Mata Kuliah Fungsi Variabel Kompleks terdiri dari: BILANGAN KOMPLEKS; Bilangan Kompleks dan Operasi Hitung, Hukum Dasar/ Sifat Dasar, Nilai Mutlak,Topologi di Bidang Kompleks.

FUNGSI ANALITIK: Fungsi Variabel kompleks, Transformasi fungsi sederhana, Penyajian secara geometri, Limit Fungsi, Limit Fungsi Dua Variabel Riil, Limit Tak Hingga, Kekontinuan, Syarat C-R dalam Koordinat Kutub, Fungsi Analitik (reguler, holomorfik), Cara Milne Thompson.

FUNGSI ELEMENTER: Fungsi Eksponensial, Fungsi Logaritma, Fungsi Trigonometri, Nilai nol sinus dan cosinus, Fungsi Hiperbolik, Pangkat Kompleks.

INTEGRAL KOMPLEKS: Fungsi Kompleks dari Variabel Real : Lintasan, Integral Garis,Integral Lintasan Kompleks, Anti Derivatif Fungsi Analitik, Rumus Integral Cauchy, Ketaksamaan Cauchy.

DERET PANGKAT: Barisan dan Deret Bilangan Kompleks, Deret Taylor dan Maclaurin, Deret Laurent.

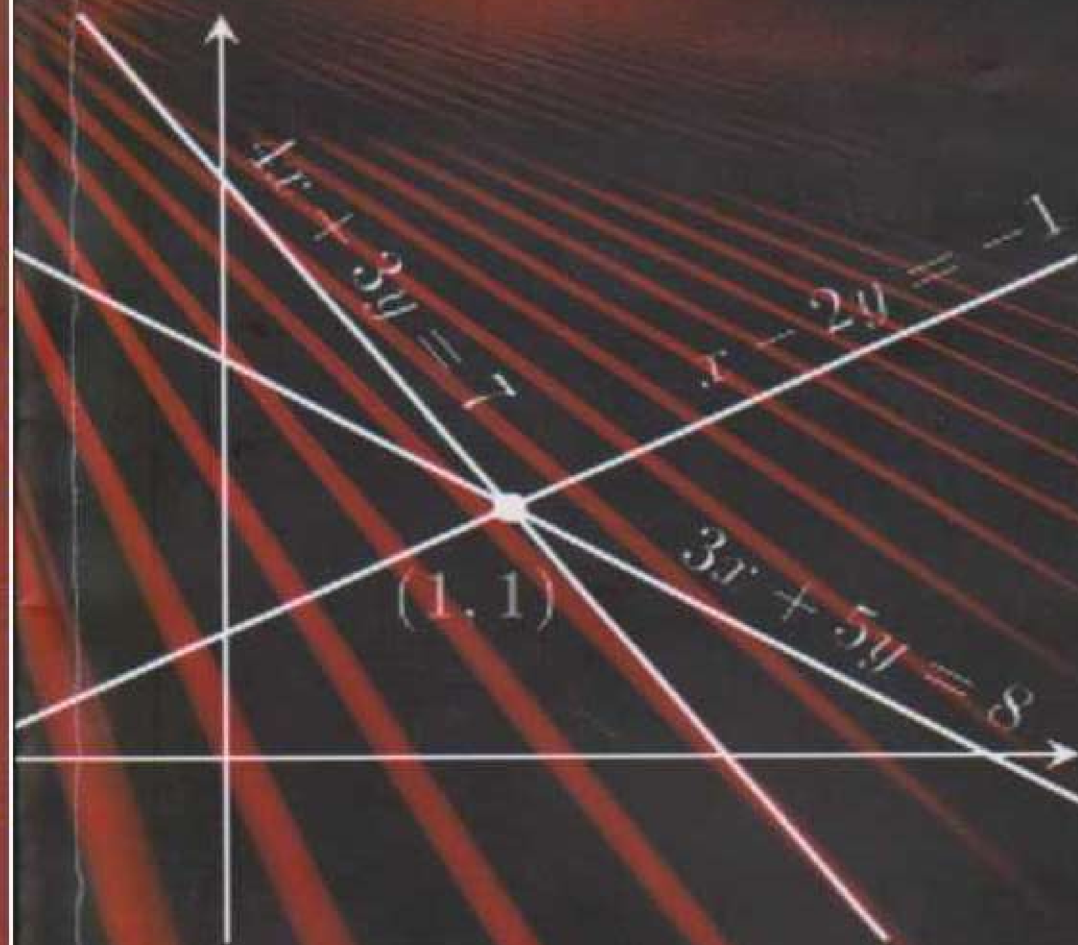
Mujahid PRESS
www.mujahidpress.com

ISBN 978-979-762-791-1
9 789797 627911

Hidayah Ansori

Fungsi Variabel Kompleks

FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS



HIDAYAH ANSORI

Fungsi Variabel Kompleks

Hidayah Ansori

Mujahid PRESS

Fungsi Variabel Kompleks

Penulis
Hidayah Ansori

ISBN
978-979-762-791-1

Setting Layout
Mujahid Grafis

Desain Cover
Mujahid Grafis

Penerbit
Mujahid Press
Jl. Tambakan No. 06 Bojongkunci Pameungpeuk
Bandung 40376
Telp/Fax (022) 5943620 SMS. 081 2205 6466
e-mail: admin@mujahidpress.com
URL: //www.mujahidpress.com

Anggota IKAPI Jabar No. 144/JBA/04

Cetakan I: 2018

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puji dan syukur kehadirat Allah SWT, atas nikmat dan karunia-Nya, akhirnya penyusun dapat menyelesaikan buku yang berjudul Fungsi Variabel Kompleks.

Penyusun memohon saran-saran untuk perbaikan buku ini pada penerbitan berikutnya sehingga akan lebih sempurna, hasil penyusunan buku ini merupakan usaha maksimal dari penyusun.

Akhirnya penyusun mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berperan serta dalam penyusunan buku ini, semoga Allah SWT senantiasa meridhai segala usaha kita, aamiin

Banjarmasin, Desember 2018

Penyusun,

Hidayah Ansori

DAFTAR ISI

BAB I

BILANGAN KOMPLEKS

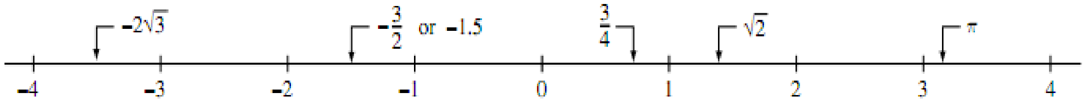
Tujuan Umum

Setelah mempelajari topik ini, Anda dapat mengaplikasikan konsep dasar bilangan kompleks, sifat-sifat dan penerapan pada pemecahan masalah.

Tujuan khusus:

- Mampu menyelesaikan masalah penjumlahan dan pengurangan bilangan kompleks, secara aljabar, grafik, perkalian dan pembagian bilangan kompleks
- Mampu mengubah bentuk bilangan kompleks bentuk baku ke dalam bentuk kutub dan dan eksponensial
- Mampu menyelesaikan masalah nilai mutlak pada bilangan kompleks
- Mampu menentukan akar bilangan kompleks
- Mampu menerapkan rumus Moivre untuk menyelesaikan masalah bilangan kompleks berpangkat
- Mampu menerapkan bilangan kompleks dalam menyelesaikan masalah.
- Mampu menggunakan konsep topologi pada bilangan kopleks.

Pertama kali bilangan diperlukan untuk menyatakan banyaknya elemen suatu himpunan tidak kosong, yaitu bilangan asli. Himpunan bilangan asli diperluas dengan bilangan nol menjadi bilangan cacah dan bilangan cacah diperluas dengan bilangan bulat negatif sehingga terbentuk bilangan bulat. Hasil bagi dua bilangan bulat diperlukan bilangan rasional. Jadi bilangan rasional merupakan perluasan dari bilangan bulat. Tetapi bilangan rasional tidak dapat menyelesaikan persamaan $x^2 = 2$, karena dapat dibuktikan tidak ada bilanan rasioanal yang kuadratnya sama dengan 2. Bilangan semacam ini yang tidak dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dua bilangan bulat dinamakan bilangan irrasional. Bilangan-bilangan rasional dan irrasional dinamakan bilangan real. Himpunan bilangan riil dilambangkan dengan $\Re$. Di dalam bilangan riil terdapat operasi hitung yang menghubungkan dua bilangan real dan relasi urutan yang juga merupakan operasi yang berlaku pada bilangan riil, sehingga $\Re$ membentuk suatu sistem yang dinamakan sistem bilangan riil.



Gambar 1: Garis Bilangan Riil

Bilangan riil dapat direpresentasikan dengan titik pada pada garis yang disebut poros riil (*real axis*). Titik yang berkorespondensi dengan nol disebut panggal (*origin*).

1.1 Bilangan Kompleks dan Operasi Hitung

Definisi

Bilangan kompleks z adalah bilangan yang berbentuk

$$z = x + iy \text{ atau } z = x + yi$$

dengan x dan y bilangan real dan i satuan imaginer dengan $i^2 = -1$.

x disebut sebagai bagian nyata (riil) dan y disebut sebagai bagian khayal/imaginer dari z

x = Re(z) dan y = Im(z)

1.2 Operasi Hitung pada Bilangan Kompleks

Definisi

Bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ *dan* $z_2 = x_2 + iy_2$ *dikatakan sama dan ditulis* $z_1 = z_2$ *jika dan hanya jika* $x_1 = x_2$ *dan* $y_1 = y_2$

Bilangan kompleks dikatakan sama jika dan hanya jika bagian riil dan imajiner sama.

