{70} = 1\frac{1}{2}$$

$$\mu_y = E(Y)$$

$$= \sum_y \sum_x y f(x,y) = \sum_y y h(y)$$

$$= 0 \cdot \frac{15}{70} + 1 \cdot \frac{40}{70} + 2 \cdot \frac{15}{70}$$

$$= \frac{70}{70} = 1$$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy f(x,y)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{18}{70} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{18}{70} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{70} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{9}{70} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{70}$$

$$= \frac{9}{7}$$

$$E(X+Y) = \sum_x \sum_y (x+y) f(x,y)$$

$$= 1\cdot\tfrac{3}{70} + 2\cdot\tfrac{9}{70} + 3\cdot\tfrac{3}{70} + 1\cdot\tfrac{2}{70} + 2\cdot\tfrac{18}{70} + 3\cdot\tfrac{18}{70} + 4\cdot\tfrac{2}{70} + 2\cdot\tfrac{3}{70} + 3\cdot\tfrac{9}{70} + 4\cdot\tfrac{3}{70}$$

$$= 2{,}5$$

$$E(X)+E(Y) = 1\frac{1}{2}+1 = 2{,}5$$

2. Jika X dan Y variabel random dengan fungsi padat peluang gabungan

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(1+3y^2)}{4} & 0<x<2,\, 0<y<1 \\ 0 & \text{x, y lainnya} \end{cases}$$

Tentukan : $E(X)$, $E(Y)$ dan $E(XY)$

Apakah X dan Y independen

Penyelesaian

$$E(X) = \int_0^1\int_0^2 x f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^2 x\,\frac{x(1+3y^2)}{4}\,dxdy = \frac{4}{3}$$

$$E(Y) = \int_0^1\int_0^2 y f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^2 y\,\frac{x(1+3y^2)}{4}\,dxdy = \frac{5}{8}$$

$$E(XY) = \int_0^1\int_0^2 xy f(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^2 xy\,\frac{x(1+3y^2)}{4}\,dxdy$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{4}{3}+2\right) = \frac{5}{6}$$

$$E(X)\cdot E(Y) = \tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{5}{8} = \frac{5}{6}$$

Karena $E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$ maka X dan Y independent

5.4 Nilai Harapan Bersyarat

Definisi 5.4

Jika X dan Y adalah variabel-variabel random berdistribusi peluang gabungan, maka nilai harapan bersyarat dari Y diberikan X = x diberikan oleh

$$E(Y|x) = \sum_y y f(y|x) \qquad \text{Jika X dan Y diskrit}$$

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x) dy \qquad \text{Jika X dan Y kontinu}$$

Biasa dinotasikan untuk nilai harapan bersyarat adalah $E_{Y|x}(Y)$ dan $E(Y|X=x)$

Contoh 5.3

Diberikan fkp bersyarat dari Y diberikan X = x adalah

$$f(y|x) = \frac{2}{x} \text{ untuk } 0 < y < \frac{x}{2}$$

Nilai harapan bersyarat adalah

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{x/2} y\left(\frac{2}{x}\right)dy = \frac{2}{x}\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{x/2} = \frac{(2/x)(x/2)^2}{2}$$

$$= \frac{x}{4} \text{ untuk } 0 < x < 2$$

Teorema 5.1

Jika X dan Y variabel random berdistribusi peluang gabungan, maka $E(E(Y|X) = E(Y)$

Contoh 5.4

Berdasarkan contoh sebelumnya, digunakan teorema dengan $E(Y|x) = \frac{x}{4}$ dan $f_1(x) = \frac{x}{2}$ untuk 0 < x < 2. Sebagai berikut

$$E(Y) = E[E(Y|X)] = \int_0^2 \left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{3}$$

Teorema 5.2

Jika X dan Y variabel random independen, maka

$$E(Y|x) = E(Y) \text{ dan } E(X|y) = E(X)$$

Definisi 5.5

Variansi bersyarat dari Y diberikan X = x diberikan oleh

$$Var(Y|x) = E\{[Y - E(Y|x)^2\} \text{ atau}$$

$$Var(Y|x) = E(Y^2|x) - [E(Y|x)]^2$$

5.5 Soal-soal Latihan

1. Tentukan kovarian dari soal contoh 5.2 nomor 1
2. Tentukan variansi dari soal contoh 5.2 nomor 2
3. Misalkan X dan Y mempunyai distribusi peluang gabungan:

X \ Y	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$
3	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{3}$

Tentukan

a. $E(XY)$

b. Kovariansi variabel random X dan Y

c. Nilai harapan X dan Y

d. Variansi X dan Y

4. Dua variabel random mempunyai fungsi kepadatan gabungan sebagai berikut

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{50}\left(x^2+y^2\right) & 0<x<2, 1<y<4 \\ 0 & \text{untuk x dan y lainnya} \end{cases}$$

Hitunglah kovariansi variabel random *X* dan *Y*

5. Bila *X* dan *Y* dua variabel random independen dengan variansi σ_X^2 = 5 dan $\sigma_y^2 = 3$

Hitunglah variansi variabel random $Z = -2X + 4Y - 3$

6. Misalkan $f(x,y) = 6x$, 0<x<y<1dan nol untuk lainnya. Tentukan

(a) $f_1(x)$ (b). $f_2(y)$ (c) $COV((X,Y)$

(d) $f(y/x)$ (e) $E(Y/x)$

7. Misalkan *X* dan *Y* variabel random kontinu dengan fungsi kepadatan peluang gabungan f$(x,y) = 4(x-xy)$ jika $0<x<1$ dan $0<y<1$, dan nol untuk lainnya

8. Jika *Z* adalah suatu variabel random dengan $f_Z(z) = 1$, untuk $0<z<1$ dan $X = \sin 2\pi Z$, $Y = \cos 2\pi Z$, selidiki apakah *X* dan *Y* saling bebas?

9. Jika variabel random *X,Y* mempunyai fungsi kepadatan peluang gabungan

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x+2y) & 0 < x < 1, 1 < y < 2 \\ 0 & \text{untuk x dan y lainnya} \end{cases}$$

maka ekspektasi $g(X,Y) = \dfrac{X}{Y^3}$ adalah …

10. Suatu industri menghasilkan barang yang dapat dikelompokkan sebagai cacat dan tidak cacat. Peluang suatu barang cacat 0,1. Suatu percobaan dilakukan dengan mengambil 5 barang secara random dari proses. Misalkan X variabel random yang menyatakan banyaknya barang yang cacat dalam sampel sebesar 5 ini. Tentukan fungsi kepadatan peluang X.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L. J. Engelhardt. M.(1992). Introduction to Probability and Mathematical Statistics. *Duxbury Press. California*.

Dudewicz, E. J., Mishra, S. N., & Sembiring, R. K. (1995). Statistik Matematika Modern.

Hogg, R. V., McKean, J., & Craig, A. T. (2005). *Introduction to mathematical statistics*. Pearson Education.

Mosteller, F., Rourke, R. E., & Thomas Jr, G. B. (1988). Peluang dengan Statistika Terapannya.

Myers, R. H., & Walpole, R. E. (1995). Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan. *Bandung: ITB*.

GLOSARIUM

Ruang Sampel adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan.

Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel.

Peluang adalah besarnya probabilitas atau kemungkinan berlangsungnya suatu kejadian.

Peluang saling lepas adalah peluang dari beberapa kejadian yang saling meniadakan.

Peluang saling bebas adalah peluang dari beberapa kejadian yang tidak saling mempengaruhi.

Peluang bersyarat adalah peluang dari dari kejadian kedua terjadi setelah kejadian pertama dan seterusnya.

Variabel random adalah fungsi dari ruang sampel ke bilangan real.

Fungsi Kepadatan Peluang (fkp) adalah fungsi peluang dari suatu variabel random yang mempunyai sifat tertentu.

Fungsi Distribusi Komulatif (fdk) adalah fungsi komulatif peluang dari semua nilai variabel random dengan sifat tertentu.

LAMPIRAN

Tabel Distribusi Normal

Z	0,00	0,01	0,02		0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080		0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478		0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871		0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255		0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0, 6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628		0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985		0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324		0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642		0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939		0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212		0,8238	0,8264	0,8289	0,8314	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461		0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686		0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888		0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066		0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222		0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357		0,9370	0,9382	0,9395	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474		0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573		0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656		0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726		0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783		0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830		0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868		0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898		0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922		0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941		0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956		0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967		0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976		0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982		0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9981
3,0	0,9987	0,9987	0,9987		0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991		0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994		0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995		0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997		0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
γ	0,90	0,95	0,975		0,99	0,995	0,999	0,9995	0,99995	0,999995	
z_γ	1,282	1,645	1,960		2,236	2,576	3,090	3,291	3,891	4,417	
	0,90	0,95	0,975		0,99	0,995	0,999	0,9995	0,99995	0,999995	
	1,282	1,645	1,960		2,236	2,576	3,090	3,291	3,891	4,417	

Fungsi Distribusi Peluang Diskrit Spesial

Nama Distribusi	Fungsi Kepadatan Peluang	Mean/ Rataan	Variansi	Fungsi Pembangkit Momen
Bernoulli X~BIN(1,p) 0<p<1 q=1-p	$p^x q^{1-x}$ $x = 0,1$	p	pq	$pe^t + q$
Binomial X~BIN(n,p) 0<p<1 q=1-p	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ $x = 0,1,2,\dots,n$ $q = 1 - p$	np	npq	$(pe^t + q)^n$ $-\infty < t < \infty$
Hipergeo metrik X~HYP(n,M,N) n=1,2,...,N M=0,1,...,N	$\dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$ $x = 0,1,2,\dots,n$	$\dfrac{nM}{N}$	$\dfrac{nM}{N}\dfrac{N-n}{N-1}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)$	-

Geometri X~GEO(p) 0<p<1 q=1-p	pq^{x-1}, $x = 1,2,3,\ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-qe^t}$
Binomial Negatif X~NB(r,p) 0<p<1 r=1,2, ...	$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$, $x = r, r+1, \ldots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\left[\frac{pe^t}{1-qe^t}\right]^r$
Poisson X~POI(μ) 0<μ	$\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}$, $x = 0,1,2,\ldots$	μ	μ	$e^{\mu(e^t-1)}$
Uniform Diskrit X~DU(N) N=1,2, ...	$\frac{1}{N}$, $x = 1,2,\ldots,N$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\frac{1}{N}\frac{e^t - e^{(N+1)t}}{1-e^t}$

Nama Distribusi	Fungsi Kepadatan Peluang	Mean (Rataan)	Variansi	Fungsi Pembangkit Momen
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $-\infty < X < \infty$	μ	σ^2	$e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
Uniform	$f(x;a,b) = \frac{1}{b-a}$, $a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	-
Gamma	$\frac{1}{\theta^{\kappa} T(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$	$\kappa\theta$	$\kappa\theta^2$	$(1-\theta t)^{-\kappa}$
Eksponensial	$\begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{x}}, x > 0 \\ 0 \quad , \quad x \ lainnya \end{cases}$	θ	θ^2	$(1-t)^{-1}$

Welbull $0<\theta$ $0<\beta$	$\begin{cases} \frac{\beta}{\theta^{\beta}} x^{\beta-1} e^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}, & x>0 \\ 0, & x \text{ lainnya} \end{cases}$	$\theta\Gamma(1+\frac{1}{\beta})$	$\theta^2\left[\Gamma(1+\frac{2}{\beta})\right]$ $-\theta^2\left[\Gamma^2(1+\frac{1}{\beta})\right]$	*
t-Student $v=1, 2, \ldots$	$\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$	0	$\frac{v}{v-2}$	**
Extreme Value $0<\theta$	$\frac{1}{\theta}\exp\{[(x-\eta)/\theta]$ $-\exp[(x-\eta)/\theta]\}$	$\eta-\gamma\theta$ $\gamma=0{,}5772$ Konstanta Euler	$\frac{\pi^2\theta^2}{6}$	$e^{\eta}\Gamma(1+\theta t)$
Beta	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ $0<x<1$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	*
Cauchy $X\sim CAU(\theta,\eta)$ $0<\theta$	$\frac{1}{\theta\pi\{1+[(x-\eta)/\theta]^2\}}$	**	**	**

Soal-soal dan Penyelesaian

Peluang

1. Sebuah mesin bola karet mengeluarkan permen warna merah, hitam dan hijau.
   a. Tuliskan kemungkinan ruang sampelnya.
   b. Tentukan semua kejadian yang mungkin.
   c. Jika R adalah peristiwa "merah" tulis hasil yang bukan R.
   d. Jika G peristiwa "green" berapa R $\cap$ G

   Jawab:

   Misal r : merah, b : hitam, g: hijau

   a. $S = \{r, b, g\}$
   b. Peristiwanya adalah = $\{S, \phi, \{r\}, \{b\}, \{g\}, \{rg\}, \{rb\}, \{bg\}\}$
   c. $\{b, g\}$
   d. $R \cap G = \phi$ karena yang dikeluarkan tidak ada yang dua warna.

2. Dua bola karet dan mesin pada hal 1 diperoleh dengan 2x percobaan dengan urutan hasil di perhatikan asumsikan bahwa sekurang-kurangnya ada 2 bola dari setiap warna pada mesin.
   a. Bagaimana ruang sampelnya.

b. Berapa banyak kejadian yang mungkin yang memuat dan hasil.

c. Selanjutnya peristiwa-peristiwa dianggap sebagai peristiwa yang sederhana dengan

C_1= terambil permen merah pada pengambilan pertama

C_2= terambil sekurang-kurangnya sebuah permen warna merah.

Tentukan: $C_1 \cap C_2, C_1^c \cap C_2$.

Jawab:

a. S = {(r,r),(r,g),(r,b),(g,g),(g,r),(g,b),(b,b),(b,r),(b,g)} = 3^2.

Ket :

r = RED = Merah

g = GREEN = Hijau

b = BLACK = Hitam

b. $\left.\begin{matrix} N(S)=9 \\ m(A)=8 \end{matrix}\right\}$ peristiwa yang mungkin =

$\binom{9}{8} = \frac{9!}{(9-8)8!} = 9$ cara (banyak peristiwa)

c. C_1={(r,r),(r,g),(r,b)} = {(r,r)}∪(r,g) ∪{(r,b)}

C_2={(r,r),(r,g),(r,b),(b,r),}(g,r)} = {(r,r)}∪...∪{(g,r)}

$C_1 \cap C_2 = C_1$={(r,r),(r,g),(r,b)}= {(r,r)}∪{(r,g)} ∪{(r,b)}

C_1^1 = {(g,g),(g,r),(g,b),(b,b),(b,r),(r,b)}

= {(g,g)}∪...∪{(b,g)}

$C_1^1 \cap C_2$ = {(b,r),(g,r)} = {(b,r)∪(g,r)}

3. Ada empat golongan darah = O, A, B, AB secara umum setiap orang dapat menerima darah dari yang lain asalkan segolongan dan seseorang dapat menerima darah dari golongan darah O dan 4 golongan darah tersebut memberikan darah pada AB. Sebuah percobaan dengan pengambilan, penyerah donor dari seseorang donor ke donor berikutnya.
   a. Catat hasil yang mungkin (urutan diperhatikan).
   b. Catat semua peristiwa dengan syarat donor ke-2 dapat menerima darah dari donor ke-1.
   c. Catat hasil dengan syarat setiap honor dapat menerima darah dari yang lain.

   Jawab:

   a. $\left.\begin{matrix} (O,O),(O,A),(O,B),(O,AB) \\ (A,O),(A,A),(A,B),(A,AB) \\ (B,O),(B,A),(B,B),(B,AB) \\ (AB,O),(AB,A),(AB,B),(AB,AB) \end{matrix}\right\}$ adalah hasil yang mungkin 4^2 = 16 outcome

   b. $\left.\begin{matrix} (O,O),(O,A),(O,B),(O,AB) \\ (A,A),(B,B),(AB,AB) \\ (A,AB),(B,AB) \end{matrix}\right\}$ Peristiwa dengan hasil yang mungkin $3^2 = 9$ outcome

c. {(O,O),(A,A),(B,B),(AB,AB)} Hasil yang mungkin yaitu bergolongan darah sama $= 2^2 = 4$ outcome

4. Suatu percobaan hitung pengambilan permen karet sampai diperoleh permen warna merah. Tentukan ruang sampelnya.

   Jawab:

   S = {x|x=r} atau x = $C_1C_2 \ldots C_k$} dengan $C_k = b$ atau g

   S = {(r)br, gr, bbr, ggr,bgr, gbr, …}

5. Sejumlah partikel alpa dipancarkan oleh sampel radioaktif pada waktu interval tertentu.
   a. Berikan ruang sampelnya.
   b. Saat mulai sampai sinar alpa dipancarkan, berikan ruang sampelnya.

   Jawab:
   a. S = {0, 1, 2, …, α_0}
   b. S = {t | $0 \leq t \leq t_0$}

6. Suatu eksperimen yaitu ingin memeriksa berapa bagian kandungan suatu logam itu adalah emas. Buat ruang sampelnya.

   Jawab :

   S = [0,1] = {t | $0 \leq t \leq t_0$}

7. Aki mobil diseleksi dan dites selanjutnya sampai suatu waktu aki tersebut tidak dapat dipakai lagi, tentukan ruang sampelnya.

   Jawab:

   $S = [0,\infty)$ atau $S = \{z \mid z \geq 0\}$

8. Ada 100 bola karet yang terdiri dari 20 merah, 30 hitam dan 50 hijau.

   a. dapatkah dikatakan bahwa model peluang dan bola tersebut adalah P(M) = 0,2 , P(H) = 0,3 , dan P(H_j) = 0,5

   b. jika bola warna y Juga ada di merah. Maka dapatkah dikatakan bahwa model peluangnya adalah P(H) =0,2 , P(B)= 0,3 , P(H_j) = 0,5 dan P(y) =0,1

   Jawab:

   a. Trivial karena P(M) +P(H)+ P(H_j) = 1 dengan P≥0: i = M, H, H_j.

   b. Tidak karena P(M) + P(B) + P(H_j) > 1 yaitu syarat peluang P(S) = 1

9. pada soal nomor 2 terdapat 9 kemungkinan hasil yang berbobot sama tentukanlah

   a. P (keduanya warna merah)

   b. $P(c_1) \sim c_1$ = {(r,r), (r,g), (r,b)}= 3 dengan R.S =9

   c. $P(c_2) \sim c_2$ = {(r,r), (r,g), (r,b), (g,r), (b,r)} = 5

   d. $P(c_1 \cap c_2) \sim c_1 \cap c_2$ = {(g,r),(b,r)}

e. $P\left(c_1^{'} \cap c_2\right) \sim \left(c_1^{'} \cap c_2\right)$ = {(g,r),(b,r)}

f. $P\left(c_1 \cup c_2\right) \sim c_1 \cup c_2 = c_2$ = {(r,r),...,(b,r)}=5

Jawab:

a. P({r,r}) = $\frac{1}{9}$

b. P(C_1) = $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

c. P(C_2) = $\frac{5}{9}$

d. P($C_1 \cap C_2$) = P(C_1) = $\frac{1}{3}$

e. $P(C_1^c \cap C_2$ = $\frac{2}{9}$

f. P($C_1 \cup C_2$) = $\frac{5}{9}$

10. Perhatikan soal nomor 3 dimana banyak golongan darah mempunyai bobot yang sama:

 a. Tulis peluang bahwa donor II dapat menerima darah dari donor I

 b. Tulis peluang bahwa setiap donor dapat menerima darah dari yang lain

 c. Tulis peluang bahwa tidak ada satupun golongan yang dapat menerima darah dari golongan yang lainnya

Jawab:

a. B(II dapat I)= $\frac{9}{16}$

$\Rightarrow$P({O,O), (O,A),(O,B), (O,AB), (A,A), (A,AB), (B,B), (B,AB),(AB,AB)})

b. P(Z = donor menerima yang segolongan) = $\frac{4}{16}$ = $\frac{1}{4}$

c. P(Y=0 atau AB) = P({(AB,AB),(O,O)})

= P(0) + P(AB) = $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$ = $\frac{1}{8}$

11. Buktikan bahwa P(ϕ)=0, dengan h_i = ϕ untuk semua i.

Bukti:

$A_i = \phi$

P $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

P(ϕ) = $\sum_{i=1}^{n} P(\phi)$

Ini akan terjadi jika P(ϕ)=0 (Q.E.D)

12. Buktikan P $(A_1 \cup A_2 \cup ... A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P\, A_k$

Bukti:

Ambil $A_i = \phi$ untuk i = k (diketahui)

Berarti $A_{k+1} = \phi, A_{k+2} = \phi$ dan seterusnya

$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ = $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P\,A_k$

$= P(A_1) \cup P(A_2) \cup \dots P(A_k) \cup P(A_{k+1}) \cup P(A_{k+2}) \cup \dots$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{i=K+1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 0$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_k)$$

$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_k)$

13. Jika suatu eksperimen dilakukan, satu dan hanya satu pasti A_1, A_2, atau A_3 akan terjadi tentukan $P(A_1)$, $P(A_2)$, atau $P(A_3)$ dengan rumus yaitu:

a. $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$

b. $P(A_1) = P(A_2)$ dan $P(A_3) = \frac{1}{2}$

c. $P(A_1) = 2P(A_2) = 3P(A_3)$

Jawab:

a. $S = \{A_1, A_2, A_3\} \rightarrow n(S) = 3$

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$,

Karena $n(A_1) = n(A_2) = n(A_3)$

b. $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1$

$\Leftrightarrow 2\,P(A_2) + \frac{1}{2} = 1$

$\Leftrightarrow P(A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)$

c. $P(A_3) = x \Rightarrow P(A_1) = 3x \Rightarrow P(A_2) = \frac{3}{2}x$,

$x + 3x + \frac{3}{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{11}$

$P(A_3) = \frac{2}{11}$

$P(A_2) = \frac{3}{2}\frac{2}{11} = \frac{3}{11}$

$P(A_1) = 3 \cdot \frac{2}{11} = \frac{6}{11}$

14. Sebuah koin seimbang dari 4x. Tulis yang mungkin dan hitung peluang dari setiap kejadian berikut ini:
    a. tepat 3 muka yang muncul
    b. sekurang-kurangnya 1 muka yang muncul
    c. jumlah muka = jumlah belakang
    d. munculnya angka lebih banyak dari keliling

    Jawab:

    S = {MMMM, MMMB, MMBM, MBMM, MMBB, MBBM, BBMM, BMBM, BBBM, BBMB, BMBB, MBBB, MBMB, BMMB, BBBB}

    a. P(3M) = P{MMMB}, atau {MMBM} atau {MBMM} atau {BMMM}= $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
    b. P(sekurang-kurangnya 1 muka)=P(S)-P({BBBB}) =1 - $\frac{1}{16}$ = $\frac{15}{16}$
    c. P(muka=keliling) = P({MMBM} atau {MBMM} atau {BMMM} atau {MBMB} atau {BMMB}) = $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

d. P(M>B) = P({MMMM} atau {MMMB} atau {MMBM} atau {MBMM} atau {BMMM}) = $\frac{5}{16}$

15. Dua guru honorer ditugasi untuk memberi tugas secara random pada mata pelajaran trigonometri (t), Aljabar (a) dan Kalkulus (c). Tuliskan ruang sampel dan hitunglah peluang bahwa mereka mengajar kursus yang berbeda.

Jawab:

S = $\{(t,t),(a,a),(c,c),(t,a),(t,c),(a,t),(a,c),(c,t),(c,a)\}$

P(guru mengajar kursus yang berbeda) = $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

16. Buktikan bahwa P(A∪B∪C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A∩B) -P(A∩C)-P(B∩C)+P(A∩B∩C)

Dengan $(A \cup B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ dan gunakan

P $(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bukti:

P $(A \cup B \cup C) = P(\{(A \cup B) \cup C\})$

= P $(A \cup B) + P(C) - P(A \cup B) \cup C)$

= P(A)+P(B)- P(A∩B)+P(C)-P((A∩C)∪(B∩C))

= P(A)+P(B)+P(C)-P(A∩B)-[P(A∩C)+P(B∩C)-

+P(A∩C∩B∩C)]

= P(A)+P(B)+P(C)-P(A∩B)-P(A∩C)-P(B∩C)

+P(A∩B∩C)

17. Buktikan bahwa

Jika $A \subset B$ maka $P(A) \leq P(B)$ dengan B = $A \cup (B \cap A^c)$ disjoint union

Sehingga P(B) = P($\{A \cup (B \cap A^c)\}$)

Bukti

$P(B) = P(A) + B(B \cap A^c) - P(A \cap B \cap A^c)$

$= P(A) + B(B \cap A^c) - 0$

$= P(A) + B(B \cap A^c)$

Menurut sifat himpunan karena A dan $B \cap A^c$ adalah himpunan (atau dua peristiwa yang saling lepas maka $P(A) + B(B \cap A^c) \geq P(A)$

Jadi $P(B) = P(A) + B(B \cap A^c) \geq P(A)$ atau $P(A) \leq P(B)$

18. Jika A dan B adalah suatu peristiwa tunjukkan bahwa

a. $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

b. $P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c)$

Bukti

a. Ambil $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ maka

$P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap B^c))$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) - P(A \cap B \cap A \cap B^c)$

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) - P(\phi) = 0$

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

b. Ambil $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$P(A \cup B)^c = P(A^c \cap B^c)$

$1 - P(A \cup B) = P(A^c \cap B^c)$

$P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c)(Q \in D)$

19. Jika $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$ dan $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

a. $P(B^c)$

b. $P(A \cup B^c)$

c. $P(B \cap A^c)$

d. $P(A^c \cup B^c)$

Jawab:

a. $P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$

b. $P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c)$

$= P(A) + P(B^c) - \{P(A) - P(A \cap B)\}$

$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - (\frac{1}{3} - \frac{1}{10}) = \frac{23}{30}$

c. $P(B \cap A^c) = P(B) - P(B \cap A) = P(A \cap B)$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{7}{30}$

d. $P(A^c \cup B^c) = P(A \cap B)^c = 1 - P(A \cap B)$

$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

20. Bila $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{8}, P(C)=\frac{1}{4}$ dengan A,B dan C saling lepas Hitung:

a. $P(A\cup B\cup C)$

b. $P(A^c \cap B^c \cap C^c)$

Jawab:

a. $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C) = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$

b. $P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P((A\cup B\cup C)^c)$

$= 1-P(A\cup B\cup C) = 1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$

21. Tunjukkan bahwa

$P[(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)] = P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$

Bukti: ambil $A=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$

$B=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)$

$\Leftrightarrow P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)-P(A\cap B\cap A\cap B^c)$

$\Leftrightarrow P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)$........ 1

$\Leftrightarrow P(B)=P[(A\cap B)\cup(A^c\cap B)]$

$\Leftrightarrow P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)-P(A\cap B\cap A^c\cap B)$

$\Leftrightarrow P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$....... 2

Cara II:

Ambil $P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)$

$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

$P[(A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) - P(A \cap A^c \cap B)$

$P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)] = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

(1) dan (2) dijumlahkan diperoleh

$P(A) + P(B) = 2P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$

$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)]$

atau

$P[(A \cap B^c) \cup P(A^c \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

22. Peluang A menang pada perlombaan I = 0,7 , peluang menang pada perlombaan II = 0,6 dan peluang menang kedua-duanya = 0,5 tentukan peluang dari

a. A menang pada satu perlombaan (sekurang-kurang-nya satu perlombaan)

Jawab:

$P(I_m \cup II_m) = P(I_m) + P(II_m) - P(I_m \cap II_m)$

$= 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}5 = 0{,}8$

b. A menang tepat pada satu perlombaan P(menang tepat 1 perlombaan)

$= P[(I \cap II^c) \cup (I^c \cap II)]$

$= P(I_m) + P(II_m) - 2P(I_m \cap II_m)$

$= 0{,}7 + 0{,}6 - 2 \cdot 0{,}5$

$= 0{,}3$

c. Peluang tidak menang pada kedua perlombaan

$P(I_m \cup II_m)^c = 1 - P(I_m \cup II_m)$

$= 1 – 0,8$

$= 0,2$

23. Sebuah keluarga mempunyai 2 TV, satu berwarna dan yang lain hitam putih. Jika A adalah peristiwa TV warna hidup, dan B adalah peristiwa TV hitam putih hidup.

$P(A) = 0,4$

$P(B) = 0,3$

Dan $P(A \cup B) = 0,5$. Tentukanlah

a. P(keduanya hidup) =

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 0,5 = 0,4 + 0,3 – P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0,2$

b. P(TV warna hidup yang lain mati) = $P(A \cap B^c)$

$P(A \cap B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cup B^c)$

$= 0,4 + 0,7 - (1 - P(A^c \cap B))$

$= 0,4 + 0,7 - 1 + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0,1 + 0,3 - 0,2$

$= 0,2$

c. P (tepat A hidup) = $P[(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)]$

$= P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) - P(A^c \cap B \cap A \cap B^c)$

P (tepat A hidup) $= 0,2 + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0,2 + 0,3 - 0,2$

$= 0,3$

d. P (kedua-duanya mati)

$P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - 0,5$

$= 0,5$

24. Misalkan $P(A_i) = \dfrac{1}{3+i}$; $i = 1,2,3,4$. Hitung batas atas untuk $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$

Jawab: $P(\bigcup_{i=1}^{A} A_i) = \sum_{i=1}^{A} P(A_i)$

$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{319}{420}$

25. Sebuah kotak berisi 3 kartu jelek dan 2 kartu jelek peserta A mengambil sebuah kartu kemudian B sebuah kartu. Tentukan

a. P(A baik)

b. P(B baik | A baik)

c. P(B baik | A jelek)

d. P(B baik $\cap$ A jelek)

e. Tulis outcome ruang sampelnya dan pasangkan dari urutan dan hitung $P(B_{baik} \cap A_{baik})$ dan $P(B_{baik}|A_{baik})$

dengan menggunakan defenisi dan asumsikan kartu peserta dalam keadaan baik (jelas)

f. $P(B_{baik})$

g. $P(A_{baik} \mid B_{baik})$.

Jawab

a. $P(A_{baik}) = P(B_{jelek})P(A_{baik}|B_{jelek}) + P(B_{baik})P(A_{baik}|B_{baik})$

$$= \frac{2}{5}.\frac{3}{4} + \frac{3}{5}.\frac{2}{4} = \frac{6+6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

b. $P(B \text{ baik} \mid A \text{ baik}) = \dfrac{P(B_{baik} \cap A_{baik})}{P(A_{baik})}$

$$= \frac{P(B_{baik}) \cdot (A_{baik} \mid B_{baik})}{P(A_{baik})}$$

$$= \frac{3/5 \cdot 2/4}{3/5} = \frac{1}{2}$$

c. $P(B_{baik} \mid A_{jelek}) = \dfrac{P(B_{baik} \cap A_{jelek})}{P(A_{jelek})}$

$$= \frac{P(B_{baik}).P(A_{jelek} \mid B_{baik})}{P(A_{jelek})}$$

$$= \frac{3/5.2/4}{2/5} = \frac{3}{4}$$

d. $P(B_{baik} \cap A_{baik}) = P(B_{baik}) \cdot P(A_{baik})$

$$= P(A_{baik}) \cdot P(B_{baik}|A_{baik})$$

$$= \frac{3}{5}.\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

e. A baik dan B baik $\Rightarrow 3.2 = 6$

A jelek dan B jelek $\Rightarrow 2.1 = 2$

A baik dan B jelek $\Rightarrow 3.2 = 6$

A jelek dan B baik $\Rightarrow$ 2.3 = 6

Sehingga defenisi ada 20,

P(B$_{baik}$$\cap$A$_{baik}$) = $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

P(Bbaik|Abaik) $= \frac{P(B_{baik} \cap A^{baik})}{P(A_{baik})}$

$$= \frac{3/10}{3/5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

f. P(B$_{baik}$) = P(A$_{jelek}$)P(B$_{baik}$|A$_{jlk}$)+P(B$_{baik}$)P(B$_{baik}$|A$_{baik}$)

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6+6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

g. P(A$_{baik}$|B$_{baik}$) $= \frac{P(A_{baik} \cap B_{baik})}{P(B_{baik})}$

$$= \frac{P(A_{baik}) \cdot P(B_{baik} | A_{baik})}{P(B_{baik})}$$

$$= \frac{3/10}{3/5} = \frac{1}{2}$$

26. Ulangi soal nomor 25 tetapi dengan asumsi bahwa A mengembil dengan pengembalian sebelum B mengambil

Jawab

a. P(A$_{baik}$) = $\frac{3}{5}$

b. P(B$_{baik}$|A$_{baik}$) = $\frac{3/5.3/5}{3/5} = \frac{3}{5}$

c. $P(B_{baik}|A_{jelek}) = \dfrac{P(B_{baik} \cap A_{jelek})}{P(A_{jelek})} = \dfrac{3/5.2/5}{2/5} = \dfrac{3}{5}$

d. $P(B_{baik} \cap A_{baik}) = P(A_{baik}).P(B_{baik}|A_{baik}) = \dfrac{3}{5}.\dfrac{3}{5} = \dfrac{9}{25}$

e. $P(B_{baik} \cap A_{\ baik}) = \dfrac{9}{25}$ dan $p(B_{baik}|A_{baik}) = \dfrac{3}{5}$

f. $P(B_{baik}) = \dfrac{3}{5}$

g. $P(A_{baik}|B_{baik}) = \dfrac{P(A_{baik} \cap B_{baik})}{P(B_{baik})} = \dfrac{3/5.3/5}{3/5} = \dfrac{3}{5}$

27. Sebuah tas berisi 5 bola biru dan 3 merah, seorang anak mengambil sebuah bola selanjutnya mengabil bola yang lain tanpa mengambalikan. Tentukan

a. P(2 bola biru) = $P(I_b \cap II_b) = P(I_b).P(II_b|I_b)$

$$= \frac{5}{8}.\frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

b. P(1 biru dan 1 merah) = $P(I_b).P(I_m)$ atau

$P(II_b).P(II_m) = P(Ib).P(IIm|Ib) + P(IIm).P(IIb|Im)$

$$= \frac{5}{8}.\frac{3}{7} + \frac{3}{8}\frac{5}{7} = \frac{15+15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$

c. P(sekurang kurangnya 1 biru)

$= P(I_b \cap II_b) + P(I_m \cap II_b) + P(I_b \cap II_m)$

$= P(Ib).P(IIb|Ib) + P(Im).P(IIb|Im) + P(Ib).P(IIm|Ib)$

$= \dfrac{5}{8}.\dfrac{4}{7} + \dfrac{3}{8}.\dfrac{5}{7} + \dfrac{5}{8}.\dfrac{3}{7} = \dfrac{50}{56} = \dfrac{25}{28}$

d. $P(2 \text{ bola merah}) = P(I_m \cap II_m) = P(I_m).p(II_m|I_m)$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

28. Pada soal nomor 27 diambil 3 sekaligus tanpa pengembalian. Tentukan:

P(tak ada bola netral yang tertinggal sesudah pengambilan ketiga)

a. $P(\text{terambil 3 bola merah}) = P(I_m \cap II_m \cap III_m)$

$P(MMM) = P(I_m \cap II_m)\ P(IIIm \mid I_m \cap II_m)$

$= P(I_m)\ P(II_m \mid I_m)\ P(II_m \mid I_m \cap II_m)$

$= \frac{1}{56}$

b. $P(\text{1 bola merah}) = P(MMB) + P(MBB)$

$$= \frac{3}{8}\frac{2}{7}\frac{5}{6} + \frac{3}{8}\frac{5}{7}\frac{4}{6}$$

$$= \frac{5}{56} + \frac{10}{56} = \frac{15}{56}$$

c. P(bola merah 5 pada pengambilan terakhir)

$= P(MBB) = \frac{3}{8}\frac{5}{7}\frac{4}{6} = \frac{5}{28}$

d. P(sebuah bola merah terambil pada pengambilan terakhir)= $P(\bullet\bullet M) = P(M) = \frac{3}{8}$

29. Sebuah keluarga mepunyai 2 anak diketahui bahwa sekurang-kurangnyam 1 laki-laki. Berapa peluang keluarga tersebut 2 laki-laki. Asumsi P(laki-laki) = $\frac{1}{2}$

Jawab

S= $\{LL, LP, PL, PP\}$

Cara I

P(LL) = P(LP) = P(PL) = P(PP)

$= \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

A = suatu keluarga paling sedikit 1 laki-laki

A = $\{LL, LP, PL\}$

B = sekurang-kurangnya menpunyai 2 laki-laki

B = $\{LL\}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} = \frac{1/2.1/2}{3/4}$$

$$= \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Cara II

$$P(L1 \cap L2|L1 \cap L2) = \frac{P(L1 \cap L2)}{P(L1 \cup L2)}$$

$$= \frac{P(L1 \cap L2)}{P(L1) + P(L2) - P(L1 \cap L2)}$$

$$P(L1 \cap L2 | L1 \cap L2) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

30. Dua kartu diambil dari kotak tanpa pengambilan

a. Berapa peluang kartu kedua adalah hati. Jika diberikan bahwa kartu pertama adalah hati.