Definisi*Untuk bilangan kompleks* $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ jumlah dan hasilkali mereka berturut-turut didefinisikan

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Invers terhadap Penjumlahan dan Perkalian

Untuk setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ terdapat satu bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ sehingga $z + z_1 = 0$ yakni $z_1 = -x + i(-y)$

z_1 merupakan negatif dari z dan dinyatakan –z. Jadi untuk sembarang bilangan kompleks z berlaku z + (-z) = 0

Jika $z \neq 0$ maka terdapat tepat satu bilangan kompleks z_2 sehingga $z \cdot z_2 = 1$,yaitu $z_2 = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$ dan dinamakan kebalikan atau resiprok dari z yang merupakan invers terhadap perkalian dari z, dengan syarat $x^2 + y^2$ tidak sama dengan nol dan ditulis $\frac{1}{z}$

Konjugat

Untuk setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ maka bilangan kompleks $\bar{z} = x - iy$ dinamakan konjugat bilangan z.

1.3 Hukum Dasar/ Sifat Dasar

Berikut ini adalah bentuk operasi dengan bilangan kompleks, kita dapat memproses seperti aljabar bilangan riil, menggantikan i^2 dengan -1.

1. Hukum komutatif

   $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

   $z_1 z_2 = z_2 z_1$

2. Hukum Asosiatif

   $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

   $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

3. Hukum Distributif

   $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

4. Operasi konjugat

   $\bar{\bar{z}} = z$ $\quad\quad$ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\quad\quad$ $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad z\,\bar{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$\sqrt[n]{z} = \xi$ atau $\xi^n = z$ notasi akar kompleks $z^{1/n}$ tidak dalam $\sqrt[n]{z}$ untuk mengungkapkan bahwa akar pangkat n dari z tidak tunggal.

Dalam sistem bilangan kompleks tidak ada relasi urutan yaitu “lebih kecil” dan “lebih besar”.

Diambil $i \in \mathbb{C}$ dan $0 \in \mathbb{C}$, $i \neq 0$

Misal: $i > 0 \Rightarrow (i)^2 > (0)^2$

$-1 > 0$ kontradiksi

$i < 0 \Rightarrow (i)^4 < (0)^4$

$1 < 0$ kontradiksi

1.4 Nilai Mutlak

Definisi

Nilai Mutlak atau modulus bilangan kompleks $z = x + iy$ yang dinyatakan dengan $|z|$ adalah bilangan real nonnegatif $\sqrt{x^2 + y^2}$

Teorema (Sifat-sifat nilai mutlak)

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0$ jika dan hanya jika z = 0

3. $\left|-z\right| = \left|z\right|$, $\left|\bar{z}\right| = \left|z\right|$

4. $\mathrm{Re}(z) \le \left|\mathrm{Re}(z)\right| \le \left|z\right|$, $\mathrm{Im}(z) \le \left|\mathrm{Im}(z)\right| \le \left|z\right|$

5. $z \cdot \bar{z} \le \left|z^2\right|$

6. $\left|z_1 z_2\right| = \left|z_1\right| \left|z_2\right|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$

Ketaksamaan Segitiga

Teorema

Nilai mutlak jumlah dua bilangan kompleks tidak lebih dari jumlah nilai mutlak masing-masing suku, dan tidak kurang dari selisih nilai mutlak masing-masing suku.

$\left|z_1 + z_2\right| \le \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$ dan $\left|z_1 + z_2\right| \ge \left|\left|z_1\right| - \left|z_2\right|\right|$

Teorema ini dinakaman ketaksamaan segitiga.

Bukti

$$\left|z_1 + z_2\right|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_2}$$

$$= \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}$$

$$= \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \quad \text{ingat Re(z)} \le |z|$$

$$\le \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + 2\left|z_1\overline{z_2}\right|$$

$$= \left|z_1\right|^2 + \left|z_2\right|^2 + 2\left|z_1\right| \left|\overline{z_2}\right|$$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2|$

$= (|z_1| + |z_2|)^2$

Jadi $|z_1 + z_2|^2 \le (|z_1| + |z_2|)^2$

Contoh

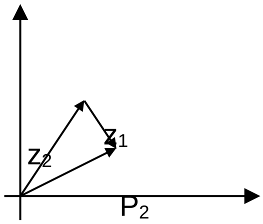
Tentukan Re(z) dan Im(z) jika $z = \frac{1+2i}{3-4i}$ kemudian tentukan nilai z dan $|z|$.

$$\frac{1+2i}{3-4i} = \frac{1+2i}{3-4i}\,\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(3-8)+i(4+6)}{3^2+4^2} = \frac{-1}{5} + \frac{2}{5}i$$

1.5 Penyajian Geometri

Bilangan kompleks dapat disajikan pada bidang kompleks dan dengan vektor.

P_2: $z_2 - z_1$

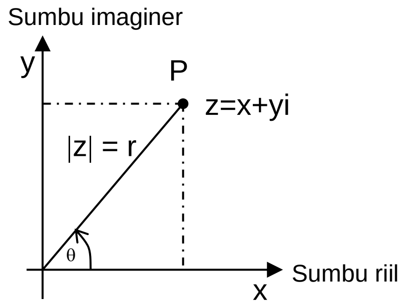


Arti geometri nilai mutlak

Jika $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ maka $z_1 - z_2$ = $(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$.

Menurut definisi nilai mutlak atau modulus bilangan $z_1 - z_2$ adalah $|z_1 - z_2|$ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Secara geometris nilai ini menyatakan jarak dari titik $P_1(x_1,y_1)$ ke titik $P_2(x_2,y_2)$ yakni panjang vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$. Demikian juga jika P(x,y) titik wakil dari z = x + iy, maka $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. sama dengan panjang vektor $\overrightarrow{OP}$, yaitu vektor yang menyajikan bilangan z. Jadi *nilai mutlak suatu bilangan kompleks sama dengan panjang vektor yang menyajikan bilangan kompleks tersebut*.

Bentuk Kutub



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r^2 = x^2 + y^2$,

$\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$, $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$,

Dengan demikian $z = x + iy$ dapat ditulis sebagai

$$r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\ cis\ \varphi$$

Sudut antara OP dan sumbu X yang diukur dalam radian dinamakan *argumen* bilangan kompleks z ditulis "arg(z)",

$\arg(z) = \theta + 2k\pi$ (k = 0, ±1, ±2, …)

Argumen adalah sudut dari bilangan kompleks bila direpsentasikan dalam bentuk kutub.

Argumen utama dengan syarat $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \le \pi$

Contoh

$\operatorname{Arg}(1 - i) = -\dfrac{\pi}{4}$

$\operatorname{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$

z = r cis φ, r ≥ 0, $\varphi \in \Re$

r = $|z|$

φ = Arg(z)

Jika diberikan $z_1 = r_1 \text{ cis } \varphi_1$ dan $z_2 = r_2 \text{ cis } \varphi_2$,

Diperoleh

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \text{ cis } (\varphi_1 + \varphi_2)$,

  dengan

  $r_1 r_2 = |z_1 z_2|$

  $\varphi_1 + \varphi_2 = \arg(z_1 z_2)$

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \text{ cis } (\varphi_1 - \varphi_2)$,

  $\dfrac{r_1}{r_2} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

  $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2$

  sebarang $\arg(z_1 z_2)$ = suatu $\arg(z_1)$ + suatu $\arg(z_2)$

  sebarang $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ = suatu $\arg(z_1)$ – suatu $\arg(z_2)$

  contoh

  1) $(1 + i\sqrt{3})(1 - i)$

  2) $z_1 = -1 + i \quad \rightarrow \text{Arg}(z_1) = \dfrac{3\pi}{4}$

$$z_2 = i \qquad \rightarrow \mathrm{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$z_1 z_2 = -1 - i \rightarrow \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \frac{-3\pi}{4}$$

3) $$z_1 = -1 - i \quad \rightarrow \mathrm{Arg}(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}$$

$$z_2 = i \qquad \rightarrow \mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1-i}{i} = \frac{1-i}{-1} = -1+i \rightarrow \mathrm{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$$

Diketahui $\arg(z)$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

$$\arg(\bar{z}) \quad = -\arg(z)$$

$$\bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$$

1.6 Rumus Moivre

$$\mathrm{cis}\,\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$|\mathrm{cis}\,\varphi| = 1, \quad \varphi \in \Re$$

untuk $n \in \aleph$: $(\mathrm{cis}\,\varphi)^n = \underbrace{\mathrm{cis}\,\varphi \cdot \mathrm{cis}\,\varphi \cdots \mathrm{cis}\,\varphi}_{\text{nfaktor}} = \mathrm{cis}\,n\varphi$

untuk $n \in \aleph$: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$

contoh

$$(1+i)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7 \left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)^7$$

$$= 2^{7/2}\left(\cos\tfrac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4}\right)$$

$$= 8(1-i)$$

1.7 Akar Pangkat-n dari Bilangan Kompleks

Misalkan akar pangkat-n dari z adalah ξ sehingga $\xi^n = z$

Diberikan $z = r\ cis\,\varphi$, misalkan $\xi = \rho\ \text{cis}\,\theta$, akibatnya

$$\xi^n = z \Rightarrow \rho^n\ cis\,(n\theta) = r\ cis\,\varphi$$

$$\Leftrightarrow \rho^n\ (\cos n\theta + i\sin n\theta) = r\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

diperoleh $\rho^n = r \;\; \Lambda \;\; \text{n}\theta = \varphi + 2k\pi$

$$\therefore\ \rho = \sqrt[n]{r}\ \text{(real non negatif)}\ \Lambda\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

$$\xi = \rho\ cis\,\theta,\quad \rho = \sqrt[n]{r},\quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

k cukup diambil n bilangan bulat berurutan, misal k = 0, 1, 2, …, (n-1)

Ada n buah akar dari z ditulis $\xi = z^{1/n}$

Contoh $(-1)^{1/6}$

Ditulis -1 = $cis\ \pi$

Misalkan $\xi = (-1)^{1/6}$, dengan $\xi = \rho\, cis\, \theta$, berarti

$\rho = \sqrt[6]{1} = 1$ dan $\theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{6} = \dfrac{(2k+1)\pi}{6}$, diperoleh:

$$\xi_0 = cis\, \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\xi_1 = cis\, \frac{\pi}{2} = i$$

$$\xi_2 = cis\, \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$\xi_3 = cis\, \frac{7\pi}{6} = cis\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$\xi_4 = cis\, \frac{9\pi}{6} = cis\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

$$\xi_5 = cis\, \frac{11\pi}{6} = cis\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

1.8 Topologi di Bidang Kompleks

Diberikan semesta $\mathbb{C}$, titik p, $p \in \mathbb{C}$, himpunan E, $E \subset \mathbb{C}$.