Jawab*:*

$$P(II_{hati}/I_{hati}) = \frac{p(II_{hati} \cap I_{hati})}{p(I_{hati})} = \frac{\frac{13}{52}.\frac{12}{51}}{\frac{13}{52}} = \frac{12}{51}$$

b. Berapa peluang bahwa keduanya adalah hati jika diberikan bahwa sekurang-kurangnya satu hati.

Jawab :

$$P(I_{hati} \cap II_{hati} \mid I_{hati} \cup II_{hati}) = \frac{p(I_{hati} \cap II_{hati})}{p(I_{hati} \cup II_{hati})}$$

$$= \frac{\frac{13}{52}.\frac{12}{51}}{p(I_{hati}) + p(I_{hati}) - p(I_{hati} \cap II_{hati})} = \frac{\frac{13}{52}.\frac{12}{51}}{\frac{13}{52}+\frac{13}{52}-\frac{13}{52}.\frac{12}{51}}$$

$$= \frac{\frac{12}{51}}{1+1-\frac{12}{51}} = \frac{\frac{12}{51}}{2-\frac{12}{51}} = \frac{12}{102-12} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

31. Sebuah kotak berisi 5 bola warna hijau, 3 hitam & 7 merah. Dua bola diambil secara random tanpa pengambilan. Berapa peluang

    a. Peluang kedua-duanya merah

    b. Peluang kedua warna sama

    Jawab:

    a. P(kedua-duanya merah) $= P(MM) = P(I_M \cap I_M)$

    $= P(I_M).p(II_M|I_M)$

    $= \frac{7}{15}.\frac{6}{14} = \frac{1}{5}$

    b. P(kedua warna sama)

    $= P(MM) + P(HH) + P(H_JH_J)$

    $= P(I_M \cap II_M) + P(I_H \cap I_H) + P(I_M).p(II_M|I_M)$

    $+ P(I_H)\ P(II_H|I_H) + p(I_{HJ})\ .\ p(II_{HJ}|I_{HJ})$

    $= \frac{7}{15}.\frac{6}{14} + \frac{3}{15}.\frac{2}{14} + \frac{5}{15}.\frac{4}{14}$

    $= \frac{1}{5} + \frac{3}{105} + \frac{10}{105} = \frac{21+3+10}{105} = \frac{34}{105}$

32. Sebuah team mempunyai 3 pemain yaitu A,B & C dengan presentase menang 0,4, 0,6, 0,8. Dimana frekuensi bermain dalam 10 perlombaan adalah 2,3 & 5 dengan perkataan lain bahwa p(A)=0,2 , p(B)=0,3 dan p(C)=0,5

Hitung

a. Peluang menang dalam permainan

b. Peluang A melempar dalam permainan/tim menang

Jawab

a. P(menang dalam permainan) = P(Winners)

$P(W) = P(I_A \cap II_B) + P(I_B \cap II_C) + P(I_C \cap II_A)$

$= P(I_A).p(I_B|I_A) + P(I_B).p(II_C|I_B) + P(I_C).p(II_A|I_C)$

$= 0{,}2 \,.\, 0{,}4 + 0{,}3 \,.\, 0{,}6 + 0{,}5 \,.\, 0{,}8$

$P(W) = 0{,}08 + 0{,}18 + 0{,}40$

$= 0{,}66$

b. P(A melempar dalam permainan / tim menang)

$$P(A|W) = \frac{P(A)P(W|A)}{P(W)}$$

$$= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{0{,}66}$$

$$= 0{,}1212$$

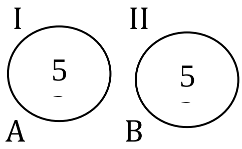
33. Sebuah kartu diseleksi dari 52 kartu dan ditaruh pada kotak kedua, kartu selanjutnya diambil dari kotak kedua

a. Berapa peluang kartu kedua adalah Ace

b. Jika kartu I dimasukkan kedalam kotak yang berisikan 54 kartu dengan 2 Joker. berapa peluang kartu yang diambil dari kotak kedua adalah Ace

c. Jika Ace diambil dari kotak pada soal b apakah (berapa peluang Ace itu diambil)

Jawab :



Misal:

A : Kartu Ace dari I

A^C : kartu bukan Ace dan I

B : Kartu Ace dari II

B^C: Kartu bukan Ace dari II

a) P(B) = P(A).P(B|A) + P(A^C).p(B|A^C)

$$= \frac{4}{52}.\frac{5}{53}+\frac{48}{52}.\frac{4}{53}=\frac{11}{13}$$

b) $P(B) = \frac{4}{52}.\frac{5}{15}+\frac{48}{52}.\frac{4}{55}=\frac{53}{715}$

c) $P(A|B) = \frac{P(A).P(B\,|\,A)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{52}.\frac{5}{53}}{\frac{4}{52}}=\frac{5}{53}$

34. Sebuah kantong berisi 3 coin, 2 normal dan satu tidak (dengan 2 Muka). Sebuah koin diambil secara random dan dilempar 3x

a. Tentukan peluang muncul 3 Muka

b. Jika muncul Muka diambil dari 3 kali pelemparan, berapa peluang bahwa coin yang tidak normal terambil

Jawab

a. P(3M) = $\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.1.1.1$

$$=\frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{3}=\frac{1+!+8}{24}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$$

b. P(pelemparan|3M) = $\frac{P(III).P(3M\mid III)}{P(3M)}=\frac{1.\frac{4}{12}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{5}$

35. Sebuah pabrik mempunyai 3 mesin yaitu 1,2 & 3 dengan produksi masing-masing 20%, 30%, dan 50%. Dari produksi itu terdapat 5%, 3% dan 2% yang rusak. Sebuah pabrik dipilih secara random

a. Berapa peluang produk pabrik itu rusak
b. Jika pabrik itu rusak, berapa peluang bahwa pabrik itu dibuat oleh mesin 1

Jawab

Pabrik

MESIN I	MESIN II	MESIN III
0,05 Rusak 0,15 Baik	0,03 Rusak 0,27 Baik	0,02 Rusak 0,48 Baik

P(M1) $\Rightarrow$P(MII) $\Rightarrow$ P(MIII)

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

0,20 0,30 0,50

A^*= Produksi pabrik rusak

a). $P(A^*) = 0{,}20 \cdot 0{,}05 + 0{,}30 \cdot 0{,}003 + 0{,}01 \cdot 0{,}50$

$$= 0{,}01 + 0{,}0009 + 0{,}01 = 0{,}029 = \frac{29}{1000}$$

b). $$P(M_I|A^*) = \frac{P(M_1).P(A^*|M_1)}{P(M_1).P(A^*|M_1)+P(M_2).P(A^*|M_2)+P(M_3).P(A^*|M_3)}$$

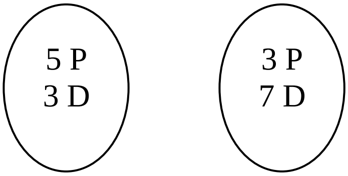
$$= \frac{(0{,}20).(0{,}05)}{0{,}20x0{,}05+0{,}30x0{,}03+0{,}01+0{,}50}$$

$$= \frac{0{,}01}{0{,}029} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{29}{1000}} = \frac{10}{29}$$

36. Kotak A berisi 5 pen dan 3 dime sedang kotak B berisi 3 pen dan 7 dime sebuah kotak dipilih secara random kemudian coin juga diambil secara random.

a. Tentukan peluang terambil dime

Jawab:



IA II B

(1 coin (1 coin secara random

Secara random)

Berarti karena titik sampel hanya 2 maka masing-masing kotak hanya mempunyai peluang ½ atau $P(I_A)$= ½ $P(I_B)$ = ½

$P(D) = P(I_A).P(II_B|I_A)+P(I_B).P(II_D|I_B)$

$$= \frac{1}{2}.\frac{3}{8}+\frac{1}{2}.\frac{7}{10}=\frac{3}{16}+\frac{7}{20}=\frac{15}{80}+\frac{28}{80}=\frac{43}{80}$$

b. Andaikan dime terambil, berapa peluang dime itu diambil dari B

$$P(I_B|I_D) = \frac{P(I_B \cap I_D)}{P(I_D) \Rightarrow P(0)} = \frac{P(II_B).P(I_D \mid I_B)}{P(_D)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}.\frac{7}{10}}{\frac{43}{80}} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{43}{80}} = \frac{7}{20}.\frac{80}{43} = \frac{28}{43}$$

37. Jika $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cup B) = 0{,}6$

a. Berapa $p(B)$ agar A, B saling asing~lepas

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow 0{,}6 = 0{,}4 + P(B) \Rightarrow P(B) = 0{,}2$$

b. Berapa $P(B)$ agar A, B selang bebas

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$P(A \cap B) = x \Rightarrow 0{,}6 = 0{,}4 + \frac{x}{0{,}4} - x.$$

$$x = 0{,}4 \cdot P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{x}{0{,}4} \,....... (1)$$

$$0{,}2 = \frac{0{,}6x}{0{,}4} \Rightarrow x = \frac{0{,}08}{0{,}6} = \frac{2}{15}$$

$$P(B) = \frac{2}{15} \cdot \frac{10}{4} = \frac{1}{3}$$

38. A dan $B^c \Rightarrow$ selang bebas

Buktikan $P\left(A\cup B^{c}\right)=P(A)\cdot P\left(B^{c}\right)$

Bukti :

Dengan mengambil $A\cup B=\left(A\cap B^{C}\right)\cup B$ maka

$P(A\cup B)=P\left[\left(A\cap B^{c}\right)\cup B\right]$

$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P\left(A\cap B^{c}\right)+P(B)-P\left(A\cap B^{c}\cap B\right)$

$P(A)-P(A\cap B)=P\left(A\cap B^{c}\right)-P(\phi)=0$

$P\left(A\cap B^{c}\right)=P(A)-P(A\cap B)$

$P\left(A\cap B^{c}\right)=P(A)-P(A)\cdot P(B)$ sesuai def peluang bebas

$=P(A)(1-P(B))$ sesuai teorema

$\therefore P\left(A\cap B^{c}\right)=P(A)\cdot P\left(B^{c}\right)(Q.E.D)$

b. A^{c} dan $B\Rightarrow$ selang bebas

Buktikan $P\left(A^{c}\cap B\right)=P\left(A^{c}\right)\cdot P(B)$

Bukti : Ambil $A\cup B=A\cup\left(A^{c}\cap B\right)$

$P(A\cup B)=P\left[A\cup\left(A^{c}\cap B\right)\right]$

$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(A^{c}\cap B)-P(A\cap A^{c}\cap B)$

$P(A^{c}\cap B)=P(B)-P(A)\cdot P(B)$ definisi

$P(A^{c}\cap B) = P(B)\cdot P(A^{c})$ atau

$P(A^{c}\cap B) = P(A^{c})\cdot P(B)$ (QED)

c. A^{c} dan $B^{c}\Rightarrow$ saling bebas

Buktikan $P\left(A^{c}\cap B^{c}\right)=P\left(A^{c}\right)\cdot P\left(B^{c}\right)$

Bukti : gunakan $P(A \cup B) = 1 - P(A^c \cap B^c)$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(A^c \cap B^c)$

$[-1 + P(A)] + P(B) - P(A) \cdot P(B) = -P(A^c \cap B^c)$

$[1 - P(A)] - P(B)[1 - P(A)] = P(A^c \cap B^c)$

$P(A^c) - P(B) \cdot P(A^c) = P(A^c \cap B^c)$

$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)[1-P(B)]$

$P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$

39. Tiga komponen yang saling bebas di pasang seri, di mana setiap komponen gagal dengan kemungkinan P. Berapa peluang bahwa pada system pemasangan komponen secara seri tersebut tidak gagal?

Jawab:

Cara I

Karena pemasangan seri maka peluang tidak gagal adalah

$P\left[(A \cup x_2 \cup x_3)^c\right]$

Mis : peluang gagal maka peluang tidak gagal adalah

$$P\left[x_1^c \cap x_2^c \cap x_3^c\right] = P(x_1^c) \cdot P(x_2^c) \cdot P(x_3^c)$$

$$= [1 - P(x_1)].[1 - P(x_2)].[1 - P(x_3)]$$

$$= [1 - p].[1 - p].[1 - p] = (1 - p)^3$$

Cara II

Dengan Binomial $= \binom{3}{3}(1 - p)^3 . p^0 = 1.(1 - p)^3 . 1 = (1 - p)^3$

40. Tiga komponen yang saling bebas dipasang parallel. Di mana setiap komponen gagal dengan peluang p. Berapa peluang bahwa sistem itu tidak gagal?

Jawab:

Mis : peluang gagal = p

Peluang tidak gagal untuk paralel adalah

$P\left[(x_1 \cap x_2 \cap x_3)^c\right]$

Karena $P(x_1 \cap x_2 \cap x_3) = P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot P(x_3) = p^3$ maka

$P\left[(x_1 \cap x_2 \cap x_3)^c\right] = 1 - P(x_1 \cap x_2 \cap x_3) = 1 - p^3$

41. Perhatikan system di bawah ini dengan peluang yang sudah ditentukan dari system yang tidak berfungsi pada 5 komponen. Asumsikan tidak berfungsi adalah kejadian yang saling bebas. Tentukan peluang pada system yang berfungsi?

Karena $P(x_1 \cap x_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$ maka peluang berfungsi secara paralel

$P\left[(x_1 \cap x_2)^c\right] = 1 - P(x_1 \cap x_2) = 0{,}98$

Karena $P(x_1 \cap x_2 \cap x_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006$ maka peluang berfungsi paralel

$P\left[(x_1 \cap x_2 \cap x_3)^c\right] = 1 - P(x_1 \cap x_2 \cap x_3) = 0{,}994$

Jadi peluang kelima system berfungsi adalah

$P[(x_1 \cap x_2)^c] \cdot P[(x_1 \cap x_2 \cap x_3)^c] = 0{,}98 \cdot 0{,}994 = 0{,}97412$

42. Peluang penembak dalam menembak $0{,}9$ tembakan dapat diulang-ulang secara bebas. Penembak mempunyai 2 pistol: yaitu pistol I berisi 2 peluru dan pistol yang lainnya hanya berisi satu peluru. Pistol diambil secara random dan tembakan berhenti setelah pistol kosong. Berapa peluang bahwa tembakannya tepat kena satu kali.

Jawab :

Misal pistol: A dan B berarti $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$

Jika A dipilih I terdapat dua kemungkinan kena dan tidak kena atau tidak kena dan kena dengan asumsi $KT \cup TK$ atau $(K \cap T) \cup (T \cap K)$

Jika B dipilih II hanya terdapat satu kemungkinan yaitu kena dengan asumsi k

Jadi P(tepat kena sasaran satu kali tembakan)

$= P(A)\{P(k \cap T) \cup P(T \cap k)\} + P(B).P(k)$: $P(k)=0{,}9$

$P(T)=0{,}1$

$$= \frac{1}{2}\{P(k)\cdot P(T) + P(T)\cdot P(k)\} + P(B)\cdot P(k)$$

$$= \frac{1}{2}\{0{,}9\cdot 0{,}1 + 0{,}1\cdot 0{,}9\} + \frac{1}{2}\cdot 0{,}9$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}18) + 0{,}45 = \frac{27}{50}$$

43. Kerjakan kembali latihan nomor 27, dengan asumsi bola dipilih dengan pengembalian

a. $P(2B) = P(B).P(B) = \frac{5}{8}.\frac{5}{8} = \frac{25}{64}$

b. *P(IB* dan *IM)* $= P(B \cap M) + P(M \cap B)$

$$= P(B) \cdot P\left(\frac{M}{B}\right) + P(M) \cdot P\left(\frac{B}{M}\right)$$

$$= \frac{3}{8}.\frac{5}{8} + \frac{5}{8}.\frac{3}{8} = 2\left(\frac{15}{64}\right) = \frac{15}{32}$$

c. P(Sekurang-kurangnya IB)

= P(B∩B) + P(B∩M) + P(M∩B)

= P(B)·P(B|B)+P(B)·P(M|B)+P(M)·P(B|M)

$= \frac{5}{8}.\frac{5}{8} + \frac{3}{8}.\frac{5}{8} + \frac{5}{8}.\frac{3}{8}$

$= \frac{25}{64} + \frac{30}{64} = \frac{55}{64}$

d. P(2M) = P(M)·P(M) = $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$

44. Dalam permainan marble: penembak A = tidak kena 1 marble dan B = kena 1 marble dan bermain lagi serta C = kena dan tidak main lagi. Jika B diulang dan dicatat lagi tentukan.

a. Jika *P(A) =* p_1 , *P(B) =* p_2 dan *P(C) =* p_3. Berapa peluang tepat kena 3 marble dalam
satu permainan.

b. Berapa peluang tepat kena (terambil) x marble dalam satu permainan.

c. Tunjukkan bahwa peluang kena 1 marble lebih besar dari peluang awal marble.

Jawab:

a. $P(3\ marble)\ =\ P\left(B\cap B\cap B\middle|A\right)+P\left(B\cap B\middle|C\right)$

$$=\ P\left(B\cap B\cap B\right)\cdot P\left({}^{A}\middle|B\cap B\cap B\right)+P\left(B\cap B\right)\cdot P\left({}^{C}\middle|B\cap B\right)$$

$$=\ P\left(B\right)\cdot P\left(B\right)\cdot P\left(B\right)\cdot P\left({}^{A}\middle|B\cap B\cap B\right)+P\left(B\cap B\right)\cdot P\left({}^{C}\middle|B\cap B\right)$$

$$=\ p_2^3\cdot p_1+p_2^2\cdot p_3=p_2^2\left[p_1\cdot p_2+p_3\right]$$

b. x = 0, 1, 2, 3, . . . (banyaknya sasaran yang kena)

$x = 0\rightarrow A\rightarrow P\left(A\right)=p_1$

$x = 1\rightarrow BA\cup C\rightarrow p_2p_1+p_3$

$x = 2\rightarrow BBA\cup BC\rightarrow p_2^2p_1+p_2p_3$

$x = 3\rightarrow BBBA\cup BBC\rightarrow p_2^3p_1+p_2^2p_3$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

dst

$$P(x) =\ p_1\left(\underbrace{1+p_2+p_2^2+\ldots}_{\text{deret ukur}}\right)+p_3\left(1+p_2+p_2^2+\ldots\right)$$

dengan rasio p_2

$$P(x) =\ p_1\left(1/1-p_2\right)+p_3\left(1/1-p_2\right)=\left(p_2+p_3\right)\left(\frac{1}{1-p_2}\right)$$

dimana: $p_1 + p_2 + p_3 = 1 \Rightarrow p_2 + p_3 = 1 - p_2$

$$P(x) = \frac{1 - p_2}{1 - p_2} = 1$$

c). *P(1) > P(0)* jika $p_1 < \dfrac{1 - p_2}{2 - p_2}$

P(1) = P(x=1)= $p_2 p_1 + p_3$

P(0) = P(x=0)= p_1

$$p_2.p_1 + p_3 > p_1 \Rightarrow p_2.p_1 + (1 - p_2 - p_1) > p_1 \Leftrightarrow p_2.p_1 + (1 - p_2) > 2p_1$$

$$\Leftrightarrow 2p_1 < p_2.p_1 + (1 - p_2)$$

$$\Leftrightarrow 2p_1 - p_2.p_1 + 1 - p_2$$

45. Di dalam permainan marble pada soal 44, anggap bahwa peluang tergantung dalam bilangan dari marble yang tertinggal dalam ring N dan misalkan $P(A) = \dfrac{1}{n+1}$.

$$P(B) = \frac{0.2\,N}{N+1} \quad P(C) = \frac{0.8\,N}{N+1}$$

Tentukan asumsi-asumsi pada soal no.44

Jawab:

a. *P(3 marble)* $= P(B) \cdot P(B) \cdot P(B) \cdot P\left(A \middle| B \cap B \cap B\right) + P(B \cap B) \cdot P\left(C \middle| B \cap B\right)$

$$= \left(\frac{0,2\,N}{N+1}\right)^3 . \frac{1}{N+1} + \left[\frac{0,2\,N}{N+1}\right]^2 . \frac{0,8\,N}{N+1}$$

$$= \left(\frac{0,2\,N}{N+1}\right)^2 \left[\left[\frac{0,2\,N}{(N+1)^2}\right] + \frac{0,8\,N}{N+1}\right]$$

b. x = 0, 1, 2, 3, . . . (banyaknya sasaran yang kena)

$$x = 0 \rightarrow A \rightarrow P(A) = \frac{1}{N+1}$$

$$x = 1 \rightarrow BA \cup C \rightarrow \frac{0.2\,N}{N+1} . \frac{1}{N+1} + \frac{0.8\,N}{N+1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

dst

$$P(x) = \frac{1}{N+1}\left[1 + \frac{0{,}2\,N}{N+1} + \left(\frac{0{,}2\,N}{N+1}\right)^2 + \ldots\right] + \frac{0{,}8\,N}{N+1}\left[1 + \frac{0{,}2\,N}{N+1} + \left(\frac{0{,}2\,N}{N+1}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$\mathrm{P(X)} = \frac{1}{N+1}\left[\frac{1}{1 - \frac{0{,}2\,N}{N+1}}\right] + \frac{0{,}8\,N}{N+1}\left[\frac{1}{1 - \frac{0{,}2\,N}{N+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{N+1}\left[\frac{N+1}{N+1-0{,}2\,N}\right] + \frac{0{,}8\,N}{N+1}\left[\frac{N+1}{N+1-0{,}2\,N}\right]$$

$$= \frac{1}{0{,}8\,N+1} + \frac{0{,}8\,N}{0{,}8\,N+1} = \frac{0{,}8\,N+1}{0{,}8\,N+1} = 1$$

$$\therefore P(X) = 1$$

c. $P(1) > P(0)$. Jika $\dfrac{1}{N+1} < \dfrac{1 - \frac{0{,}2\,N}{N+1}}{2 - \frac{0{,}2\,N}{N+1}}$

$$P(1) = P(x=1) = \frac{0{,}2\,N}{N+1} \cdot \frac{1}{N+1} + \frac{0{,}8\,N}{N+1}$$

$$P(0) = P(x=0)$$

$$= \frac{1}{N+1} \quad \frac{0{,}2N}{N+1} . \frac{1}{N+1} + \frac{0{,}8N}{N+1} > \frac{1}{N+1} \Leftrightarrow \frac{0{,}2N}{(N+1)^2} + \left(1 - \frac{1}{N+1} - \frac{0{,}2N}{N+1}\right) > \frac{1}{N+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0{,}2\,N}{(N+1)^2} + \left(1 - \frac{0{,}2\,N}{N+1}\right) > \frac{2}{N+1} \Leftrightarrow \frac{2}{N+1} < \frac{0{,}2\,N}{(N+1)^2} + \left(1 - \frac{0{,}2\,N}{N+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{N+1} - \frac{0{,}2\,N}{N+1}.\frac{1}{N+1} < 1 - \frac{0{,}2\,N}{N+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N+1}\left(2 - \frac{0{,}2\,N}{N+1}\right) < 1 - \frac{0{,}2\,N}{N+1} \Leftrightarrow \frac{1}{N+1} < \frac{1 - \frac{0{,}2\,N}{N+1}}{2 - \frac{0{,}2\,N}{N+1}}$$

46. A, B, C merupakan suatu peristiwa sedemikian sehingga $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{4}, P(C) = \frac{1}{5}$. Tentukan nilai $P(A \cup B \cup C)$ dengan asumsi:

    a. A,B,C peristiwa–peristiwa yang saling lepas

    b. A,B,C peristiwa–peristiwa yang saling bebas

    Jawab:

    a. $P(A \cup B \cup C)$ = $P(A) + P(B) + P(C)$

    $$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20+15+12}{60} = \frac{47}{60}$$

    c. A,B,C peristiwa–peristiwa yang saling lepas

    P(A∪B∪C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(C)

    -P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)

    $$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3}.\frac{1}{4} - \frac{1}{4}.\frac{1}{5} + \frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

47. Sebuah kotak berisi 4 tiket dengan no. : 111, 221, 212, 122 sebuah tiket diambil secara random dan A_i adalah peristiwa–peristiwa dengan 2 berada pada tempat ke i

dengan i = 1, 2, 3. Tentukan apakah A_1 , A_2 , dan A_3 peristiwa−peristiwa yang saling bebas ?

Jawab :

$$S = \{111, 221, 212, 112\}$$

$$A_1 = \{221, 212\} \to P(A_1) = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \{221, 122\} \to P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \{212, 122\} \to P(A_3) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(B_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1).P(A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2).P(A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) = \frac{1}{8}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \triangleq \emptyset \quad \Rightarrow P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) = P(\emptyset) = 0$$

Karena $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1).P(A_2).P(A_3) \Leftrightarrow 0 \neq \frac{1}{8}$

Maka A_1, A_2, dan A_3 tidak bebas.

48. Kata kode dibentuk dari huruf A sampai Z.

    a. Berapa banyak kata yang dapat dibentuk tanpa mengulang setiap kata.

    b. Berapa banyak kata dari 5 huruf yang dapat dibentuk jika tidak ada huruf berulang.

c. Berapa banyak kata yang terdiri dari 5 huruf yang dapat dibentuk jika huruf dapat diulang.

Jawab:

a. ${}_{26}P_{26} = 26.25.24...cara$

b. $P_5^{26} = 26.25.24.23.22...cara$

c.

26	26	26	26	26

= 26.26.26.26.26 = 26^5 cara

49. Nomor plat dengan licence berisi 2 huruf yang di ikuti oleh 4 nomor seperti SB7904 atau AY1637

Jawab:

a. huruf angka

26	26	10	10	10	10

2 huruf 4 angka

Keterangan:

Banyak huruf = 26

Banyak angka = 10

Banyak plat yang mungkin dapat dibuat = $26^2.10^4$ banyaknya.

b. pada soal a) jika huruf dapat diulang tapi angka tidak jawab :

26	26	10	10	10	10

= 26^2.90.56 banyak plat yang mungkin

c. berapa banyak soal b) yang mempunyai nomor 4 digitnya tidak lebih dari 5500

≥ 6000

26	16	4	9	8	7

= 26. 16. 9. 8 . 7. 4 =1362816

Keterangan: 26, 16, 4 kurangi 10

9, 8, 7 < 5500

26	26	1	4	8	7

= 26. 26. 7. 8. 4. 1 = 151424

> 5500

Yang dapat dibuat (> 5500) = 1362816+151424 = 1514240 banyak plat

50. Dalam berapa cara 3 laki–laki dan 3 wanita dapat duduk dalam satu barisan jika laki–laki dan wanita harus duduk bergantian :

Jawab:

Misal : 3 laki–laki $= \ell_1, \ell_2, \ell_3$

3 wanita $\omega_1, \omega_2, \omega_3$

Keterangan :

laki–laki dan wanita masing–masing bergantian dengan 2 cara yaitu 2 !

$I : (\ell_1 \omega_1), (\ell_2 \omega$ I adalah 3

$II : (\omega_1 \ell_1), (\omega_2 \ell_2), (\omega_3 \ell_3$ II adalah 3

Jadi banyak cara yaitu 2!.3!.3! = 72 banyaknya

51. Berapa banyaknya nomor (yang terdiri dari 3 angka dan mempunyai angka ganjil) yang dapat dibuat dari angka 0, 1, 2, 3, 4 jika angka dapat diulang tetapi angka I tidak boleh

4 cara	5 cara	2 cara
I	II	III

= 40 Banyaknya nomor yang mungkin dapat

I = Cuma ada 4 sebab angka 0 tidak ikut

II = ada 5 cara sebab banyak angka boleh ikut semua

III = ada 2 cara sebab yang diminta angka ganjil dari 0, 1, 2, 3, 4 yaitu 1 dan 3 (bilangan ganjil angka terakhirnya harus ganjil)

52. Ada 10 objek yang dicoba, di ambil secara random 4 objek dengan mengembilan:

a. Berapa peluang bahwa tidak ada objek yang terulang lebih dari satu kali

b. berapa peluang bahwa sekurang-kurangnya ada 1 objek yang dipilih lebih dari satu kali

Jawab

a.

10	Objek 1
9	Objek II

Dipakai $P_4^{10} = 10.9.8.7$

8	Objek III
7	Objek IV

P (Terambil I) = $\frac{1}{10}$ (banyak objek 10)

P (Terambil II) = $\frac{1}{10}$ (pengembalian)

P (Terambil III) = $\frac{1}{10}$ (pengembalian)

P (Terambil IV) = $\frac{1}{10}$ (pengembalian)

$$P(A) = 10.9.8.7 \left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{9.8.7}{10.00} = 0{,}504$$

b. $P(A^c) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}504 = 0{,}496$

53. $256 = 2^8$ jadi ada 8 cara banyaknya menyusun nechas

54. Sebuah club terdiri dari 17 pria dan 13 wanita atau dipilih 5 panitia
    a. Berapa panitia yang mungkin dapat dibentuk
    b. Berapa banyak paniti yang mungkin dapat dibentuk dari 3 pria dan 2 wanita.
    c. Jawaban b) jika 1 bagian laki – laki sendiri menjadi bagian atau ikut di dalamnya

Jawab

a. $C_5^{30} = \dfrac{30.29.28.27.26}{5.4.3.2.1}$ cara

b. $\binom{17}{3} . \binom{13}{2}$ cara

c. $\binom{1}{1} . \binom{17}{3} . \binom{13}{2}$ cara

55. Sebuah perkumpulan sepak bola mempunyai 49 pemain yang mampu menjadi tim reaksi khusus.

a. Jika 11 harus dipilih mampu bermain berapa banyak team yang menunggui

b. Jika dari 49 pemaian itu ada 21 offensive dan 25 defensive pemain, berapa peluang bahwa team yang dipilih mempunyai 5 offensive dan 6 definsive

Jawab

a. Karena tidak memperhatikan urutan maka digunakan konsinsi

$$C_{11}^{49} = \frac{49.48.47.46.45.44.43.42.41.40.39}{11.10.9.8.7.6.5.4.3.2} \text{ cara}$$

b. Misal peristiwanya adalah A, maka

$$\text{p (A)} = \frac{C_5^{24} . C_6^{25}}{C_{11}^{43}}$$

56. Untuk bilangan positif n>r tunjukkan bahwa

a) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Bukti :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r} \text{ (Q.E.D)}$$

b) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

Bukti

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!r(r-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}.\frac{n}{r}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}.\frac{(n+r-r)}{r} = \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}\left(1+\frac{n-r}{r}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} + \frac{(n-r)(n-1)!}{r(n-r)!(r-1)!} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!((n-1)-(r-1))!}$$

$$= \binom{n-1}{r-1} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} = C_{r-1}^{n-1} + C_{r}^{n-1} \qquad \text{(Q.E.D)}$$

57. Lengkapi penyelesaian untuk penjumlahan berikut:

a. $\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 1 + \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} + 1 = 1 + 6 + 1 = 8$

b. $\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} = 2 + 15 + 15 + 1 = 33$

c. $$\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}=\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+....+\binom{2n}{2n}$$

$$=\binom{2n}{0}+\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-1}{2}+...+1$$

$$=\binom{2n}{0}+\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-2}{1}+\binom{2n-2}{2}+\binom{2n-2}{2}+...+1$$

$$=1+\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-2}{1}+\binom{2n-3}{1}+\binom{2n-3}{2}+\binom{2n-3}{1}+\binom{2n-3}{2}$$

$$+\binom{2n-3}{2}+\binom{2n-3}{3}=1+\binom{2n-1}{1}+\binom{2n-2}{1}+\binom{2n-3}{1}+\binom{2n-3}{2}$$

$$+\binom{2n-3}{1}+\binom{2n-3}{1}=\binom{2n-3}{1}+\binom{2n-3}{1}+\binom{2n-3}{1}$$

58. Ada 7 orang melamar suatu pekerjaan sebagai kasir di suatu Departement Store.

a. Jika hanya tiga calon yng cocok, dalam berapa cara kerja orang calon pekerjaitu dipilih dari 7 peserta.

b. Jika terdapat 3 laki-laki dan 4 perempuan mempunyai kualitas yang sama, kemudian kerja pekerjaan dipilih secara random maka berapa peluang bahwa ketiga yang dikerjakan itu sama jenis kelaminnya .

c. Dengan berapa cara yang berbeda ke 7 peserta itu akan antri dalam satu deretan ketika menunggu untuk wawancara.

d. Jika ada 4 perempuan ,3 laki-laki maka dalam berapa carakah peserta itu akan antri jika tiga pertama adalah perempuan.

Jawab:

a. $C_3^7 = \frac{7.6.5.4}{3.2.1}$ =7.5.4 = 7. 20 = 140 cara

b. $\frac{C_2^5 . C_1^2}{C_3^7} = \frac{10 .2}{7.20} = \frac{20}{7 .20} = \frac{1}{7}$

c. ${}_7P_7$ = 7! Sebab urutan diperhatikan

d.