Definisi

1. Kitar titik p dengan radius $\delta>0$.

   $N(p, \delta) = \{z : |z-p| < \delta\}$

2. p disebut titik limit himpinan E jika untuk

   $(\forall\delta>0)\ (\exists q \in E,\ q \neq p$ dan $q \in N(p,\delta))$

Contoh

F = {1, -1, i, -i}

   1 bukan titik limit F

i bukan titik limit F

a $\notin$ F $\Rightarrow$ a bukan titik limit F

p $\in$ F $\Rightarrow$ p bukan titik limit F

G = {z $|$ z = $\frac{1}{n}$, n $\in \aleph$}

($\frac{1}{2}$,10^{-6}) $\cap$ G = { $\frac{1}{2}$ }

3. p $\in$ E dan p bukan titik limit E, maka p disebut titik terasing dari E (*Isolated point*)
4. p titik interior E, jika $\exists\delta$>0 sehingga N(p,δ) $\subset$ E
5. E disebut terbuka, jika setiap anggota E adalah titik interior E.

   E = {z : $|z|$ < 1} semua anggota interior z maka E terbuka

   F dan G tidak terbuka.
6. E disebut tertutup jika memuat semua titik limitnya

   (E tertutup) $\Leftrightarrow$ (p titik limit E $\Rightarrow$ p $\in$ E)

Teorema

01 $E \in \mathbb{C}$, E' terbuka

02 *E* terbuka $\Leftrightarrow$ E^C = $\mathbb{C}$ – E tertutup

03 Himpunan berhingga adalah tertutup

04 ϕ terbuka dan tertutup

05 $\mathbb{C}$ terbuka dan tertutup

7. p titik pembatas himpunan E, jika

   untuk $\forall\delta > 0$, $N(p,\delta) \cap E \neq 0$ dan $N(p,\delta) \cap E^c \neq \phi$

8. Himpunan semua titik pembatas E disebut perbatasan E.
9. Daerah adalah suatu himpunan terbuka yang tidak kosong atau himpunan semacam ini digabung dengan sebagian atau seluruh titik-titik pembatsannya.
10. Himpunan terbuka E terhubung jika setiap dua titik anggota E dapat dihubungkan garis patah yang seluruhnya di dalam E.
11. Domain adalah himpunan terbuka yang terhubung.

Soal Latihan

1. Nyatakan dalam bentuk polar
   a. 1 + i
   b. -3 – 4i
   c. 3i, -3i
2. Tentukan argumen dari
   a. 1 – i
   b. $\pi - \pi i$
3. Nyatakan dalam bentuk z = x + iy
   a. $\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
   b. $\sqrt{18}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
4. Tentukan semua nilai akar berikut
   a. $(-1)^{1/3}$
   b. $1^{1/6}$
5. Tunjukkan bahwa $z = 1 \pm 3i$ memenuhi persamaan $z^2 - 2z + 10 = 0$

6. Tentukan Re(z), Im(z), $|z|$ dan $\bar{z}$ untuk

a. $z = \dfrac{2-5i}{3+4i} + \dfrac{3-14i}{25i}$

b. $z = \dfrac{12-15i}{(1+i)(1+2i)(1+3i)}$

7. Tulislah bilangan kompleks berikut ke bentuk a + ib

a. $(1+i)^7$

b. $\dfrac{(1-i)^3}{1+i}$

8. Tentukan bagian real dan bagian imajiner dari

i^n dan i^{-n} untuk n bilangan bulat positif

9. Jika $|z|$ = 3 buktikan bahwa $\left|\dfrac{1}{z^2+1}\right| \le \dfrac{1}{8}$

10. Jika $|z_2| \neq |z_3|$ buktikan bahwa $\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \le \frac{|z_1|}{|z_2|-|z_3|}$

11. Buktikan rumus $|z_1 z_2 z_3 \dots z_n| = |z_1||z_2||z_3| \dots |z_n|$ dengan induksi matematik

12. Tulislah bilangan kompleks berikut dalam bentuk r (cos θ+ i sin θ)

a. 1, i, -1, -i

b. 1 + i, $(1 + i)^7$, $1 - i\sqrt{3}$, $-1 + i\sqrt{3}$

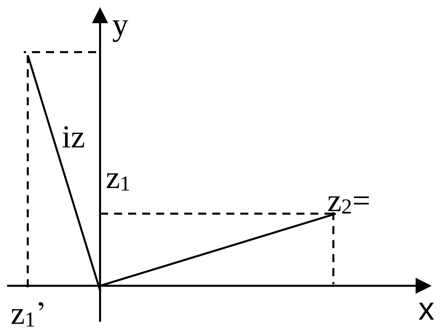
13. Dengan menggunakan bentuk kutub untuk masing – masing faktornya nyatakan bilangan komplek beri-kut ke dalam bentuk a + ib

a. $(1 - i)^8$

b. $\frac{(1-\mathrm{i})^3}{1+\mathrm{i}}$

c. $\frac{(1+i\sqrt{3})^3(\sqrt{3}+i)^6}{(1+i)^2}$

14. Di bidang kompleks diberikan titik A yang menyatakan bilang z. Tentukan secara geometris titik P yang menyatakan w jika



a. w = iz,

b. w = -iz,

c. w = $\bar{z}$

d. w = iz + 1 + i

15. Lukislah titik P untuk w = $\frac{1}{z}$. Jika diberikan titik A yang menyajikan sembarang bilangan z untuk:

a. 0 ≤ z ≤ 1

b. z = 1

16. Berikan alasan mengapa rumus

$$\left||z_1|-|z_2|\right| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

disebut ketaksamaan segitiga

17. Jika a dan b akar-akar pangkat tiga yang tidak riil dari 1, buktikan bahwa b = a^2.

18. Tentukan semua akar pangkat 6 dari -1 dan gambarkan akar-akar itu dibidang kompleks.

19. Jika w sembarang akar pangkat n dari 1 dan w ≠ 1

buktikan bahwa 1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} = 0

20. Dengan menggunakan teorema Moivre buktikan bahwa untuk a = $\frac{\pi}{7}$ diperoleh cos a – cos 2a + cos 3a = ½

21. Dengan menggunakan rumus $1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, z \neq 1$ untuk $0<\theta<2\pi$ turunkan rumus

    $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$

    $\sin\theta + \sin 2\theta + ... + \sin n\theta = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$

22. Buktikan bahwa titik z di bidang kompleks yang memenuhi persamaan |z-1+i| = 2 terletak pada lingkaran

    $x^2+y^2-2x + 2y - 2 = 0$. Jadi |z-1+i| = 2 menyajikan persamaan suatu lingkaran.

23. Tafsirkan secara geometris bahwa persamaan |z+3| + |z-3| = 10 di bidang kompleks menyajikan persamaan suatu ellips. Tentukan bilangan kompleks yang dinyatakan oleh puncak dan fokus ellips ini.

24. Irisan kerucut apakah yang disajikan oleh persamaan ||z-5| - |z + 5|| = 6? Tentukan bilangan kompleks yang menyatakan puncak dan fokus irisan kerucut ini.

25. Buktikan bahwa titik-titik z yang memenuhi persamaan |z – 2i| = 2|z - 3| terletak pada suatu lingkaran

26. Sketlah titik demi titik kurva yang disajikan oleh persamaan

    a. $|z^2 - z| = 1$

    b. $|z^2 - 3z + 4| = 16$

27. Jika a + ib dengan a dan b riil adalah suatu akar persamaan dengan koefisien-koefisien riil $c_0z^n + c_1z^{n-1} + ... + c_{n-1}z + c_n = 0$ maka a – ib juga akar persamaan

ini. Buktikan teorema ini. Jadi akar-akar yang tidak riil suatu persamaan derajat tinggi dengan koefisien riil sepasang-sepasang saling konjugat.

28. Jika diberikan bilangan kompleks z_1 dan z_2, tentukan konstata kompleks c dan r > 0 sehingga bilangan kompleks z berlaku $|z - z_1| = 2\,|z - z_2|$ jika dan hanya jika $|z - c| = r$.

1.9 Soal dan Penyelesaian

1. Nyatakan dalam bentuk polar

   a. 1 + i

   Untuk z = 1 + i, diperoleh r = $\sqrt{2}$ dan arg z = $\frac{\pi}{4}+2k\pi$, sehingga

   $$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}+2k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{4}+2k\pi)\right)$$

   b. 3i, -3i

   Untuk z = 3i dan z = -3i, diperoleh r = 3 dan arg z = $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, sehingga

   $$3i = 3\left(\cos(\frac{\pi}{2}+2k\pi)+i\sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\right)$$ dan

   $$-3i = 3\left(\cos(\frac{\pi}{2}+2k\pi)-i\sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\right)$$

2. Tentukan argumen dari

   a. 1 – i

Arg (1 – i) = $arc\tan\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}$

b. π – πi

Arg (π – πi) = $arc\tan\frac{-\pi}{\pi} = -\frac{\pi}{4}$

3. Nyatakan dalam bentuk z = x + iy

a. $\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

x = $\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$ = 2

y = $\sqrt{8}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{8}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$ = 2

jadi $\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ = 2 + 2i

b. $\sqrt{18}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

x = $\sqrt{18}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{18}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$ = -3

y = $\sqrt{18}\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{18}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}$ = 3

jadi $\sqrt{18}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ = -3 + 3i

4. Tentukan semua nilai akar berikut

a. $(-1)^{1/3}$

Ditulis -1 = $cis\ \pi$

Misalkan ξ = $(-1)^{1/3}$, dengan ξ = $\rho\ cis\ \theta$, berarti

$\rho = \sqrt[3]{1} = 1$ dan $\theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{3} = \dfrac{(2k+1)\pi}{3}$, diperoleh:

$\xi_0 = cis\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\xi_1 = cis\ \pi = -1 + i \cdot 0 = -1$

$\xi_2 = cis\ \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $1^{1/6}$

Ditulis 1 = $cis\ 0$

Misalkan ξ = $(1)^{1/6}$, dengan ξ = $\rho\ cis\ \theta$, berarti

$\rho = \sqrt[6]{1} = 1$ dan $\theta = \dfrac{0 + 2k\pi}{6} = \dfrac{k\pi}{3}$, diperoleh:

$\xi_0 = cis\ 0 = 1$

$\xi_1 = cis\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\xi_2 = cis\ \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\xi_3 = cis\ \pi = -1$

$\xi_4 = cis\ \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\xi_5 = cis\ \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5. Tunjukkan bahwa $z = 1 \pm 3i$ memenuhi persamaan $z^2 - 2z + 10 = 0$

Penyelesaian:

$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, dengan a = 1, b = -2 dan c = 10

$z_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(10)}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2}$

$= \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$

6. Tentukan Re(z), Im(z), $|z|$ dan $\bar{z}$ untuk

a. $z = \frac{2-5i}{3+4i} + \frac{3-14i}{25i}$

b. $z = \frac{12-15i}{(1+i)(1+2i)(1+3i)}$

Penyelesaian

a. $z = \frac{2-5i}{3+4i}\frac{3-4i}{3-4i} + \frac{3-14i}{25i}\frac{-i}{-i} = \frac{-28-26i}{25}$

Re(z) = $\frac{-28}{25}$, Im(z) = $\frac{-26}{25}$,

$|z| = \sqrt{\left(\frac{-28}{25}\right)^2 + \left(\frac{-26}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{1460}{25^2}}$, $\bar{z} = \frac{-28+26i}{25}$

b. $z = \frac{12-5i}{(1+i)(1+2i)(1+3i)}$

$Z = \frac{12-5i}{(1+i)(1+2i)(1+3i)} = \frac{12-5i}{(-1+3i)(1+3i)} = -\frac{6}{5} + \frac{1}{2}i$

Re(z) = $\frac{-6}{5}$, Im(z) = $\frac{1}{2}$, $|z| = \sqrt{\left(\frac{-6}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{1}{4}} = \frac{13}{10}$ = 1,3 , $\bar{z} = -\frac{6}{5} - \frac{1}{2}i$

7. Tulislah bilangan kompleks berikut ke bentuk a + ib

a. $(1+i)^7$

Penyelesaian

$(1+i)^7 = 1(1)^7 + 7(1)^6 i + 21(1)^5(i)^2 + 35(1)^4(i)^3 + 35(1)^3(i)^4 + 21(1)^2(i)^5 + 7(1)(i)^6 + 1(i)^7$

$= 1+7i-21-35i+35+21i-7-i = 8-8i$

b. $\dfrac{(1-i)^3}{1+i}$

$\frac{(1-i)^3}{1+i} = \frac{1(1)^3-3i-3+i}{1+i} = \frac{-2-2i}{1+i} = -2$

8. Tentukan bagian real dan bagian imajiner dari

i^n dan i^{-n} untuk n bilangan bulat positif

a. $i^n = \begin{cases} 1, n = 4k \\ -1, n = 4k-2 \\ i, n = 4k-3 \\ -i, n4k-1 \end{cases}$, k = 1, 2, 3, ...,n

b. $i^{-n} = (-i^{-1})^n = \left(\frac{1}{i}\frac{i}{i}\right)^n = (-i)^n = (-1)^n(i)^n$

$\text{Re}(z) = \begin{cases} 1, n = 4k \\ -1, n = 4k-2 \\ 0, n = ganjil \end{cases}$ dan

$\text{Im}(z) = \begin{cases} 0, n = genap \\ 1, n = 4k-1 \\ -1, n = 4k-3 \end{cases}$

9. Buktikan hukum-hukum komutatif, asosiatif dan distributif operasi-operasi hitung dalam sistem bilangan kompleks pada 1.2

Komutatif Penjumlahan

$Z_1 + Z_2 = (x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$

$= (x_2 + x_1) + i\,(y_2 + y_1) = x_2 + x_1 + i\,y_2 + i\,y_1$

$= (x_2 + i\,y_2) + (x_1 + i\,y_1) = Z_2 + Z_1.$

Komutatif Perkalian

$Z_1 \,.\, Z_2 \quad = (x_1 + i\,y_1)\,(x_2 + i\,y_2)$

$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

$= x_2x_1 - y_2y_1 + i(x_2y_1 + y_2x_1)$

$= (x_2 + i\,y_2)\,(x_1 + i\,y_1) = Z_2 \,.\, Z_1$

Asosiatif Penjumlahan

$Z_1 + (Z_2 + Z_3) \quad = (x_1 + i\,y_1) + [(x_2 + i\,y_2) + (x_3 + i\,y_3)]$

$= (x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2) + (x_3 + i\,y_3)$

$= [(x_1 + i\,y_1) + (x_2 + i\,y_2)] + (x_3 + i\,y_3)$

$= (Z_1 + Z_2) + Z_3$

Distributif

$Z_1\,(Z_2 + Z_3) \quad = (x_1 + i\,y_1)\,[(x_2 + i\,y_2) + (x_3 + i\,y_3)]$

$= (x_1 + i\,y_1)\,[(x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)]$

$= [(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)] + [(x_1 + iy_1)(x_3 + iy_3)]$

$= (Z_1\,Z_2) + (Z_1\,Z_3)$

10. Buktikan hukum-hukum tentang operasi konjugat dalam 1.2.

Penyelesaian

- $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{x_1 + \imath y_1}} = \overline{x_1 - \imath y_1} = x_1 + iy_1 = z$
- $\overline{z_1} + \overline{z_2} \quad = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2)$

  $= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$= \overline{z_1 + z_2}$

- $\bar{z}_1 - \bar{z}_2 \quad = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2)$

  $= (x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2) \; = \overline{z_1 - z_2}$

- $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)$

  $= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 - y_1x_2) = \overline{z_1 \cdot z_2}$

- $\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{(x+iy)+(x-iy)}{2} = \frac{2x}{2}$ = x = Re(z)

- $\frac{z-\bar{z}}{2} = \frac{(x+iy)-(x-iy)}{2} = \frac{2y}{2}$ = y = Im(z)

11. Jika |z| = 3 buktikan bahwa $\left|\frac{1}{z^2+1}\right| \leq \frac{1}{8}$

    Penyelesaian

    $\left|\frac{1}{z^2+1}\right| = \frac{1}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{|z^2|-|1|} = \frac{1}{9-1} = \frac{1}{8}$, karena $\frac{1}{z}$ maka tanda $\leq$

    Jadi terbukti bahwa $\left|\frac{1}{z^2+1}\right| \leq \frac{1}{8}$

12. Jika $|z_2| \neq |z_3|$ buktikan bahwa $\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{|z_2|-|z_3|}$

    Penyelesaian

    $\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2+z_3|}$, karena $|z_2 + z_3| \geq |z_2| - |z_3|$

    $\frac{|z_1|}{|z_2+z_3|} \leq \frac{|z_1|}{|z_2|-|z_3|}$

13. Buktikan rumus $|z_1z_2z_3 \ldots z_n| = |z_1||z_2||z_3| \ldots |z_n|$ dengan induksi matematik

    Penyelesaian

    a. Ambil n = 2

       $|z_1z_2|^2 \quad = (z_1z_2)(\overline{z_1z_2}) = (z_1z_2)(\bar{z}_1\bar{z}_2) = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)$

       $= |z_1|^2|z_2|^2$

    b. Ambil n = k adalah benar diasumsikan

$|z_1 z_2 z_3 \ldots z_k| = |z_1||z_2||z_3| \ldots |z_k|$

c. Untuk n = k + 1

$|z_1 z_2 z_3 \ldots z_k . z_{k+1}| = |(z_1 z_2 z_3 \ldots z_k).(z_{k+1})|$

$= |z_1 z_2 \ldots z_k| . |z_{k+1}|$

$= |z_1||z_2| \ldots |z_k| . |z_{k+1}|$

14. Tulislah bilangan kompleks berikut dalam bentuk r (cos θ+ i sin θ)

Penyelesaian :

a. 1, i, -1, -i

- z =1, = 1 + i 0, sehingga x = 1 dan y = 0

r = $\sqrt{x^2 + y^2}$ =$\sqrt{1^2 + 0^2}$ = 1

arg(z) = arg(1+0i) = arc tan $\frac{y}{x}$ = arc tan $\frac{0}{1}$

= arc tan 0 = 0

z = 1 (cos 0 + i sin 0) = cos 0 + i sin 0 = cis 0

- z= i = 0 + i. 1, x = 0 dan y = 1

r= $\sqrt{x^2 + y^2}$ = $\sqrt{0^2 + 1^2}$ = 1

arg(z) = arg(i) = arc tan $\frac{y}{x}$ = arc tan $\frac{1}{0}$ = $\frac{\pi}{2}$

z = r (cos θ + i sin θ) = 1 (cos $\frac{\pi}{2}$+ I sin $\frac{\pi}{2}$)

= cos $\frac{\pi}{2}$ + i sin $\frac{\pi}{2}$ = cis $\frac{\pi}{2}$

- z = -1 = -1 + i.0, sehingg x = -1 dan y = 0

r= $\sqrt{x^2 + y^2}$ =$\sqrt{(-1)^2 + 0^2}$ = 1

arg(z) = arg(-1) = arc tan $\frac{y}{x}$ = arc tan $\frac{0}{-1}$ = π

z = r (cos θ + i sin θ) = 1 (cos π + I sin π)

= cos π + i sin π

- $z = -i = 0 + i.\ (-1)$, sehingga x = 0 dan y = -1

  r = $\sqrt{x^2+y^2}$ =$\sqrt{0^2+(-1)^2}$ = 1

  arg(z) = arg(-i) = arc tan $\frac{y}{x}$ = arc tan $\frac{-1}{0}$ = $\frac{3}{2}$π

  z = r (cos θ + i sin θ) = 1 (cos $\frac{3}{2}$π+ i sin$\frac{3}{2}$π)