4	3	2	4	3	2	1

I II III IV V VI VII

Wanit aAda

Berkurang 1 wanita

-2 wanita

1W + 2P

3p

Pria -1

Pria -2

= 4 .3 . 2. 4. 3. 2 .1 = 576 cara

59. Pada soal 54 yang hanya dipilih adalah president direktur, wakil dan sekertaris. Beberapa banyak cara yang berbeda pada susunan ini.

Jawab:

Banyak cara dengan memperhatikan urutan adalah

$_{30}P_3 = \frac{30.29.28.27!}{27!} = 30 \,.\, 29.\, 28 = 24360$ cara

60. Dengan berapa cara 10 murid antri masuk kelas jika sepasang murid menolak mengikuti yang lain dalam barisan.

    Jawab:

    Misal: AB (pasangan) jadi semua peristiwa 10!

    $\left.\begin{array}{l}\text{AB: 9}\\ \text{BA: 9}\end{array}\right\} 2$ yang tidak ikut = 9.2.8! (dari 10 diambil 2)

    yang ingin ikut = 10! – 9.2.8! atau

    = 10! – 2.9!

61. a. R.S yang ditanyakan yaitu 365^n

    b. banyak cara dengan urutan $_{365}P_n$

    c. Peluang = $\frac{_{365}P_n}{365^n}$

62. Seorang murid mempunyai 12 pensil warna

    a. Berapa cara 3 biru,4 merah dan 5 hijau pensil berwarna itu disusun dalam satu deretan

       Jawab:

       Dengan prinsip berulang banyakcara = $\frac{12!}{3!4!5!}$ = 27.720

    b. Dengan berapa cara 12 pensil warna yang berbeda itu ditempatkan dalam tiga kotak yang berisi 3,4 dan 5 pensil berwarna.

       Jawab:

karena tidak memperhatikan urutan maka dengan menggunakan kombinasi yaitu

$C^{12}_{3,4,5} = \frac{12!}{3!4!5!0!} = 27.72$

63. Cara menyusun partisi 26 huruf dari atau dalam ketiga kotak tertentu yang terdiri dari 9, 11 dan 6 huruf adalah $\frac{26!}{9!11!6!}$

64. Cara menyusun atau banyak cara dari permutasi 9a'S , 11b'S & 6c'S adalah $\frac{26!}{9!11!6!}$

65. Suatu kontes pertandingan untuk menetukan kata kode yang diberi jika dari huruf-huruf dalam nama "ATARI" dengan asumsi bahwa A dapat dianggap dua tapi yang lain satu.

    a. Berapa banyak kata yang terdiri dari 5 huruf yang dapat dibentuk?

    Jawab :

    Huruf A = 2 (2 cara)

    Huruf T,R,I = 1 (1 cara)

    1 (1 cara)

    1 (1 cara)

    Jadi banyak kata yang terbentuk adalah $\frac{5!}{2!1!1!1!} = \frac{5.4.3}{1!1!\ 1!}$

    = 60 kata

    b. Berapa banyak kata dengan 2 huruf yang dapat dibentuk?

Kata tidak boleh ada yang dobelmisalnya aa, jadi menggunakan kombinasi

yaitu $C_2^5 + C_1^3 = \frac{5.4.3!}{2!3!} + \frac{3.2.1}{2!1!}$ = 10 + 3 = 13 kata

c. Berapa banyak kata yang dapat dibentuk? Maksudnya dibuku apa!

66. memakai prinsip berulang yaitu $\frac{60!}{15!20!25!}$ banyaknya cara

67. Sebuah mesin mempunyai 9 tombol di dalam satu baris .Setiap tombol mempunyai 3 posisi yaitu a, b dan c

a. Berapa banyak carakah yang dapat disusun di kedudukan tersebut

jawab:

Banyak huruf (posisi) ada 3 dengan susunan 9 tombol

jadi banyak cara terdapat yang mungkin = 3^9 cara kedudukan yang dapat disusun rendah ke yang tinggi .

b. Soal a) tetapi jika setiap posisi menggunakan 3 cara .

jawab:

Karena ada 3 posisi dimana setiap posisi terdapat 3!

Maka banyaknya cara dari 9 tombol = $\frac{9!}{3!3!3!} = \frac{9!}{(3!)^3}$

68. a. Banyak cara = $\frac{11!}{4!4!3!} = \frac{11.10.9.8.7.6.5}{4.3.2.3.2} = 11.550$ cara

b. ${}_{12}P_{12} \cdot {}_{3}P_{3} = 12!3!$

69. Misalkan bilangan pemenang suatu loteri bilangan empat digit ditentukan dengan melempatkan 4 slips kertas (tanpa pengulangan dari suatu kotak yang berisi Sembilan slips dengan angka yang sesuai 1 sampai 9 dan dicatat digit sesuai urutan dari yang terkecil sampai terbesar.

a. Berapa cara kemungkinan lottery diambil 4 : $C_4^9 = 126$

b. Tentukan peluang bahwa nomor kemenangan mempunyai hanya digit ganjil misal : $X^* = 5$ digit yang ganjil

$$\mathrm{P}\left(x^*\right) = \frac{C_4^5 C_4^4}{C_4^9} = \frac{5.1}{126} = \frac{5}{126} = 0{,}0397$$

c. $Z = P_4^9 = 3024$ (urutan yang diperhatikan)

70. A: $4 \rightarrow 4$ andaikan 4 dadu A, B, C, dan D dengan tanda sebagai berikut :

$0 \rightarrow 2$ A bernomor 4 pada 4 permukaan dan 0 pada 2 permukaan

B: $3 \rightarrow 6$ B bernomor 3 pada 6 permukaan

C: $2 \rightarrow 4$ C bernomor 2 pada 4 permukaan dan 6 pada 2 permukaan

$6 \rightarrow 2$

D: $5 \to 3$ D bernomor 5 pada 3 permukaan dan 1 pada 3 permukaan

$1 \to 3$

A > B pasangan berurutnya $(4,3)$ terdapat $4.6 = 24$

B > C pasangan berurutnya $(3,2)$ terdapat $6.4 = 24$

C > D pasangan berurutnya $(2,1)$ terdapat $4.3 = 12$

$(6,5)$ terdapat $2.3 = 6$

$(6,1)$ terdapat $2.3 = 6$

$$\therefore\ P(A > B) = P(B > C) = P(C > D) = \frac{n(A > B)}{n(s)} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

71. Uji laboratorium penggunaan doping atlet internasional mempunyai nilai seperti tabel berikut:

A : pakai doping

A^c : tidak pakai doping

$P(A) = \frac{1}{50} = 0{,}02$

$P(A^c) = 0{,}98$

B : hasil tes positif

B^c : hasil tes negative

	Tes	
Doping	+	-
Yes	0,9	0,1
No	0,01	0,99

$P(B|A) =$ peluang pakai doping dengan hasil tes positif

$P(B|A) = 0{,}9$ $\quad P(B^c|A) = 0{,}1$

$P(B|A^c) = 0{,}01 \qquad P(B^c|A^c) = 0{,}99$

a. $P(B^c) =$ peluang tes negatif

$= P(A^c \cap B) + P(A \cap B^c)$

$= P(A^c)P(B^c|A^c) + P(A)P(B^c|A)$

$= (0{,}98)(0{,}99) + (0{,}02)(0{,}1)$

$= 0{,}9722$

b. $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$

$= \dfrac{(0{,}02)(0{,}9)}{1 - 0{,}9722} = 0{,}6475$

72. 4 Disket

I. M dan H	A = 1 merah
II. M dan P	B = 1 Hijau
III. M dan Ht	C = 1 Putih
IV. H dan P	D = 1 Hitam

a. Apakah peristiwa A dan B bebas atau tidak bebas?

b. Apakah peristiwa B dan C bebas atau tidak bebas?

c. Apakah setiap pasangan saling lepas atau tidak?

Jawab:

a. karena $A \cap B \neq \phi$ maka $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ jadi A dan B tidak bebas

b. karena $B \cap C = \phi$ maka $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ jadi B dan C bebas

c. karena $B \cap D = \phi$ maka B dan D saling lepas

$C \cap D = \phi$ maka C dan D saling lepas

(III dan IV)

a. $P(A|B) \neq P(A)$ dan $P(B|A) \neq P(B)$ jadi A dan B tidak bebas.

b. $P(B|C) = P(B)$ dan $P(C|B) = P(C)$ jadi B dan C bebas.

Variabel Random dan Distribusi-distribusi

73. Misalkan *e (i,j)* merupakan hasil dari melempar dadu yang bersisi 4 sebanyak 2 kali. Buat pdf diskrit dan gambar grafik CDF untuk variabel random dibawah ini.

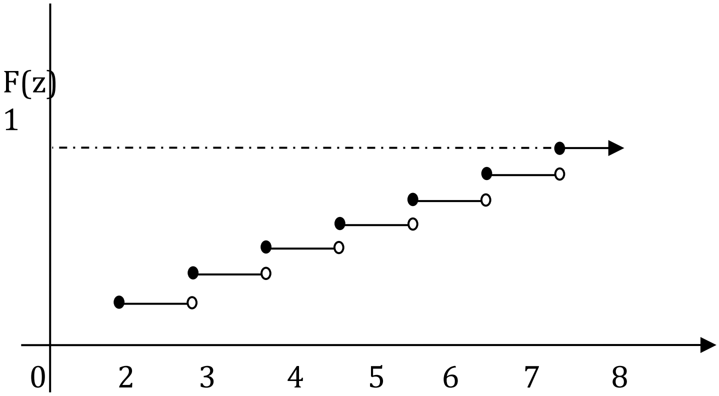
a. *Y(e) = i+j*

jawab :

S = {(1,1),((1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4), (4,1),(4,2),(4,3),(4,4)}

i+j= y(e)	*f(y)*	*F(y(e)*
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$
5	$\frac{4}{16}$	$\frac{10}{16}$

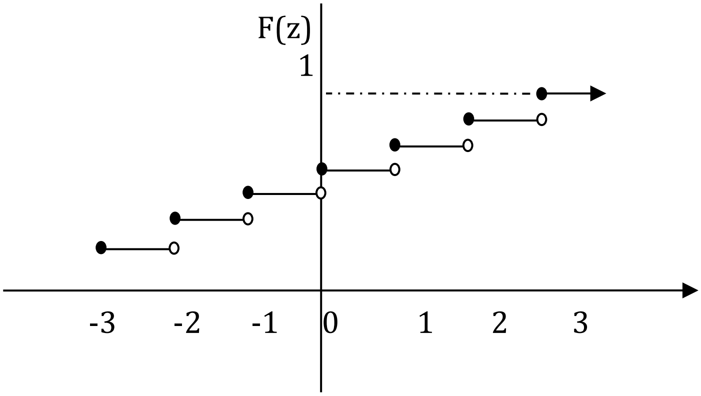
6	$\frac{5}{16}$	$\frac{13}{16}$
7	$\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$
8	$\frac{2}{16}$	1



b. *Z(e)= i-j*

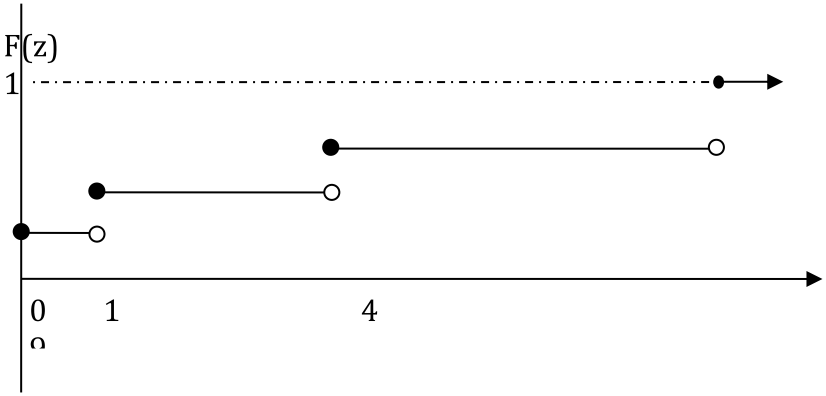
$z(e)$	$f(z)$	$F(z)$
-3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
-2	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$
-1	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$
0	$\frac{4}{16}$	$\frac{10}{16}$

1	$\frac{5}{16}$	$\frac{13}{16}$
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{15}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	1



c. $W(e)=(i-j)^2$

$w(e)$	$f(w)$	$F(w)$
0	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$
1	$\frac{6}{16}$	$\frac{10}{16}$
4	$\frac{4}{16}$	$\frac{14}{16}$
9	$\frac{2}{16}$	1



74. Suatu eksperimen melempar sebuah dadu sekali dan sebuah mata uang sekali scor sesuai dengan angka mata dadu dan koin (0 atau 1). Subut ini variable random missal x. daftarlah nilai yang mungkin dan table nilai dari yang seimbang. Tentukan:

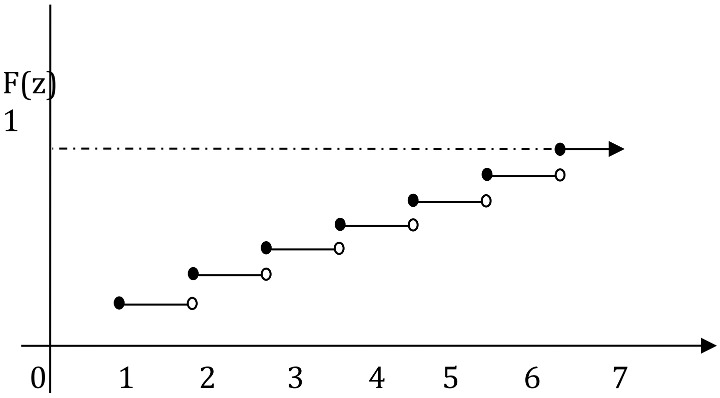
a. Pdf diskrit dan CDF.

b. S = { (0,1),((0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(0,6),(1,1),(1,2), (1,3), (1,4),(1.5),(1,6)}

X = banyaknya angka yang muncul.

X	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$
$F(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{11}{12}$	1

c.



d. P(x>3) = p(x=4 atau 5 atau 6 atau 7)

$$= \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} \; = \; = \frac{7}{12}$$

e. P(x= jumlah bulat ganjil)= P(x =1 atau 3 atau 5 atau 7)

$$=\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}$$

$$=\frac{6}{12}$$

$$=\frac{1}{2}$$

75. Sebuah tas berisi 3 koin normal dan 1 tidak (dengan sisi yang sama), koin dirandom dan ditos 3 kali.

X= jumlah muka yang muncul (banyaknya muka yang muncul)

Tentukan pdf diskrit dan CDF serta gambar!

Jawab:

X=0,1,2,3

B_1= koin normal

B_2= koin tidak normal (dua sisi sama)

Misal: $\frac{N = B_1}{k_1 k_2}$ $\qquad$ $\frac{B_2 = N^2}{k_3}$

Maka , $p(B_1) = \frac{2}{3}$ dan $p(B_2) = \frac{1}{3}$

P(x=0) $= P(B_1) \cdot P(x=0/B_1) + P(B_2) \cdot P(x=0/B_2)$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{12}$$

P(x=1) $= P(B_1) \cdot P(x=1|B_1) + P(B_2) \cdot P(x=1|B_2)$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{4}$$

P(x=2) $= P(B_1) \cdot P(x=2|B_1) + P(B_2) \cdot P(x=2|B_2)$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{4}$$

P(x=3) = $P(B_1) \cdot P(x=3|B_1) + P(B_2) \cdot P(x=3|B_2)$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1$$

$$= \frac{2}{24} + \frac{8}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	$1/12$	$3/12$	$3/12$	$5/12$
$F_x(x)$	$1/12$	$4/12$	$7/12$	1

76. Sebuah box berisi 5 bola berwarna, 2 bola berwarna hitam dan 3 bola berwarna putih. Bola diambil tanpa pengembalian. Jika X adalah bilangan pengambilan sampai memperoleh bola hitam, tentukan pdf f(x)!

Jawab:

X=banyaknya pengambilan sampai bola hitam didapat

Tentukan pdf diskrit!

Peristiwa={H, PH, PPH, PPPH} = {1,2,3,4}

$$f(x)\begin{cases} \frac{1}{10}(x-1); x = 2,3,4 \\ 0; x \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$P(x=1)=P(H)=\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$$

$$P(x=2)=p(PH)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P(x=3)=P(PPH)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{10}$$

$$P(x=4)=P(PPPH)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\frac{2}{3}=\frac{1}{10}$$

77. Variabel random diskrit mempunyai pdf f(x)

a. jika $f(x)=k\left(\frac{1}{2}\right)^x$ untuk x=1,2,3 dan 0 lainnya, tentukan k!

b. apakah fungsi $f(x)=k\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{1}{2}\right]$ untuk x=1,2,3 merupakan sebuah (suatu) pdf untuk suatu nilai k?

Jawab:

a. $\sum_{x=1}^{3} f(x)=1$ (syarat pdf)

$$k\sum_{x=1}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^x=1 \Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]k=1 \Rightarrow k=\frac{8}{7}$$

b. $$k\sum_{x=0}^{3}\left[\left\|\left(\frac{1}{2}\right)^x-\frac{1}{2}\right\|\right]=1 \Rightarrow k\left[\left\|\left(\frac{1}{2}\right)\right\|+\|0\|+\left\|\frac{1}{4}\right\|\right]=1$$

K(0)=1 jadi karena tidak dapat ditentukkan, nilai k (k tidak tunggal) maka fungsi tersebut bukan pdf.

78. Diketahui $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{12};x=1,2,...,12\\ 0;x \text{ lainnya}\end{cases}$

[x] adalah bilangan bulat terbesar yang tidak melebihi untuk pdf. Tunjukkan CDF dapat dinyatakan sebagai F(X) =([x]/12)

Buktikan bahwa CDFnya

Bukti:

$$F_X(x)=f(x)$$

$$F_X(0)=f(0)=0$$

$$F_X(1)=f(1)=\left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$F_X(2)=f(1)+f(2)=\frac{1}{(12)^2}+\frac{3}{(12)^2}=\frac{4}{(12)^2}=\left(\frac{2}{12}\right)^2$$

$$F_X(12)=f(12)=\left(\frac{12}{12}\right)^2=\left(\frac{\|x\|}{12}\right)^2;0<x<13$$

$$\therefore F_X(x)=\begin{cases}0;x\le 0\\ \left(\|x\|/12\right)^2;0<x<13\\ 1;x\ge 13\end{cases}$$

79. Variabel random x mempunyai pdf

$$f(x)=\begin{cases}c(8-x);x=0,1,2,3,4,5\\ 0;\text{x lainnya}\end{cases}$$

a. tentukan c

b. tentukan $F_X(x)$

c. tentukan $p[x > 2]$

d. tentukan E(x)

Jawab:

a. $\sum_{x=0}^{5} c(8-x) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{33} \therefore f(x) = \frac{1}{33}(8-x)$

b.

x	$f(x)$	$F(x)$
0	$8/33$	$8/33$
1	$7/33$	$15/33$
2	$6/33$	$21/33$
3	$5/33$	$26/33$
4	$4/33$	$30/33$
5	$3/33$	$33/33$

$$F_X(x)=\begin{cases}0; x\le 0\\ 8/33; 0\le x<1\\ 15/33; 1\le x<2\\ 21/33; 2\le x<3\\ 26/33; 3\le x<4\\ 30/33; 4\le x<5\\ 1; x\ge 5\end{cases}$$

c. P(x>2) = P(x=3,4,5) = $\frac{5}{33}+\frac{4}{33}+\frac{3}{33}=\frac{12}{33}=\frac{4}{11}$

d. $E(x) = \sum_{x_i\le x} x_i\, f(x_i)\ ;\ \ i = 0,1,2,3,4,5$

$$E(x) = \sum_{x=0}^{5} x\, f(x) = 0\cdot f(0) + 1\cdot f(1) + 2\cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + 4\cdot f(4) + 5\cdot f(5)$$

$$= 0 + \frac{7}{33} + 2\cdot\frac{6}{33} + 3\cdot\frac{5}{33} + 4\cdot\frac{4}{33} + 5\cdot\frac{3}{33} = \frac{65}{33}$$

80. Suatu bilangan bulat non negatif untuk nilai variabel random Xmempunyai pdf dengan bentuk

$$F(x) = \begin{cases} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} & ;\quad x = 0,1,2,\dots \\ 0 & ;\quad x<0\end{cases}$$

a. Tentukan pdf dari X.

b. Tentukan P(10 < x ≤ 20)

c. Tentukan P(x genap)

Jawab:

a. $f(0) = 1 - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$

$$f(1) = F(1) - F(0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$\vdots$$

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} & ; \quad x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & ; \quad x \text{ lainnya} \end{cases}$$

b. $P(10 < x \leq 20) = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{13} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^8}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 0{,}000488$$

c. $P(x \text{ adalah genap}) = P(x = 0, 2, 4, \dots)$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{5} + \cdots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

81. a. Dapatkah $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{1-|x|}$ digunakan sebagai pdf dengan $x = -1, 0, 1$

Jawab:

a. $\sum_{x=-1}^{1} f(x) = \sum_{x=-1}^{1} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{1-|x|} = 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 4\frac{3}{4} \neq 1$

Tidak dapat digunakan

b. $f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\sum_{x=0}^{2} \left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$ dapat digunakan

c) $\sum_{x=-1}^{2} f(x) = \sum_{x=-1}^{2} \frac{(1-x)}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \neq 1$ tidak dapat digunakan

$\sum_{x=-1}^{2} f(x) = \sum_{x=-1}^{2} \left(\frac{1-x}{4}\right) = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + 0 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \neq 1$

Tidak dapat digunakan

82. Misalkan x sebuah variabel random sedemikian sehingga $P[X = x] > 0$ jika $x = 1, 2, 3, 4$ dan $P[X = x] = 0$ untuk lainnya. Anggap CDF adalah $F(x) = 0{,}05x\,(1 + x)$ untuk $x = 1, 2, 3, 4$.

a) gambar sketsa grafik dari CDF

b) gambar sketsa grafik dari $f(x)$

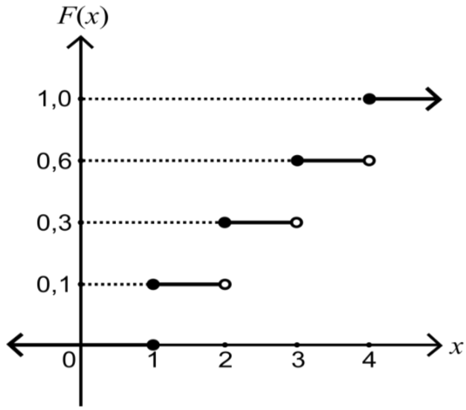
c) gambar sketsa grafik dari $E(x)$

Solusi:

a) $\begin{cases} 0{,}05x(1+x) & ; \ x = 1,2,3,4 \\ 0 & ; \ x \text{ lainnya} \end{cases}$ $\quad F(x) = P[X \leq x]$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \\ P[x=1] = 0{,}05(1)(2) = 0{,}1; & 1 \leq x < 2 \\ P[x=2] = 0{,}05(2)(3) = 0{,}3; & 2 \leq x < 3 \\ P[x=3] = 0{,}05(3)(4) = 0{,}6; & 3 \leq x < 4 \\ P[x=4] = 0{,}05(4)(5) = 1{,}0; & x \geq 4 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x < 1 \\ 0{,}1 & ; \ 1 \leq x < 2 \\ 0{,}3 & ; \ 2 \leq x < 3 \\ 0{,}6 & ; \ 3 \leq x < 4 \\ 1 & ; \ x \geq 4 \end{cases}$$



$f(x_i) = F(x_i) - F(x_i - 1)$; $\quad x < x_i \Rightarrow F(x) = 0$

$f(1) = F(1) - F(1^-) = 0{,}1 - 0 = 0{,}1$

$f(2) = F(2) - F(2^-) = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2$

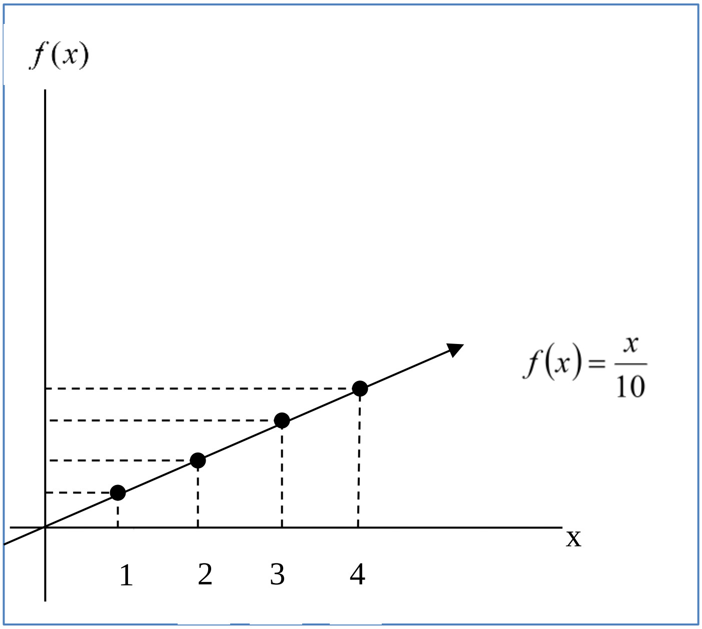
$f(3) = F(3) - F(3^-) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$

$f(4) = F(4) - F(4^-) = 1{,}0 - 0{,}6 = 0{,}4$

x	1	2	3	4
$f(x)$	0,1	0,2	0,3	0,4

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & x = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{x lainnya} \end{cases}$$

b)



c). $$E(x) = \sum_{x=1}^{4} x f(x) = \sum_{x=1}^{4} x.\frac{x}{10} = \sum_{x=1}^{4} \frac{x^2}{10} = \frac{1^2}{10} + \frac{2^2}{10} + \frac{3^2}{10} + \frac{4^2}{10}$$

$$= \frac{1+4+9+16}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

83. PDF dari $f(x)$ adalah $\begin{matrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{6} & x=1,2,3,4,5,6 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Ditannya: $E(x)$ berapa harapan mendapatkan dalar dalam pemain itu

Jawab:

$$E(x)=\sum_{x=1}^{6} xf(x)=\sum_{x=1}^{6}\frac{x}{6}=\sum_{x=1}^{6}\frac{x}{6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=3{,}50$$

84. x adalah variabel random continu dengan

$$f(x)=\begin{cases} c(1-x)x^2 & 0<x<1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$$

a. Tentukan costanta c

b. Tentkan $E(x)$

Jawab:

a). $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ (syarat PDF kontinu)

$$\int_0^1 c(1-x)x^2dx=1$$

$$c\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=1 \Rightarrow c\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1 \Rightarrow c=12$$

b) $E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx}=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{0}^{1}x^3(1-x)\cdot 12\,dx$

$$=\int_0^1\left(12x^3-12x^4\right)dx=3x^4-\frac{12}{5}x^5\Big|_0^1=3-\frac{12}{5}=\frac{3}{5}$$

85. $f(x)=\begin{cases} kx^{-(k+1)} & 1<x<\infty \\ 0 & x \ \text{lainnya}\end{cases}$

a. Tentukan nilai k yang mana sehingga f(x) adalah sebuah PDF?

b. Tentukan CDF dalam soal a)

c. Untuk nilai k yang manakah sehingga E(x) ada?

Jawab:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1\Rightarrow\int_1^{\infty}k\,x^{-(k+1)}dx=1\Rightarrow\frac{k}{-(k+1)+1}x^{-(k+1)+1}\Big|_1^{\infty}=1$$

$$\Leftrightarrow -x^{-k}\Big|_1^{\infty}=1$$

$$\Leftrightarrow 0+1=1$$

$$-k<x<k$$

Supaya PDF maka harus $k>0$ atau $f(x)>0$ $kx^{-(k+1)}>0$

untuk 1<x<∞, k>0

b). $f(x)=kx^{-(k+1)};1<x<\infty$

$$f(x)=\begin{cases} kt^{-(k+1)} & 1<x<\infty \\ 0 & x \ \text{lainnya}\end{cases}$$

$$\int_1^x kt^{-(k+1)}dt = \frac{k}{-(k+1)+1}t^{-(k+1)+1}\Big|_1^x = \frac{k}{-k}x^{-k} + \frac{k}{k}\cdot 1$$

$$= -x^{-k} + 1 = 1 - x^{-k} \ ; 1 < x < \infty \ ; k > 0$$

c). $E(x) = \int_1^\infty xf(x)dx = \int_1^\infty kx.x^{-(k+1)}dx = \int_1^\infty k.x^{-k}dx$

$$E(x) = \frac{k}{-k+1}x^{-k+1}\Big|_1^\infty = 0 + \frac{k}{-k+1}$$

Supaya $E(x)$ ada syaratnya $-k + 1 < 0 \Rightarrow$

$-k < -1 \Rightarrow k > 1$

86. Selidiki apakah fungsi berikut dibawah ini dapat menjadi CDF untuk domain yang diberikan:

a). $F(x) = e^{-x}; 0 \leq x < \infty$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -e^{-x} \ ; 0 \leq x \leq \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \text{ harus} = 1$$

$$\int_0^\infty -e^{-x}dx = e^{-x}\Big|_0^\infty = 0 - 1 = -1 \neq 1$$

b). $F(x) = e^x \ ; -\infty < x \leq 0$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}e^x \ ; -\infty < x \leq 0$$

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = e^x\Big|_{-\infty}^0 = 1 - 0 = 1 = 1 dapat$$

c). $F(x) = 1 - e^{-x} \ ; -1 \leq x < \infty$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = e^{-x} ; -1 \le x < \infty$$

$$\int_{-1}^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_{-1}^{\infty} = 0 - e = e \ne 1 tidak\, dapat$$

87. a. $F(x) = \frac{(x^2 + 2x + 1)}{16} ; -1 \le x \le 3$

$$f(x) = \frac{d(F(x))}{dx} = \frac{2x+2}{16} = \begin{cases} \frac{x+1}{8} ; -1 < x \le 3 \\ 0 \; ; \; lainnya \end{cases}$$

b). $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} ; 0 \le x < \infty ; \lambda > 0$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lambda e^{-\lambda x} + \lambda^2 x e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x}$$

$$= \lambda^2 x e^{-\lambda x} \text{ , } 0 < x < \infty$$

88. Jika $f_i(x); i = 1,...,n$ adalah $p \le f$ buktikan $\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x)$ adalah $p \le f$ dimana $pi \ge 0$ dan $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Bukti:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + ... + p_n f_n(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i . \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

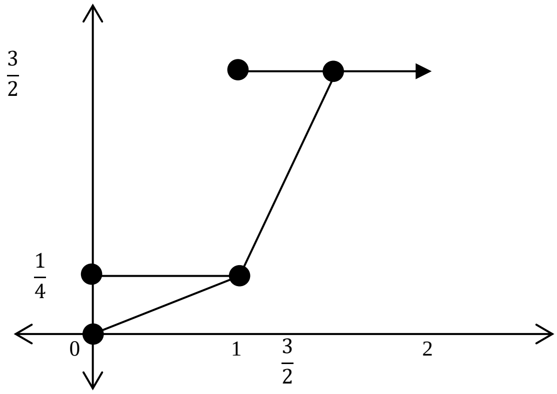
$$= 1 . \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$$

Jadi, $\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x) = 1$. Syarat $p \le f$ dipenuhi.

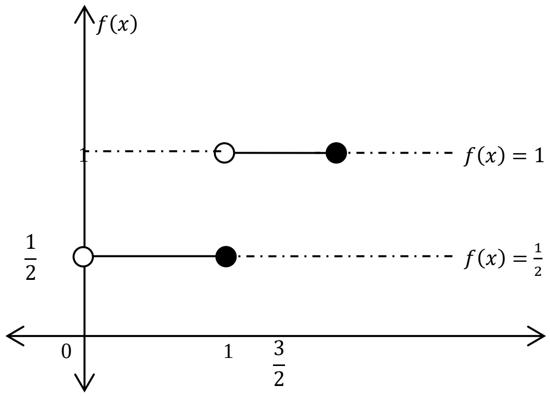
89. $$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},0<x\le 1\\ x-\dfrac{1}{2},1<x\le\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

a) Gambar

$$\begin{cases} 0\,;x<0\\ \int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{4};0\le x<1\\ \int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{2}dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)\Big|_1^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}+\frac{9}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8};1\le x<\frac{3}{2}\\ 1\,;x\ge\frac{3}{2}\end{cases}$$



b) $$f(x)=\frac{d\,f(x)}{dx}=\begin{cases}\dfrac{1}{2};0<x\le 1\\ 1;1<x\le\dfrac{3}{2}\end{cases}$$



c) $P\left[x \le \frac{1}{2}\right] = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

d) $P\left[x \ge \frac{1}{2}\right] = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2} dx + \int_1^{\frac{3}{2}} 1 dx = \frac{1}{2} x \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + x \Big|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

e) $P[x \le 1{,}25] = \int_0^1 \frac{1}{2} dx + \int_1^{1{,}25} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + x \Big|_1^{1{,}25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

f) $P[x = 1{,}25] = \int_{1{,}25}^{1{,}25} dx = x \Big|_{1{,}25}^{1{,}25} = 1{,}25 - 1{,}25 = 0$

90. X adalah variabel random kontinu di

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{9} ; 0 < x < 3 \\ 0 ; x \text{ lainnya} \end{cases}$$

a. Tentukan CDF dari X

b. Tentukan $P[X \le 2]$

c. Tentukan $P[-1 < X < 1{,}5]$

d. Tentukan suatu bilangan m sedemikian sehingga $P[X \leq m] = P[X \geq m]$

e. Tentukan E(x).