  = cos $\frac{3}{2}$π + i sin $\frac{3}{2}$π = cis $\frac{3}{2}$π

b. 1 + i, (1 + i)^7, $1-i\sqrt{3}$, $-1+i\sqrt{3}$

1 + i = $\sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4}+i\ sin\ \frac{\pi}{4})$

(1+i)^7 = $\left(\sqrt{2}\right)^7(cos\frac{7\pi}{4}+i\ sin\ \frac{7\pi}{4})$

= $8\sqrt{2}(cos\frac{7\pi}{4}+i\ sin\ \frac{7\pi}{4})$

$1-i\sqrt{3}$ = $2(cos\frac{5\pi}{3}+i\ sin\ \frac{5\pi}{3})$

$-1+i\sqrt{3}$ = $2(cos\frac{4\pi}{3}+i\ sin\ \frac{4\pi}{3})$

15. Dengan menggunakan bentuk kutub untuk masing – masing faktornya nyatakan bilangan komplek beri-kut ke dalam bentuk a + ib

a. (1 – i)^8

Penyelesaian

(1 – i)^8 = $\left(\sqrt{2}\right)^8\left[\cos\left(8\cdot\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(8\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\right]$

= $16(\cos 14\pi + i\sin 14\pi\ )$ = 16

b. $\frac{(1-i)^3}{1+i}$ = $\frac{(\sqrt{2})^3[\cos(3\cdot\frac{7\pi}{4})+i\sin\left(3\cdot\frac{7\pi}{4}\right)]}{\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin(\frac{7\pi}{4})}$

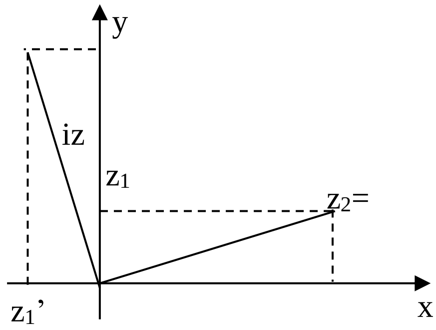
= 2 (cos 5π+ i sin 5π) = -2

c. $\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^3(\sqrt{3}+i)^6}{(1+i)^2}$ = $\frac{2^3\left(\cos 3\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)2^6\left(\cos 6\cdot\frac{\pi}{6}+i\sin 3\cdot\frac{\pi}{6}\right)}{2\left(\cos 2\cdot\frac{\pi}{4}+i\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}\right)}$

$= 256\left(\cos(\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + i\sin\pi + \pi - \frac{\pi}{2}\right)$

$= 256\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ = -256i

16. Di bidang kompleks diberikan titik A yang menyatakan bilang z. Tentukan secara geometris titik P yang menyatakan w jika



a. w = iz, z_1 = i dan z_2 = z

Gunakan Z = r $e^{i\theta}$

w = iz = $e^{\frac{\pi i}{2}} \cdot r \cdot e^{i\theta} = r \cdot e^{(\theta + \frac{\pi}{2})i}$

b. w = -iz, z_1 = -i, z_2 = z

w = -iz =$e^{-\frac{\pi i}{2} + i\theta} = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$

c. w = $\bar{z}$

w = $\bar{z}$ = $e^{i\theta}$?

d. w = iz + 1 + i, z_1 = i dan z_2 = z, z_3 = 1 + i,

w = $z_1 \cdot z_2 + z_3$

17. Lukislah titik P untuk w = $\frac{1}{z}$. Jika diberikan titik A yang menyajikan sembarang bilangan z untuk:

a. 0 ≤ z ≤ 1

b. z = 1

18. Berikan alasan mengapa rumus

$\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

disebut ketaksamaan segitiga

19. Jika a dan b akar-akar pangkat tiga yang tidak riil dari 1, buktikan bahwa b = a^2.

Misalkan w = 1 cis 0,

$1^{1/3} = z_k = 1\left(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\right)$,

untuk k = 0, 1, 2

Ketiga akar pangkat 3 dari 1 adalah:

z_0 = cis 0 = 1

$z_1 = cis\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{1}{2}\,\sqrt{3}$

$z_2 = cis\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{1}{2}\,\sqrt{3}$

misalkan $a = z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$b = z_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$a^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}$

20. Tentukan semua akar pangkat 6 dari -1 dan gambarkan akar-akar itu dibidang kompleks.

Penyelesaian :

Misalkan w = 1 cis π,

$-1^{1/6} = z_k = 1\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)$, untuk k = 0, 1, 2, 3, 4, 5

Ketiga akar pangkat 6 dari -1 adalah:

$z_0 = cis\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + i\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$

$z_1 = cis\,\frac{\pi}{2} = 0 + i.1 = i$

$z_2 = cis\,\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + i\,\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$

z$_3$ = $cis\,\frac{7\pi}{6}$ = $-\frac{1}{2}\sqrt{3}\ - i\,\frac{1}{2}$ = $-\frac{1}{2}\sqrt{3}\ -\ \frac{1}{2}i$

z$_4$ = $cis\,\frac{7\pi}{6}$ = $0 - i.1$ = $-i$

z$_5$ = $cis\,\frac{11\pi}{6}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{3}\ - i\,\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{3}\ -\ \frac{1}{2}i$

21. Seperti soal nomor 20, untuk akar pangkat 3 dari 1 dan dari -1

    a. Akar pangkat 3 dari 1 seperti no 19

    b. Akar pangkat 3 dari -1

    Misalkan w = 1 cis π,

    $(-1)^{1/3}$ = z_k = 1 cis $\frac{\pi+2k\pi}{3}$, untuk k = 0, 1, 2

    Ketiga akar pangkat 6 dari -1 adalah:

    z$_0$ = $cis\,\frac{\pi}{3}$ = $\frac{1}{2}\ + i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}$ = $\frac{1}{2}\ +\ \frac{1}{2}i\sqrt{3}$

    z$_1$ = $cis\,\pi$ = $-1 + i.0$ = -1

    z$_2$ = $cis\,\frac{5\pi}{3}$ = $\frac{1}{2}\ - i\,\frac{1}{2}\sqrt{3}$

22. Jika w sembarang akar pangkat n dari 1 dan w ≠ 1

    buktikan bahwa 1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} = 0

    Penyelesaian

    dari w merupakan akar pangkat n dari 1, sehingga diperoleh bahwa w^n = 1 dan

    w^{n+1} = w^n . w = w

    sehingga 1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} + w^n = $\frac{1-w^{n+1}}{1-w}$ = $\frac{1-w}{1-w}$ = 1,

    ⇔ 1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} + 1 = 1

    Jadi 1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} = 0

23. Gunakan teorema Moivre buktikan bahwa untuk a = $\frac{\pi}{7}$ diperoleh cos a – cos 2a + cos 3a = ½

Penyelesaian

cis a – cis 2a + cis 3a $= \frac{\text{cis a}\,(1-(-\text{cis a})^3)}{1-(-\text{cis a})} = \frac{\text{cis a}+(\text{cis a})^4}{1+\text{cis a}}$

$= \frac{\text{cis a}+\text{cis 4a}}{1+\text{cis a}} \cdot \frac{1+\cos a - i \sin a}{1+\cos a - i\sin a}$

$= \frac{\cos a + i\sin a + \cos 4a + i\sin 4a}{1+\cos a + i\sin a} \cdot \frac{1+\cos a - i\sin a}{1+\cos a - i\sin a}$

=

$\frac{\cos a+\cos^2 a - i\cos a\sin a + i\sin a + i\sin a\cos a + \sin^2 a + \cos 4a + \cos a\cos 4a - i\sin a\cos 4a + i\sin 4a + i\cos a\sin 4a + \sin a\,\text{c}}{1+\cos a - i\sin a + \cos a + \cos^2 a - i\sin a\cos a + i\sin a + i\sin a\cos a + \sin^2 a}$

=

$\frac{\cos a+\cos^2 a - i\cos a\sin a + i\sin a + i\sin a\cos a + \sin^2 a + \cos 4a + \cos a\cos 4a - i\sin a\cos 4a + i\sin 4a + i\cos a\sin 4a + \sin a\,\text{c}}{2(1+\cos a)}$

cos a – cos 2a + cos 3a = Re(ruas kanan)

$= \frac{\cos a + \cos^2 a + \sin^2 a + \cos 4a + \cos a\cos 4a + \sin a\sin 4a}{2(1+\cos a)}$

$= \frac{1+\cos a + \cos 4a + \cos 3a}{2(1+\cos a)}$

$= \frac{1}{2} + \frac{\cos 4a + \cos 3a}{2(1+\cos a)}$

$= \frac{1}{2} + \frac{2\cos\frac{7a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2(1+\cos a)}$

$= \frac{1}{2} + \frac{2\cdot 0\cdot\cos\frac{a}{2}}{2(1+\cos a)}$

$= \frac{1}{2}$

24. Dengan menggunakan rumus $1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}, z \neq 1$ untuk $0<\theta<2\pi$

turunkan rumus

$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$

$\sin\theta + \sin 2\theta + ... + \sin n\theta = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$

Penyelesaian

$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1-(\text{cis}\ \theta)^{n+1}}{1-\text{cis}\ \theta}$

$= \frac{1-(\text{cis}\ \theta)^{n+1}}{1-\text{cis}\ \theta} \cdot \frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$

$= \frac{[(1-\cos(n+1)\theta)- i\sin(n+1)\theta]\cdot[(1-\cos\theta)+i\ \sin\theta]}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}$

$= \frac{(1-\cos(n+1)\theta)(1-\cos\theta) + \sin(n+1)\theta\sin\theta+i[(1-\cos\theta)\sin\theta-(1-\cos\theta)(\sin(n+1)\theta}{1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

$= \frac{(1-\cos(n+1)\theta)(1-\cos\theta) + \sin(n+1)\theta\sin\theta+i[(1-\cos\theta)\sin\theta-(1-\cos\theta)(\sin(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)}$

$= \frac{1-\cos\theta-\cos(n+1)\theta+\cos\theta\cos(n+1)\theta+\sin(n+1)\theta\sin\theta+i(\sin\theta-\sin\theta\cos\theta-\sin(n+1)\theta+\cos\theta\sin(n+1)\theta}{2(2\ \sin^2\frac{1}{2}\theta)}$

$1 + z + z^2 + ... + z^n \ = \frac{(1-\cos\theta)-\cos(n+1)\theta+\cos\ n\theta+i(\sin\theta-\sin(n+1)\theta-\sin(n+2)\theta)}{4\ \sin^2\frac{1}{2}\theta}$

$= \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\theta+\cos\ n\theta-\cos(n+1)\theta+i(\sin\theta-\sin(n+2)\theta-\sin(n+1)\theta)}{4\ \sin^2\frac{1}{2}\theta}$

$\text{Re}(1 + z + z^2 + ... + z^n) \quad = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\theta+\cos\ n\theta-\cos(n+1)\theta}{4\ \sin^2\frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\ \sin\frac{1}{2}\theta}$

$\text{Im}(1 + z + z^2 + ... + z^n) \quad = \frac{\sin\theta-\sin(n+2)\theta-\sin(n+1)\theta}{4\ \sin^2\frac{1}{2}\theta}$

$= \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\theta - \frac{\cos\ (n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$

25. Buktikan bahwa titik z di bidang kompleks yang memenuhi persamaan |z-1+i| = 2 terletak pada lingkaran

$x^2+y^2-2x + 2y - 2 = 0$. Jadi |z-1+i| = 2 menyajikan persamaan suatu lingkaran.

Penyelesaian

$|z-1+i| = 2 \Leftrightarrow |x + iy -1+i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 4$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

Terbukti bahwa $|z-1+i| = 2$ terletak pada lingkaran

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

$|z-1+i| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ menyajikan suatu persamaan lingkaran

26. Tafsirkan secara geometris bahwa persamaan $|z+3| + |z-3| = 10$ di bidang kompleks menyajikan persamaan suatu ellips. Tentukan bilangan kompleks yang dinyatakan oleh puncak dan fokus ellips ini.

    Penyelesaian

    $|z+3| + |z-3| = 10 \Leftrightarrow |x + 3 + iy| + |x - 3 + iy| = 10$

    $\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10$

    $\Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$

    $\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2} + x^2 - 6x + 9 + y^2$

    $\Leftrightarrow 12x - 100 = -20\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2}$

    $\Leftrightarrow 100 - 12x = 20\sqrt{x^2 - 6x + 9 + y^2}$

    $\Leftrightarrow 10000 - 2400x + 144x^2 = 400(x^2 - 6x + 9 + y^2)$

    $\Leftrightarrow 10000 - 3600 - 2400x + 2400x + 144x^2 - 400x^2 - 400y^2 = 0$

    $\Leftrightarrow -256x^2 - 400y^2 = -6400$

    $\Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

    Titik fokus ellips adalah $(\pm 3, 0)$ dan titik puncak adalah $(\pm 5,0)$, $(0,\pm 4)$

27. Irisan kerucut apakah yang disajikan oleh persamaan $||z-5| - |z + 5|| = 6$? Tentukan bilangan kompleks yang menyatakan puncak dan fokus irisan kerucut ini.

Penyelesaian

Jika |z-5| > |z + 5| = 6, maka |z-5| - |z + 5| = 6

|z-5| = 6 + |z + 5|

⇔ |x+iy-5| = 6 + |x + iy + 5|

⇔ $(x-5)^2 + y^2 = 36 + 12|x + 5 + iy| + (x+5)^2 + y^2$

⇔ -20 x – 36 = 12$\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$

⇔ 400 x^2 + 1440x + 36^2 = 144$(x^2 + 10x + 25 + y^2)$

⇔ 256 x^2 – 144y^2 = 3600 – 36^2.

⇔ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

28. Buktikan bahwa titik-titik z yang memenuhi persamaan |z – 2i| = 2|z - 3| terletak pada suatu lingkaran

Penyelesaian

|z – 2i| = 2|z - 3|

⇔ $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2}$

⇔ $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4(x^2 - 6x + 9 + y^2)$

⇔ $3x^2 + 3y^2 - 24x + 4y + 32 = 0$

⇔ $x^2 + y^2 - 8x + \frac{4}{3}y + \frac{32}{3} = 0$

⇔ $(x^2 - 8x + 16) + (y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = 5\frac{7}{9}$

⇔ $(x-4)^2 + (y + \frac{2}{3})^2 = \frac{52}{9}$

Jadi z yang meneuhi |z – 2i| = 2|z - 3| terletak pada lingkaran dengan pusat (4, $-\frac{2}{3}$) dengan radius $\frac{\sqrt{52}}{3}$

29. Sketlah titik demi titik kurva yang disajikan oleh persamaan

a. $|z^2 - z| = 1$

Penyelesaian (x+iy)(x+iy)

$|z^2 - z| = 1 \Leftrightarrow |x^2 + 2xyi - y^2 - x - iy| = 1$

$\Leftrightarrow |(x^2 + y^2 - x) + i(2xy - y)| = 1$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - x)^2 + (2xy - y)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^4 + x^2y^2 - x^3 + x^2y^2 + y^4 - xy^2 - x^3 - xy^2 - x^2 + 4x^2y^2 - 2xy^2 - 2xy^2 - y^2 = 1$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2y^2 - 2x^3 + x^2 - 2xy^2 + y^2 + y^4 = 1$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 2y^2 - 2x + 1) + y^2 (x^2 - 2x + y^2 + 1) = 1$

$\Leftrightarrow x^2[(x-1)^2 + y^2] + y^2 [(x-1)^2 + y^2] = 1$?

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)[(x-1)^2 + y^2] = 1$?

30. $\left|z^2 - 3z + 4\right| = 16$

Penyelesaian

$\left|z^2 - 3z + 4\right| = 16$

$\Leftrightarrow \left|x^2 + 2xyi - y^2 - 3x - 3yi + 4\right| = 16$

$\Leftrightarrow \left|x^2 - y^2 - 3x + 4 + 2xyi - 3yi\right| = 16$

31. Jika a + ib dengan a dan b riil adalah suatu akar persamaan dengan koefisien-koefisien riil $c_0z^n + c_1z^{n-1} + ... + c_{n-1}z + c_n = 0$ maka a – ib juga akar persamaan

ini. Buktikan teorema ini. Jadi akar-akar yang tidak riil suatu persamaan derajat tinggi dengan koefisien riil sepasang-sepasang saling konjugat.

Penyelesaian

Misalkan z = a + ib = r cis θ, r = $\sqrt{a^2 + b^2}$ dan θ = arg (a + ib) = arctan $(\frac{b}{a})$

z akar $c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n = 0$

maka $c_o + c_1$ r cis $\theta + c_2 r^2$ cis $2\theta + \ldots + c_n r^n$ cis $n\theta = 0$

$c_o + c_1 r \cos\theta + c_2 r^2 \cos 2\theta + \ldots + c_n r^n \cos n\theta + i\,(c_1 r \sin\theta + c_2 r^2 \sin 2\theta + \ldots + c_n r^n \sin n\theta) = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} c_k r^k \cos k\theta + i \sum_{k=1}^{n} c_k r^k \sin k\theta = 0$$

$\bar{z}$ = a + ib = $r\ cis\ (-\theta)$

$\therefore c_o + c_1$ r cis $(-\theta) + c_2 r^2$ cis $(-2\theta) + \ldots + c_n r^n$ cis $(-n\theta)$

$$\sum_{k=0}^{n} c_k r^k \cos k\theta - i \sum_{k=1}^{n} c_k r^k \sin k\theta = 0 - 0 = 0$$

$\therefore \bar{z}$ akar dari $c_o + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n = 0$

32. Jika diberikan bilangan kompleks z_1 dan z_2, tentukan konstata kompleks c dan r > 0 sehingga bilangan kompleks z berlaku $|z - z_1| = 2\,|z - z_2|$ jika dan hanya jika $|z - c| = r$.

Penyelesaian

Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, dan c = a + ib

$|z - z_1| = 2\,|z - z_2| \quad \Leftrightarrow |\ x-x_1 + i(y-y_1)\ | = 2|\ x-x_2 + i(y-y_2)|$

$\Leftrightarrow (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = 4[\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = 4(x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 2x(4x_2 - x_1) - 2y(4y_2 - y_1) + (-x_1^2 - y_1^2 + 4x_2^2 + 4y_2^2) = 0$

Pusat lingkaran $\left(\frac{4x_{2}-x_{1}}{3}, \frac{4y_{2}-y_{1}}{3}\right)$

R = $\sqrt{\left(\frac{4x_{2}-x_{1}}{3}\right)^{2}+\left(\frac{4y_{2}-y_{1}}{3}\right)^{2}-\left(\frac{4x_{2}^{2}+4y_{2}^{2}-x_{1}^{2}-y_{1}^{2}}{3}\right)}$

|z – c| = r merupakan persamaan lingkaran berpusat di c dengan jari-jari r

karena $|z - z_1| = 2|z - z_2|$

misalkan a =$\frac{4x_{2}-x_{1}}{3}$,   b = $\frac{4y_{2}-y_{1}}{3}$

c   = a + ib = $\frac{1}{3}(4x_2 - x_1 + i(4y_2 - y_1)) = \frac{1}{3}(4x_2 + 4iy_2 - (x_1 + iy_1))$

$= \frac{1}{3}(4z_2 - z_1)$

r = R   = $\sqrt{\left(\frac{4x_{2}-x_{1}}{3}\right)^{2}+\left(\frac{4y_{2}-y_{1}}{3}\right)^{2}-\left(\frac{4x_{2}^{2}+4y_{2}^{2}-x_{1}^{2}-y_{1}^{2}}{3}\right)}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{16x_2^2 - 8x_1x_2 + x_1^2 + 16y_2^2 - 8y_1y_2 + y_1^2 - 12x_2^2 - 12y_2^2 + 3x_1^2 + 3y_1^2}$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \frac{2}{3}|z_2 - z_1|$

BAB V
DERET PANGKAT

Tujuan Umum:

Mengidentifikasi deret dari fungsi variabel kompleks

Tujuan Khusus

Mengidentifikasi dan menentukan deret Laurent dengan tepat

Mengidentifikasi dan menentukan Deret Maclaurin dengan tepat

Mengidentifikasi dan menentukan Deret Taylor dengan tepat

Mengidentifikasi dan menentukan Konvergen suatu deret dengan tepat.