Jawab :

a) $$F(x) = \begin{cases} 0 x < 0 \\ \int_0^x \frac{2t}{9} dx = \frac{t^2}{9}\Big|_0^x = \frac{x^2}{9} ; 0 \leq x < 3 \\ 1 ; x \geq 3 \end{cases}$$

b) $$P[X \leq 2] = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{2x}{9} dx = \frac{x^2}{9}\Big|_0^2 = \frac{4}{9}$$

$$P[-1 < X < 1{,}5] = \int_{-1}^{1,5} \frac{2x}{9} dx = \int_{-1}^{0} 0 dx + \int_0^{1,5} \frac{2x}{9} dx$$

$$= \frac{x^2}{9}\Big|_0^{1,5} = \frac{9/4}{9} = \frac{1}{4}$$

c) $$P[X \leq m] = \int_0^m \frac{2x}{9} dx = \frac{x^2}{9}\Big|_0^m = \frac{m^2}{9}$$

$$P[X \geq m] = \int_m^3 \frac{2x}{9} dx = \frac{x^2}{9}\Big|_m^3 = 1 - \frac{m^2}{9}$$

$$\frac{m^2}{9} = 1 - \frac{m^2}{9} \Rightarrow \frac{2m^2}{9} = 1 \Rightarrow 2m^2 = 9 \Rightarrow m^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow m = \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

e) $$E(x) = \int_0^3 x f(x) dx = \int_0^3 \frac{2x^2}{9} dx = \frac{2}{27} x^3 \Big|_0^3 = 2$$

91. $f(x)=\begin{cases} x^2\,; 0<x\le 1 \\ \dfrac{2}{3}; 1<x\le 2 \\ 0; x \text{ lainnya} \end{cases}$

Jawab:

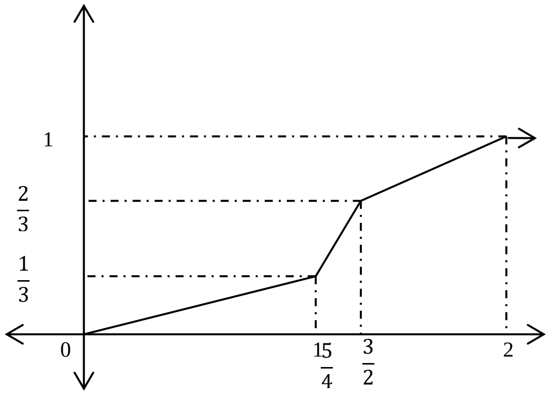
a) Median $P(x\le m)=\dfrac{1}{2}$

$$P(x\le m)=\int_0^1 x^2dx+\int_1^m \frac{2}{3}dx$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{2}{3}x\Big|_1^m \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}m-\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}m=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Rightarrow \frac{2}{3}m=\frac{5}{6}\Rightarrow m=\frac{5}{4}$$

b) $$f(x)=\begin{cases} 0; x<0 \\ \displaystyle\int_0^x t^2dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^x=\frac{1}{3}x^3\,; 0\le x<1 \\ \displaystyle\int_1^x \frac{2}{3}dt=\frac{2}{3}t\Big|_1^x=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}; 1\le x<2 \\ 1; x\ge 2 \end{cases}$$



92. x adalah variabel random kontinu dengan CDF

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ 2(x^{-2} + \frac{1}{x}) & ; 1 \le x \le 2 \\ 1 & ; 2 < x \end{cases}$$

a. Tentukan persentile $p = \frac{1}{3}$ atau $p[x \le c]$

b. Tentukan pdf X

Jawab :

a. Persentile dengan $p = \frac{1}{3}$ atau $p[x \le c] = \frac{1}{3}$

dibuat dahulu pdfnya

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2(1 - \frac{1}{x^2}) ; 1 \le x \le 2 \\ 0 \qquad ; x \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$p[x \le c] = \int_1^c 2(1 - \frac{1}{x^2})dx = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = 2x + \frac{2}{x} \Big|_1^c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2c + \frac{2}{c} - 4 \Leftrightarrow 1 = 6c + \frac{6}{c} - 12 \Leftrightarrow c = 6c^2 + 6 - 12c$$

$$\Leftrightarrow (3c + 2)(2c - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{3}{2} \text{ atau } c = \frac{2}{3} (\text{tidak mungkin})$$

b. Pdf : $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2(1-\dfrac{1}{x^2});1 < x \le 2 \\ 0 \qquad ;\text{x lainnya} \end{cases}$

93. Gunakan empat sifat pada teo 2.2.3 dan tentukan titik diskontinu untuk suatu

$$F(x) = \begin{cases} 0{,}25e^x & ;-\infty < x < 0 \\ 0{,}5 & ;0 \le x < 1 \\ 1-e^{-x} & ;1 \le x < \infty \end{cases}$$

Jawab:

$\lim\limits_{x\to-\infty} 0{,}25e^x = 0 \qquad ; \lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-x} = 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} 0{,}5 = 0{,}5 \ne 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}5 = 0{,}5 \ne 1$ maka titik diskonti-nuitas terdapat pada titik (0,1) atau interval (0,1)

$\lim\limits_{h\to0^+} F(x+h) = F(x)$ yaitu

$\lim\limits_{h\to0^+} 0{,}25e^{x+h} = \lim\limits_{h\to0^+} 0{,}5 = \lim\limits_{h\to0^+} 1-e^{-(x+h)} = F(x)$

$F(x) = 0{,}25e^x$ *ambil* $x = 0 \Rightarrow F(0) = F(a) = 0{,}25$

$F(x) = 1-e^{-x}$ *ambil* $x = 1 \Rightarrow F(1) = F(b) = 1-\dfrac{1}{e} = 0{,}4...$

Karena $a < b$ maka $F(a) < F(b)$

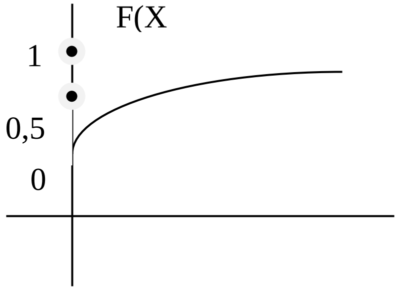
94. Untuk CDF *F(x)* dari latihan no 21 tentukan CDF tipe diskrit $F_d(x)$ dan CDF tipe kontinu $F_c(x)$ dari suatu bilangan sedemikian sehingga $0 < a < 1$

$F(x) = aF_d(x) + (1-a)F_c(x); 0 < a < 1$

Ambil interal $0 < x < 1$

$$F(x) = 0{,}5F_d(x) + 0{,}5F_c(x)$$
$$= 0{,}5 + 0{,}5(1 - e^{-x})$$

$$F_d(x) = \begin{cases} 1 & ; x = 0,1,2,\ldots \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases} \qquad F_c(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; x < 0 \end{cases}$$



95. Misalkan variabel random *x* mempunyai pdf diskrit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8} & ; x = 1, 2, 5 \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases}$$

a. $E(x) = \sum_{x=1}^{5} x.\dfrac{x}{8} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{4}{8} + 0 + 0 + \dfrac{25}{8} = \dfrac{30}{8}$

b. Var $(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2 = \sum_{x=1}^{5} \dfrac{x^3}{8} - \left(\dfrac{30}{8}\right)^2 = \ldots\ldots$

c. $E(2x+3) = \sum_{x=1}^{5} \dfrac{(2x+3)x}{8} = \ldots.$

96. Misalkan *x* mempunyai pdf kontinu

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 ; 0<x<1\\ 0 \quad ; x \ lainnya\end{cases}$$, tentukan;

a. $E(x)=\int_0^1 3x^3 dx=\frac{3}{4}x^4 \Big|_0^1=\frac{3}{4}$

b. Var (x) = $\int_0^1 3x^4 dx=\frac{3}{5}x^5 \Big|_0^1=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=$

c. var (x) = $E(x^2)-(E(x))^2=$

$$\int_0^1 x^2.3x^2dx-(\int_0^1 x.3x^2dx)^2$$

$$=\frac{3}{5}x^5 \Big|_0^1-\left(\frac{3}{4}x^4\right)^2 \Big|_0^1=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{48-45}{80}=\frac{3}{80}$$

d. $E(x^r)=\int_0^1 3x^{r+2}dx=\frac{3}{r+3}x^{r+3} \Big|_0^1=\frac{3}{r+3}$

e. $E\left(3x-5x^2+1\right)=\int_0^1 3x^2\left(3x-5x^2+1\right)dx$

$$=\frac{9}{4}x^4-3x^5+x^3\Big|_0^1=\frac{9}{4}-3+1=\frac{1}{4}$$

97. Pdf $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2} ; 1<x<\infty\\ 0 \quad ; x \ lainnya\end{cases}$

a. $E(x)=\int_1^\infty \frac{x}{x^2}dx=\int_1^\infty \frac{1}{x}dx=\ln z \Big|_1^\infty=\infty$

jadi $E(x)$ *tidak ada.*

b. $E\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^\infty \frac{1}{x}.\frac{1}{x^2}dx=\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2} \Big|_1^\infty$

$$= 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \therefore E(x)\ ada.$$

c. $$E(x^k) = \int_1^\infty \frac{x^k}{x^2}dx = \int_1^\infty x^{k-2}dx = \frac{1}{k-1}x^{k-1}\Big|_1^\infty$$

$k-1<0\ \ atau\ k<1$ supaya $E(x^2)\ ada.$

98. Pada suatu toko komputer, permintaan tahunan untuk sebagian perangkat lunak adalah secara random diskrit *X*. Pemilik toko itu memesan 4 copy untuk setiap paket dengan harga \$10 per copy. Dan pemesan langganan membayar \$35 per copy. Pada akhir tahun paket itu pasti ada yang rusak dan tidak laku sehingga investasi toko itu rugi karena copy yang tidak terjual. Pdf *X* diberikan dalam bentuk tabel.

x	0	1	2	4
f(x)	0,1	0,3	0,2	0,1

a. Tentukan $E(X)$

b. Tentukan variabel (X)

c. Nyatakan Y dalam fungsi linier X dan tentukan $E(X)$ dan var(X)

Jawab:

a. $$E(x) = \sum_{x=0}^{4} xf(x) = 0.0,1 + 1.0,3 + 2.0,3 + 3.0,2 + 4.0,1$$

$$= 0,3 + 0.6 + 0,6 + 0,4 = 1,9$$

b. $E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2 = \text{var}\left(x\right) = \sum_{x=0}^{4} x^2 f(x) - \left\{\sum_{x=0}^{4} xf(x)\right\}^2$

$$= (0+0{,}3+1{,}2+1{,}8+1{,}6) - [1{,}9]^2$$
$$= 4{,}9 - 3{,}61 = 1{,}29$$

c. $Y = 35x - 40$

$$E(Y) = E(35x-40) = E(35x) - 40$$
$$= 35E(x) - 40 = 35(1{,}9) - 40$$
$$= 66{,}5 - 40 = 26{,}5$$

99. f(r) = $\begin{cases} 6r(1-r) & 0 \le r \le 1 \\ 0 & r \text{ lainnya} \end{cases}$

a. $E(r) = \int_0^1 6r^2(-r)dr = \dfrac{1}{2}$

b. Nilai harapan keliling lingkaran

$$E(2\pi r) = 2\pi E(r) = 2\pi.\frac{1}{2} = \pi$$

c. Nilai harapan dari luas daerah lingkaran

$$E(\pi r^2) = \pi\int_0^1 6r^3(1-r)dr = \frac{3}{10}\pi$$

100. Jika distribusi X adalah simetrik dengan $\mu = E(X)$ maka moment kerja μ adalah nol atau $\mu_3 = 0$. Buktikan dengan menggunakan transformasi $y = x - \mu$ dalam integral dan ditulis bahwa $g(y) = yf(\mu + y)$ adalah fungsi ganjil dari y

Bukti :

$\mu_3 = 0$

$\mu_3 = E(X-\mu)^3 = E(y)^3$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^3 f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^3 f(y+\mu)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 .y.f(\mu+y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 g(y)dy$$

$$= y^2 \int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy$$ karena $g(y)$ fungsi ganjil

$= 0$ (terbukti)

x	-3	-1	0	2	$2\sqrt{2}$
$f(x)$	$1/4$	$1/4$	$\frac{6-3\sqrt{2}}{16}$	$1/8$	$3\sqrt{2}/16$

101.

Distribusi X tidak simetris, sebab $f(c-x) \neq f(c+x)$

Ambil $c = -3$ maka $f(-3-x) = f(-(3+c) \neq f(3+c)$

$\mu_3 = 0$

Bukti :

$$E(X)=\sum_{-3}^{2\sqrt{2}} x f(x)=$$

$$E(X^2)=\sum_{-3=x}^{2\sqrt{2}} x^2 f(x)=$$

$$E(X^3)=\sum_{-3=x}^{2\sqrt{2}} x^3 f(x)=$$

$$E(X-\mu)^3=\mu_3=E(x)^3-3\mu E(x^2)+3\mu^2E(x)-\mu^3=0$$

terbukti $\mu_3=0$

102. Buktikan $E(X)=\int_0^\infty [1-F(x)]dx$

Bukti :

$$E(X)=\int_0^\infty xF(x)dx$$

$$=\int_0^\infty xdF(x)$$

$$=xF(x)\ \Big|_0^\infty-\int_0^\infty F(x)dx$$

Karena $F(\infty)=1\rightarrow F$ fungsi komulatif terbesar = 1 dan terkecil = 0

$$F(0)=0$$

Sehingga $\int_0^\infty dx=x\Big|_0^\infty \rightarrow$ jika dikalikan dengan $F(x)$, nilainya tetap karena itu dapat ditulis $\int_0^\infty dx=x\Big|_0^\infty=xF(x)\ \Big|_0^\infty$

$$E(X) = x\Big|_0^\infty (1-0) - \int_0^\infty F(x)dx$$

$$= \int_0^\infty dx - \int_0^\infty F(x)dx$$

$$= \int_0^\infty [1 - F(x)]dx \qquad \text{(terbukti)}$$

Dengan $E(X) = -\int_0^\infty F(x)dx + \int_0^\infty [1-F(x)]dx$; $E(|X|) < \infty$

103. a) Gunakan pertidaksamaan Chebychev's untuk menghitung peluang $P\left[\frac{5}{8} < x < \frac{7}{8}\right]$ dalam soal 96 dengan batas bawah. Diberikan soal 96:

f(x) = $\begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \text{ lainnya} \end{cases}$

Berapa batas bawahnya?

Jawab : soal 96

$E(x) = \frac{3}{4}$ $\qquad \sigma^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$

$E(x^2) = \frac{3}{5}$ $\qquad \sigma^2 = \frac{3}{80} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{3}{80}}$

$$P\left[\frac{5}{8} < x < \frac{7}{8}\right] = P\left[\frac{5}{8} - \frac{3}{4} < x - \frac{3}{4} < \frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right]$$

$$= P\left[\frac{5}{8} - \frac{6}{8} < x - \frac{3}{4} < \frac{7}{8} - \frac{6}{8}\right]$$

$$= P\left[-\frac{1}{8} < x - \mu < \frac{1}{8}\right]$$

$$= P\left[|x - \mu| < \frac{1}{8}\right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

(teorema chebychev untuk batas bawah)

$$\Leftrightarrow P[(|x - \mu| < k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$\Leftrightarrow k\sigma = 1/8 \Rightarrow k = \frac{1}{8\sigma}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{\frac{8\sqrt{3}}{80}} = \frac{\sqrt{80}}{\frac{8}{\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{5}}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{6}\sqrt{5}$$

$$P\left[\frac{5}{8} < x < \frac{7}{8}\right] = P\left[(|x - \mu| < \frac{1}{8}\right] \geq 1 - \frac{1}{15/36} \geq 1 - \frac{36}{15} \geq \frac{-21}{15} \geq -1{,}4$$

Jadi, $P\left[\frac{5}{8} < x < \frac{7}{8}\right]$ mempunyai batas bawah $-1{,}4$

b) $P\left[\frac{1}{2} < x < 1\right] = P\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4} < x < -\frac{3}{4} < 1 - \frac{3}{4}\right]$

$$= P\left[-\frac{1}{4} < x - \mu < \frac{1}{4}\right]$$

$$= P\left[|x - \mu \ | < \frac{1}{4}\right]$$

$$k\sigma = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{4\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{80}}} = \frac{\sqrt{80}}{4\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{15}$$

$$P\left[\frac{1}{2}<x<1\right]=P\left[\left|x-\mu\ \right|<\frac{1}{4}\geq 1-\frac{1}{15\!\!\diagup_9}\geq 1-\frac{9}{15}\geq\frac{6}{15}\geq 0{,}4\right]$$

Jadi, $P\left[\frac{1}{2}<x<1\right]$ mempunyai batas bawah 0,4

$$c.\ \ P\left[\frac{1}{2}<x<1\right]=P[x\leq 1]-P\left[x\leq\frac{1}{2}\right]$$

$$=F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$F(x)=\int_0^x 3t^2dt=x^3\Leftrightarrow F(x)=x^3$$

$$P\left[\frac{1}{2}<x<1\right]=1^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

104. Perhatikan v.r *x* pada contoh 2.1.1 yang mewakili bilangan yang terdiri dari 2 nomor yang muncul terbesar pada lemparan 2 dadu yang berisi 4.

a. Tentukan E(*x*)

b. Tentukan Var(*x*)

<u>Jawab</u> 5

$(1{,}1)\rightarrow$ terbesar 1 ada : 1

$(2{,}1),(1{,}2),(2{,}2)\rightarrow$ terbesar 2 ada : 3

$(3{,}1),(3{,}2),(3{,}3),(1{,}3),(2{,}3)\rightarrow$ terbesar 3 ada : 5

$(1{,}4),(4{,}1),(4{,}2)(2{,}4),(4{,}3),(3{,}4),(4{,}4)\rightarrow$ terbesar 4 ada :7

x	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

a). $E(x)=\sum_{x=1}^{4} xf(x)=\frac{25}{8}$

b). $\text{var}(x)=E(x^2)-(E(x))^2=E(x^2)-\left(\frac{25}{8}\right)^2$

$$=\sum_{x=1}^{4} x^2 f(x)-\frac{25}{8}$$

$$=\left[\frac{1}{16}+\frac{12}{16}+\frac{45}{16}+\frac{112}{16}\right]-\frac{625}{64}$$

$$=\frac{680-625}{64}=\frac{55}{64}$$

105. $E(x)=\mu$ dan $\text{var}(x)=\sigma^2$ tentukan mean dari variansi dari

$a.\ e^x$

$b.\ \frac{1}{x}(\mu\neq 0)$

$c.\ \ln(x)(x>0)$

Jawab

a. $\quad Misalkan\, H(x)=e^x \quad H'(x)=e^x \quad H''(x)=e^x$

$E(H(x))=H(\mu)+\frac{1}{2}H''(\mu)\sigma^2$ dengan

H(x) = H(μ)+H'(μ)(x-μ)+ ½ H"(μ)²(x-μ)² → Taylor

$$E(e^x)=e^\mu+\frac{1}{2}(e^\mu)\sigma^2=e^\mu\left(1+\frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

b. Untuk $H(x)=\frac{1}{x} \quad H'(x)=-\frac{1}{x^2} \quad H''(x)=\frac{2}{x^3}$

$$E(H(x)) = H(\mu) + \frac{1}{2}H''(\mu)\sigma^2$$

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{\mu^3}\right)\sigma^2 = \frac{1}{\mu}\left[1 + \frac{\sigma^2}{\mu^2}\right] = \frac{1}{\mu}\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right]$$

c. Untuk $H(x) = \ln(x) \quad H'(x) = \frac{1}{x} \quad H''(x) = -\frac{1}{x^2}$

E(ln(x)) $= \ln\mu + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{\mu^2}\right)\sigma^2$