Deret pangkat adalah deret tak hingga yang berbentuk

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$ dengan a_n dan z_n konstanta kompleks (n = 0, 1, …).

Deret $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_o)^{-n}$ juga dipandang sebagai deret pangkat karena dapat ditulis menjadi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$ dengan $\zeta = \dfrac{1}{z - z_o}$.

Dalam pembahasan bilangan kompleks kita temui gabungan kedua jenis pangkat ini yang dapat ditulis

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_o)^n .$$

Untuk $z_o = 0$ deret di atas menjadi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}$ dan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n z^{-n}$, sedangkan perluasannya untuk $z_o \neq 0$ tinggal mengganti z dengan $z - z_o$.

5.1 Barisan dan Deret Bilangan Kompleks

Pembahasan deret dan bilangan kompleks dianggap sudah mengenal definisi konvergen maupun sifat-sifat yang sederhana tentang barisan dan deret bilangan real.

Barisan Bilangan Kompleks

Barisan bilangan kompleks adalah fungsi yang bernilai kompleks yang domainnya semua bilangan asli N = {1, 2, …}. Jadi f: N □ C adalah suatu barisan, nilai f(n) yang sering dinyatakan dengan z_n, dinamakan suku atau elemen barisan ini. Barisan bilangan kompleks z_1, z_2, …, z_n, … akan kita tulis <z_n>.

Barisan <z_n> dikatakan konvergen, jika terdapat N □ C dengan sifat bahwa untuk setiap □>0 yang diberikan N □ N, sehingga untuk semua n □ N dan n□N berlaku □z-z_n□< □. Bilangan kompleks ini dinamakan limit barisan <z_n> untuk n □□□, dan ditulis $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, dikatakan pula <$z_n$> konvergen ke z dan ditulis z_n □□z,

Teorema

Jika $z_n = x_n + iy_n$ dengan x_n □□□ dan y_n □□□, maka <z_n> konvergen di dalam C jika dan hanya jika <x_n> dan <y_n>konvergen di dalam C.

Teorema

Jika <z_n> dan <w_n> berturut-turut konvergen ke z dan w, dan c suatu konstanta maka

(a)<z_n+w_n> konvergen dan lim (z_n+w_n) = lim z_n+ lim w_n = z + w

(b)<cz_n > konvergen dan lim (cz_n) = c lim z_n = c z

(c) $<z_n\ w_n>$ konvergen dan lim ($z_n\ w_n$) = lim z_n lim w_n = z w

(d) $<1/z_n>$ konvergen dan lim ($1/z_n$) = 1/z asal z □ 0 dan z_n □ 0 untuk $\forall n \in \aleph$

Akibat

$<z_n - w_n>$ dan $<z_n / w_n>$ konvergen dengan $z_n - w_n$ □ z - w dan z_n / w_n □ z / w.

Deret Bilangan kompleks

Teorema

Diberikan deret bilangan kompleks $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dengan $z_n = x_n + i\, y_n$ di mana x_n dan y_n bilangan real, maka berlakulah sifat-sifat berikut

a. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen.

b. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen maka $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$

c. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen maka suku-sukunya terbatas. Artinya terdapat M>0 sehingga $|z_n| \leq M$ untuk semua n □□.

d. Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergen maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen. Jadi jika $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen absolut maka $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergen.

5.2 Deret Taylor dan Maclaurin

Teorema

Diberikan fungsi f analitik di dalam daerah cakram terbuka D = {z : □z-z_o□< r_o} yang berpusat di z_o dan berjari-jari r_o. Maka untuk □z□D, F(z) dapat dinyatakan ke dalam deret pangkat

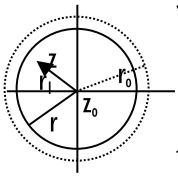
$$f(z) = f(z_o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!}(z - z_o)^n \qquad \left(|z - z_o| < r_o\right) \tag{1}$$

Jadi deret di ruas kanan konvergen ke f(z) untuk □z□D.

Deret di ruas kanan (1) disebut *deret Taylor* untuk f(z) yakni suatu deret pangkat dalam $(z-z_o)$ pada kitar $N(z_o,r_o)$. Juga dikatakan bahwa f(z) diekspansikan ke dalam deret Taylor dalam kitar itu.

Bukti

Misalkan z sebarang titik di dalam cakram D dan $|z-z_o| < r_1$, jadi $r_1 < r_o$. Maka dapat dibuat lingkaran C dengan pusat z_o dan radius r berarah positif di mana $r_1 < r < r_o$.



Jadi f analitik di dalam dan pada C dan z di dalam C. Menurut rumus integral Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

Rumus jumlah deret geometri hingga $1 + p + p^2 + \ldots + p^{N-1} = \dfrac{1-p^N}{1-p}$. Jadi kita mempunyai rumus

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^{N-1} + \frac{p^N}{1-p} = \frac{1}{1-p}. \tag{2}$$

Dengan mengambil $p = \dfrac{z-z_o}{\zeta-z_o}$ dan menggunakan (2) dalam bentuk

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_o) - (z - z_o)} = \frac{1}{\zeta - z_o}\,\frac{1}{1 - \frac{z-z_o}{\zeta - z_o}},$$

diperoleh

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_o} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(z - z_o)^k}{(\zeta - z_o)^{k+1}} + \frac{(z - z_o)^N}{(\zeta - z)(\zeta - z_o)^N} \qquad (3)$$

Jika kedua ruas dari (3) dikalikan $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ lalu dintegralkan di sekeliling C, dan digunakan rumus integral untuk nilai fungsi f dan derivatif-derivatifnya di titik z di dalam C, maka diperoleh

$$f(z) = f(z_o) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!}(z - z_o)^k + P_N(z) \qquad (4)$$

$$\text{dengan } P_N(z) = \frac{(z - z_o)^N}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_o)}\, d\zeta \qquad (5)$$

Catatan

1. Jika $z_o = 0$, jadi f(z) analitik pada D = {z: □z□ < r}, maka

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad (□z□ < r) \qquad (6)$$

dan deret ini di namakan deret Maclaurin dari fungsi f.

2. Deret Taylor di ruas kanan (1) akan konveregen ke f(z) selama z di dalam cakram D = {z: □z-z_o□ < r}, di mana f analitik. Jadi untuk f bagaimanapun besarnya selama f analitik di dalam D, tidak perlu diadakan uji kekonvergenan, dijamin deret Taylor konvergen ke f(z). jadi

$$f(z) = f(z_o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!}(z - z_o)^n \qquad (□z-z_o□ <□)$$

3. Lingkaran C_o berpusat di z_o dengan radius paling besar R sehingga deret Taylor konvergen untuk semua z di dalam C_o dinamakan *lingkaran kekonvergenan* deret itu, dan R disebut *radius kekonvergenan*. Jadi jika f fungsi utuh maka R = □. Jika f bukan fungsi utuh, maka R sama dengan jarak dari z_o.

4. Jika f analitik di z_o maka terdapat r > 0 sehingga f analitik pada kitar $|z-z_o| < r$. Jadi jika f analitik di z_o maka terdapat suatu kitar dari z_o sehingga untuk setiap z dalam kitar ini, f(z) dapat dinyatakan dalam deret Taylor dalam pangkat $(z-z_o)$.

Fungsi eksponensial $f(z) = e^z$ adalah fungsi utuh, analitik di seluruh C, jadi radius kekonvergenan deret Maclaurin-nya adalah ∞. Untuk setiap $n \in N$ berlaku $f^{(n)}(z) = e^z$, jadi $f^{(n)}(0) = 1$. Dengan demikian $f(z) = e^z = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Diperoleh rumus

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad (|z| < \infty) \qquad (7)$$

Fungsi f(z) = sin z juga analitik di seluruh C, jadi R = ∞. Derivatif $f^{(4k)}(z) = \sin z$, $f^{(4k+1)}(z) = \cos z$, $f^{(4k+2)}(z) = -\sin z$ dan $f^{(4k+3)}(z) = -\cos z$. Jadi $f^{(n)}(0) = 1$ untuk n = 4k + 1 dan $f^{(n)}(0) = -1$ untuk n = 4k + 3 dan $f^{(n)}(0) = 0$ untuk n yang lain. Jadi

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^n & \text{untuk } k = 2n+1 \\ 0 & \text{untuk } k = 2n \end{cases}$$

Dengan demikian diperoleh rumus ekspansi Maclaurin untuk sin z,

$$\text{Sin } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \quad (|z| < \infty) \qquad (8)$$

Selanjutnya dengan cara yang sama diturunkan rumus berikut.

$$\text{Cos } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots \quad (|z| < \infty) \qquad (9)$$

$$\text{Sinh } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots \quad (|z| < \infty) \qquad (10)$$

$$\text{Cosh } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \quad (|z| < \infty) \qquad (11)$$

Akan dibahas ekspansi deret Maclaurin untuk f(z) = $\frac{1}{1-z}$. Satu-satunya titik singular fungsi f adalah z = 1, jarak dari titik 0 ke titik singular (yang terdekat) adalah 1, Jadi R = 1. Fungsi f(z) = $\frac{1}{1-z}$ analitik untuk □z□ < 1, dan $f^{(k)}(z)$ = $k!(1-z)^{k+1}$ sehingga $f^{(k)}(0)$ = k!. Jadi f(z) = f(0) + $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)(0)}{k!} z^k$ dan diperoleh rumus

$$\frac{1}{1-z} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \qquad (□z□ < 1) \quad (12)$$

Dengan mengganti z dengan –z diperoleh

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots \qquad (□z□ < 1) \qquad (13)$$

Teorema (Ketunggalan Ekspansi Taylor)

Jika deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$ konvergen ke fungsi f(z) untuk semua z di dalam lingkaran C_o, □z-z_o□ = r_o, maka deret ini adalah ekspansi Taylor dari f(z) ke dalam deret pangkat dalam (z-z_o).