$= \ln\mu - \frac{\sigma^2}{2\mu^2}$

$$\text{var}(\ln(x)) = [H'(\mu)]^2\sigma^2 = \left(\frac{1}{\mu}\right)^2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

$$\text{var}(e^x) = [H'(\mu)]^2\sigma^2$$
$$= (e^\mu)^2 = e^{2\mu}\sigma^2$$

$$\text{var}\left(\frac{1}{x}\right) = [H'(\mu)]^2\sigma^2 = \left(-\frac{1}{\mu^2}\right)^2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^4}$$

$$\text{var}\left(\frac{1}{x}\right) = [H'(\mu)]^2\sigma^2 = \left(-\frac{1}{\mu^2}\right)^2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^4}$$

106. Perhatikan X adalah variabel random dengan mgf $M_x(t) = \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{3t}$

a. Tentukan bagaimana distribusi dari x?

b. P(X=2)

Jawab:

a. $M_x(t) = \sum_{x \le x} e^{xt} f(x)$

$$= \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{5}{8}e^{3t}$$

$$= e^t f(x) + e^{2t} f(x) + e^{3t} f(x)$$

untuk

$x = 1 \rightarrow f(x) = \frac{1}{8}$

$x = 2 \rightarrow f(x) = \frac{1}{4}$

$x = 3 \rightarrow f(x) = \frac{5}{8}$

atau

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2+x}{4-x} ; x = 1,2,3 \\ 0 \; ; x \text{ lainnya} \end{cases}$$

b. P[X=2] = f(2) = $\frac{2+2}{4-2} = \frac{1}{4}$ untuk x=2 (pada tabel)

107. Jika X mempunyai FMGF, $G_x(t)$ maka $G_x^{'}(t) = E(x)$

Bukti:

$$G_t(t) = E(t^x) = E(e^{x \ln t}) = M_x(\ln t)$$

$$G_x^{'}(t) = \frac{1}{t} M_{(x)}^{'}(\ln t)$$

$$\Leftrightarrow G_x^{'}(1) = \frac{1}{1} M_{(x)}^{'} \ln(1) = M_{(x)}^{'}(0) = E(x) = \mu$$

$$G_x^{''}(1) = E[x(x-1)]$$

$$G_x^{''}(t) = \frac{1}{t^2} M_{(x)}^{''}(\ln t) - \frac{1}{t^2} M_{(x)}^{'}(\ln t)$$

$$G_x^{''}(1) = \frac{1}{1^2} M_{(x)}^{''}(\ln 1) - \frac{1}{1^2} M_{(x)}^{'}(\ln 1)$$

$$G_x^{''}(1) = 1M_{(x)}^{''}(0) - 1M_{(x)}^{'}(0) = M_{(x)}^{''}(0) - M_{(x)}^{'}(0)$$

$$= E(x^2) - E(x) = E[x(x-1)] \text{ terbukti}$$

$$G_x^{r}(t) = \frac{1}{t^r} M_{(x)}^{r}(\ln t) - \frac{1}{t^{r+1}} M_{(x)}^{r-1}(\ln t) + \frac{1}{t^{r+1}} M_{(x)}^{r-2}(\ln t) + \dots + 1$$

$$G_x^{r}(t) = E(x^r) - E(x^{r-1}) + E(x^{r-2}) - E(x^{r-3}) + \dots = x(x^{r!})$$

$$G_x^{r}(1) = E[x(x-1)\dots(x-r+1)](Q.E.D)$$

108. Asumsikan X adalah variabel random kontinu dengan pdf

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-2} & -2 < x < \infty \\ 0 & \text{x lainnya} \end{cases}$$

a. Tentukan MGF dari X

b. Gunakan MGF untuk menentukan $E(X)$ dan $F(X^2)$

Jawab :

a. $M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-2}^{\infty} e^{tx} e^{-2-x} dx$

$$= \int_{-2}^{\infty} e^{tx-x-2} dx = \int_{-2}^{\infty} e^{-x(1-t)-2} dx$$

$$M_x(t) = [\frac{1}{-(1-t)} e^{-x(1-t)-2}]_{-2}^{\infty}$$

$$= [\frac{1}{t-1} e^{-x(1-t)-2}]_{-2}^{\infty}$$

$$= 0 - \frac{1}{t-1} e^{-x(1-t)-2}$$

$$= \frac{1}{1-t} e^{-2t}$$

b. $M_x(t) = \frac{e^{-2t}}{1-t}$

$$E(x) = M_x^{'}(t) = M_x^{'}(0)$$

$$M_x^{''}(t) = \frac{-2e^{-2t}(1-t) + e^{-2t}}{(1-t)^2}$$

$$E(x) = M_x^{'}(0) = \frac{-2+1}{1} = -1$$

c. $M_x^{''}(0) = E(x^2)$

$$M_x^{''}(t) = \frac{(4e^{-2t}(1-t) + 2e^{-2t} - 2e^{-2t})(1-t)^2 + 2(1-t)[(-2e^{-2t})(1-t) + e^{-2t}]}{(1-t)^4}$$

$$M_x^{''}(0) = E(x^2) = \frac{4+2-2+2(-2+1)}{1} = 2$$

109. Gunakan FMGF pada contoh 2.5.3 untuk menentukan $E[x(x-1)(x-2)]$ dan $E(x^2)$ pada 2.5.3 $G_x(t) = \frac{1}{2-t}; t < 2$

$$G_x^r(t) = r!(2-t)^{-r-1}$$

$$E(x) = G_x^1(1) = 1!(2-1)^{-1-1} = 1$$

$$E[x(x-1)] = G_x^2(1) = 2!(2-1)^{-2-1} = 2$$

$$E[x(x-1)] = E(x^2) - E(x)$$

$$2 = E(x^2) - 1$$

$$E(x^2) = 3$$

$$E[x(x-1)(x-2)] = G_x^{'''}(1) = 3!(2-1)^{-3-1} = 6$$

$$6 = E[x^3 - 3x^2 + 2x]$$
$$6 = E[x^3] - 3E[x^2] + 2E[x]$$
$$6 = E[x^3] - 3[3] + 2[1]$$
$$E[x^3] = 13$$

110. Perhatikan kembali soal 98, diketahui persamaan C buah dengan harga \$10/buah $(0 \le C \le 4)$, banyak terjual katakan S kurang dari C atau x

a. Tulis y (fungsi keuntungan) sebagai fungsi linier S

b. Tentukan *E(y)* untuk suatu nilai dari C dan tunjukan solusi C sebagai keuntungan maksimum.

Jawaban:

a. $y = 35S - 10C$

Keuntungan = penjualan – modal

$y = 35S - 10C$

S	C	0	1	2	3	4
$F(S)$	$F(C)$	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

b. $E(y) = E(35S - 10C) = 35E(S) - 10E(S)$

C=1→E(y)=35(0,3)1-10(1)=10,5-10=0,5

C=2→E(y) =35(0,3)1+35(0,3)2-10(2) = 11,5

C=3→E(y) =35(0,3)1+35(0,3)2+35(0,3)3-10(3)

=10,5+21+21-30=26,5

C=4→E(y)=35(0,3)1+35(0,3)2+35(0,3)3+35(0,3)4-10(4)

=10,5+21+21+14-40=26,5

$10C =$ modal keuntungan $= \frac{E(y)}{modal} x100\%$

$$k_1 = \frac{0,5}{10(1)} x100\% = 5\%$$

$$k_2 = \frac{11,5}{10(2)} x100\% = 57,5\%$$

$$k_3 = \frac{22,5}{10(3)} x100\% = 75\% \text{ (maksimum)}$$

$$k_4 = \frac{26,5}{10(4)} x100\% = 66,25\%$$

Jadi dengan nilai harapan yang diperoleh nilai keuntungan maka c = 3 (sebab didapat keuntungannya 75%)

Distribusi Peluang Bersama

111. Lima kartu diambil tanpa pengembalian dari kotak yang berisi 52 kartu, x = banyaknya As, y = banyaknya raja, z = banyaknya ratu. Tentukan peluang dari

a. A : [x = 2]

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{\frac{4!}{2!\,2!}\;\frac{48!}{45!\,3!}}{\frac{52!}{47!\,5!}} = \frac{103776}{2598960}$$

$$= 0{,}0399 \approx 0{,}04$$

b. B : [y = 2]

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{\frac{4!}{2!\,2!}\;\frac{48!}{45!\,3!}}{\frac{52!}{47!\,5!}} = \frac{103776}{2598960} = 0{,}0399$$

c. $P(A \cap B) = \dfrac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}} = \dfrac{1584}{2598960} = 0{,}000609$

d. $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0{,}0399 + 0{,}0399 - 0{,}000609$$
$$= 0{,}079$$

e. P(A diberikan B) $= P(A|B)$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0{,}000609}{0{,}0399}$$

$$= 0{,}01526$$

f. $P[X = x] = \dfrac{\dbinom{4}{x}\dbinom{48}{5-x}}{\dbinom{52}{5}}$, x = 1, 2, 3, 4

g. $P[X < 2] = \dfrac{\dbinom{4}{0}\dbinom{48}{5}+\dbinom{4}{1}\dbinom{48}{4}}{\dbinom{52}{5}}$

$= \dfrac{1712304 + 778320}{2598960}$

= 0,9583

h. P[X > 2] = 1 – P(X <2)

= 1 – 0,9583

= 0,0417

i. $P[x=2, y=2, z=1] = \dfrac{\dbinom{4}{2}\dbinom{4}{2}\dbinom{4}{1}\dbinom{4}{0}}{\dbinom{52}{5}}$

$= \dfrac{144}{2598960}$

= 0,000055406

j. Tuliskan fungsi kepadatan peluang bersama x, y, z

$f(x,y,x) = \dfrac{\dbinom{4}{x}\dbinom{4}{y}\dbinom{4}{z}\dbinom{40}{5-x-y-z}}{\dbinom{52}{5}}$

112. Kerjakan kembali soal sebelumnya dengan ketentuan kartu diambil dengan pengemblian.

a. P(A) = $\binom{5}{2}\left(\frac{4}{52}\right)^2\left(\frac{48}{52}\right)^3 = 10\left(\frac{1}{13}\right)^2\left(\frac{12}{13}\right)^3$ = 0,0465

b. P(B) = P(A) = 0,0465

c. $P(A \cap B) = \frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{4}{52}\right)^2\left(\frac{4}{52}\right)^2\left(\frac{42}{52}\right)^1$

$= 30\left(\frac{1}{13}\right)^2\left(\frac{1}{13}\right)^2\left(\frac{21}{26}\right)^1$ = 0,0008

d. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

= 0,0465 + 0,0465 – 0,0008 = 0,0922

e. P(A diberikan B) = P(A|B) = $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ = $\frac{0,0008}{0,0465}$

= 0,0191

f. P[X = x] = $\binom{4}{x}\left(\frac{4}{52}\right)^x\left(\frac{48}{52}\right)^{5-x}$, x = 0, 1, 2, 3, 4, 5

g. P[X < 2] = $\binom{5}{0}\left(\frac{4}{52}\right)^0\left(\frac{48}{52}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{4}{52}\right)^1\left(\frac{48}{52}\right)^4$

= 0,949

h. P[X > 2] = 1 – P(X <2)

= 1 – 0,949

= 0,051

i. P[x=2, y=2, z=1] = $\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{4}{52}\right)^2\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{42}{52}\right)^1$

= 0,011029

113. Sebuah dadu biasa (bersisi 6) dilempar 12 kali, x_1 = banyaknya titik satu yang muncul, x_2 = banyaknya titik 2 dan seterusnya. Tentukan:

a. [$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 4, x_6 = 2$] : P(A)

P(1) = P(2) = P(3) = ... = P(6) = $\frac{1}{6}$

$$P(A) = \frac{12!}{2!3!1!0!4!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

= 0,000382

b. [$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6$] : P(B)

$$P(B) = P[x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6] = \frac{12!}{2!2!2!2!2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^{12}$$

c. [$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$] : P(C)

$$P(C) = \frac{12!}{1!2!3!4!}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\left(\frac{2}{6}\right)^2 = 0,00153$$

d. Tuliskan

$$f(x_1,x_3,x_5) = \frac{12!}{x_1!x_3!x_5!}\left(\frac{1}{6}\right)^{x_1+x_3+x_5}\left(\frac{1}{6}\right)^{12-x_1-x_3-x_5}$$

114. Jika x_1 dan x_2 variabel random diskrit dengan fungsi kepadatan peluang bersama $f(x_1,x_2) = C(x_1+x_2)$, $x_1 = 0, 1, 2$, $x_2 = 0, 1, 2$

Tentukan harga C

$$\sum_{x_1=0}^{2} \sum_{x_2=0}^{2} C(X_1 + X_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x_2=0}^{2} C[(X_1 + 0) + (X_1 + 1) + (x_1 + 2)] = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x_2=0}^{2} C(3X_1 + 3) = 1$$

$$\Leftrightarrow C[(3+0)+(3+3)+(3+6)] = 1$$

$$\Leftrightarrow C \cdot 18 = 1$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{18}$$

115. Jika X dan Y variabel random diskrit dengan fungsi kepadatan peluang bersama

a. Tentukan harga C

b. Tentukan pdf marginal dari X dan Y

c. Apakah X dan Y independen? Mengapa?

Penyelesaian

a. $$\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{\infty} C \frac{2^{x+y}}{x!\,y!} = 1$$

$$\Leftrightarrow C \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{2^y}{y!} = 1$$

$\Leftrightarrow C \cdot e^2 \cdot e^2 = 1$

$\Leftrightarrow C \cdot e^4 = 1$

$\Leftrightarrow C = e^{-4}$

b. $f_X(x) = \sum_{y=0}^{\infty} f(x,y)$

$= \sum_{y=0}^{\infty} e^{-4} \frac{2^{x+y}}{x!\,y!} \quad = e^{-4} \frac{2^x}{x!} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^y}{y!}$

$= e^{-4} \frac{2^x}{x!} e^2 \quad = e^{-2} \frac{2^x}{x!}$

$f_Y(y) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x,y) \quad = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-4} \frac{2^{x+y}}{x!\,y!}$

$= e^{-4} \frac{2^y}{y!} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{2^x}{x!} \quad = e^{-4} \frac{2^y}{y!} e^2$

$= e^{-2} \frac{2^y}{y!}$

c. fungsi kepadatan peluang bersamanya

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-4} \dfrac{2^{x+y}}{x!\,y!} & x = 0,1,2,\cdots \\ & y = 0,1,2,\cdots \\ 0 & \text{x dan y lainnya} \end{cases}$$

akan ditunjukkan apakah $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

$f_X(x)f_Y(y) = e^{-2} \frac{2^x}{x!} e^{-2} \frac{2^y}{y!} = e^{-4} \frac{2^{x+y}}{x!\,y!} = f(x,y)$

karena $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ maka X dan Y saling independen

116. X_1 dan X_2 merupakan variabel random diskrit dengan pdf bersama seperti pada tabel

X_2 \ X_1	1	2	3	Σ
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{3}{12}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{45}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{474}{1680}$
Σ	$\frac{5}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{5}{15}$	1

a. Pdf marginal dari X_1

X_2	$f(x_2)$
1	$\frac{5}{36}$
2	$\frac{19}{36}$
3	$\frac{12}{36}$

Pdf marginal dari X_2

X_1	$f(x_1)$
1	$\frac{3}{12}$
2	$\frac{14}{45}$
3	$\frac{474}{1080}$

b. Independensi X_1 dan X_2.

$f(x_1,x_2) \neq h(x_1) \,.\, g(x_2)$,

ambil satu contoh $f(1,1) \neq h(1) \,.\, g(1)$ karena $\frac{1}{12} \neq \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{36}$

c. $P[X_1 \leq X_2] = f(1,1) + f(1,2) + f(1,3) + f(2,2) + f(2,3) + f(3,3)$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{9} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15}$$

$$= \frac{101}{180} + \frac{24}{180}$$

117. Anggap pdf bersama adalah daya tahan suatu benda yaitu:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{x dan y lainnya} \end{cases}$$

a. Tentukan marginal $f_1(x)$ dan $f_2(y)$

$$f_1(x) = \int_0^\infty e^{-(x+y)} dy$$

$$= e^{-(x+y)} \Big|_0^\infty$$

$$= e^{-x} \cdot e^{-y} \Big|_0^\infty$$

$$= -e^{-x}$$

b. Fungsi distribusi komuatif (CDF) bersama

$$F(x,y) = \int_0^y \int_0^x f(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

$$F(x,y) = \int_0^y \int_0^x e^{-(t_1+t_2)} dt_1 dt_2$$

$$= \int_0^x e^{-t_1} dt_1 \int_0^y e^{-t_2} dt_2$$

$$= \left(-e^{-t_1} \Big]_0^x \right) \cdot \left(-e^{-t_2} \right)_0^y$$

$$= (-e^{-x} + 1)(-e^{-y} + 1)$$

$$= (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$$