Contoh 1

Ditanyakan ekspansi Taylor dalam pangkat (z–3) untuk e^z. Kita tulis $e^z = e^3 e^{z-3} = e^3$ $e^{□}$ dengan □ = z-3 menurut rumus (7) $e^{□}$ = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!}$ untuk $|\zeta| < \infty$. Jadi e^{z-3} = $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Z-3)^n}{n!}$ untuk $|z-3| < \infty$. Jadi deret yang terakhir ini konvergen untuk □z□C ke e^{z-3} menurut teorema ketunggalan di atas deret ini adalah ekspansi Taylor dari e^{z-3}.

Dengan demikian e^z = $e^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n!}$ yang berlaku untuk $|z-3| < \infty$ atau untuk semua z di bidang kompleks.

Contoh 2

Ekspansikan cos z^2 ke dalam deret Maclaurin.

Rumus (9) mengatakan bahwa cos □ = 1 - □^{2}/2! + □^{4}/4! - . . . untuk □□□ < □. Jadi deret ini konvergen ke cos □ untuk □□□C. Kalau □ diganti dengan z^2 maka diperoleh

Cos $z^2 = 1 - z^4/2! + z^8/4! - \ldots = \sum \frac{(-1)^n z^{4n}}{(2n)!}$ (□z□ < □).

Ini berarti bahwa deret pangkat dalam z di ruas kanan konvergen ke cos z^2 untuk semua $z \in C$, menurut teorema di atas ia adalah ekspansi Maclaurin untuk cos z^2.

Contoh 3

Nyatakan f(z) = $\frac{1}{(z-2)(z-3)}$ ke dalam deret Maclaurin dan tentukan domain di mana ekspansi Maclaurin itu berlaku.

Fungsi f(z) analitik kecuali di 2 dan 3. Titik singular dari f yang terdekat ke z = 0 adalah 2. Jadi ekspansi Maclaurin ini mempunyai lingkaran kekonvergenan dengan radius R = 2. Jadi ekspansi kita nanti meliputi domain □z□ < 2. Dalam domain ini kita tulis

$$f(z) = \tfrac{1}{z-3} - \tfrac{1}{z-2} \qquad (□z□ < 2)$$

dalam domain □z□ < 2 maka berlaku □z/2□ < 1 dan □z/3□ < 1.

Dengan menggunakan rumus (12) dan teorema ketunggalan diperoleh:

$\frac{1}{z-3} = \frac{-1}{3(1-z/3)} = \frac{-1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{3})^n$ dan $\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2(1-z/2)} = \frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n$. Jadi f(z) = $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$ = $\frac{1}{6} + \frac{5z}{36} + \frac{19z^2}{216} + \ldots$ ($|z| < 2$), yakni ekspansi Maclaurin yang diminta dengan domain $|z| < 2$.

Contoh 4

Tentukan deret Taylor untuk f(z) = $\frac{1}{z-1}$ dalam suatu kitar titik 3.

Fungsi f(z) analitik kecuali di z=1. Radius kekonvergenan dalam pangkat (z-3) adalah R=2 Untuk $|z-3| < 2$ kita tulis f(z) = $\frac{1}{z-1}$ = $\frac{1}{(z-3)+2}$ = $\frac{1}{2}\frac{1}{1+(z-3)/2}$. Karena dalam domain ini $|z-3| < 1$ maka menurut (13) dan ketunggalan ekspansi Taylor

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(z-3)^n \qquad (|z-3| < 2)$$

Latihan

1. Buktikan cos z = $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n}$ untuk $(|z| < \infty)$

   sinh z = $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ untuk $(|z| < \infty)$

2. Buktikan z^2 cosh z^3 = $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{6n+2}}{(2n)!}$ untuk $(|z| < \infty)$

   e^z = $\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!}$ untuk $(|z| < \infty)$

3. Buktikan (a) $\frac{z}{1+z^2}$ = $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}$

(b) $\dfrac{z}{1-z^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n$ untuk $(|z-2|<1)$

4. Turunkan deret Taylor dalam pangkat (z+2) untuk f(z) = $\dfrac{z}{1-z^2}$ dan tentukan domain di mana ekspansi ini berlaku
5. Turunkan deret Maclaurin untuk cabang utama fungsi ln(z+1) dalam kitar $(|z+1|<1)$

5.3 Deret Laurent

Teorema Laurent

Jika f analitik di dalam domain D = $\{z : r_2 < |z - z_o| < r_1\}$ dan z titik sebarang di dalam domain ini, maka

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_o)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_o)^n} \qquad (1)$$

dengan
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{n+1}}\, d\zeta \qquad (n = 0, 1, \ldots) \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_o)^{-n+1}}\, d\zeta \qquad (n = 1, 2 \ldots) \qquad (3)$$

dan C sebarang lintasan tertutup tunggal di dalam domain tersebut yang mengelilingi z_o dan berarah positif.

Seperti halnya ekspansi Taylor, kita juga mempunyai teorema ketunggalan untuk ekspansi Laurent

Teorema

Jika deret $\sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_o)^n$ konvergen ke fungsi f(z) untuk z di dalam D = {z : r_2 < □z-z_o□<r_1} maka deret itu adalah deret Laurent untuk fungsi f pada D.

Contoh

Tentukan ekspansi Laurent fungsi f(z) = $\frac{1}{z(z-1)}$

a) pada kitar titik singular terasing z = 0,

b) pada kitar titik singular terasing z = 1

Fungsi f(z) mempunyai titik singular terasing z = 0 dan z = 1.

a) f(z) analitik pada cakram terbuka tanpa pusat D = {z:0 < □z□<1}. Untuk z□D maka f(z) = $\frac{1}{z}\frac{-1}{1-z}$. Karena □z□<1 maka $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Jadi untuk 0 < □z□<1 berlaku f(z) = $-\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1}$ = $-\frac{1}{z} - z - z^2 - \dots$ dan menurut teorema ketunggalan maka haruslah ekspansi Laurent f(z) untuk 0 < □z□<1.

b) f(z) analitik pada cakram terbuka tanpa pusat D = {z:0 < □z-1□<1}. Untuk z□D maka f(z) = $\frac{1}{z-1}\frac{-1}{1+(z-1)}$ = $\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^n$ sehingga f(z) = $\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^{n-1}$ = $\frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + \dots$ untuk 0 < □z-1□<1.

Contoh

Untuk f(z) = $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ tentukan

a) deret Laurent untuk □z□<1,

b) deret Laurent untuk 1<□z□<2,

c) deret Laurent untuk 2<□z□<□.

Fungsi f(z) dipisahkan menjadi f(z) = $\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

a. untuk $|z|$<1, maka $\left|\frac{x}{2}\right| < \frac{1}{2} < 1$ sehingga $\frac{1}{z-2}$ = $\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}$ = $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ dan

$-\frac{1}{z-1}$ = $\frac{1}{1-z}$ = $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Jadi f(z) = $\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$ = $\frac{1}{2}+\frac{3z}{4}+\frac{7z}{8}+\ldots$ ($|z|$<1)

b. untuk 1<$|z|$<2 maka $|1/z|$<1, jadi $\frac{1}{z-2}$ = $\frac{-1}{2(1-z/2)}$ = $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$ dan $\frac{1}{z-1}$ = $\frac{1}{2}\frac{1}{1-1/z}$ =

$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$ (1<$|z|$<2)

c. $|z|$>2, maka $|1/z|$ < $|2/z|$ < 1, jadi

$$f(z) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{1-2/z} - \tfrac{1}{1-1/z}\right) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$$

Latihan

1) Buktikan deret Laurent fungsi $\frac{e^{z^2}}{z}$ untuk 0 < $|z|$ < ∞ adalah

$$2)\quad \frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(n+2)!}$$

3) Buktikan ekspansi Laurent untuk $z^4 \sinh\frac{1}{z}$ adalah $z^3+\frac{z}{3!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)!\,z^{2n-1}}$

4) Tentukan deret Laurent f(z) = $\frac{1}{1-z^2}$ untuk 1 < $|z|$ < ∞.

5) Tentukan ekspansi Laurent untuk f(z) = $\frac{1}{z^2(1-z^2)}$

6) Diberikan fungsi f(z) = $\frac{z}{(z-1)(z-2)}$. Tentukan

a) deret Maclaurin untuk $|z|$ < 1

b) deret Laurent dalam pangkat z untuk $1 < |z| < 2$,

c) deret Laurent dalam pangkat z untuk $2 < |z| < \infty$.

Latihan

1). Buktikan cos z = $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n}$ untuk $(|z| < \infty)$

sinh z = $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \pi i)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ untuk $(|z| < \infty)$

a. cos z = $sin(\frac{\pi}{2} - z) = -sin(z - \frac{\pi}{2}) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z - \frac{\pi}{2})^{2n+1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (z - \tfrac{\pi}{2})^{2n+1}$$

b. sin z = -i sin iz

= -i sin (π + iz)

= i sin i(z - πi)

$$= i\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (i(z - \pi i))^{2n+1}\right)$$

$$= i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} i^{2n+1}(z - \pi i)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} i^{2n+2}(z - \pi i)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (-1)^n(-1)(z - \pi i)^{2n+1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{(2n+1)!}\,(z-\pi i)^{2n+1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\pi i)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2). Buktikan $z^2 \cosh z^3 = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{6n+2}}{(2n)!}$ untuk $(|z| < \infty)$

$e^z = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!}$ untuk $(|z| < \infty)$

a. $\xi = z^3$, $\cosh \xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^{2n}}{(2n)!}$ untuk $|\xi| < \infty$

$z^2 \cosh z^3 = z^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^3)^{2n}}{(2n)!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{6n+2}}{(2n)!}$ untuk $(|z| < \infty)$

b. $e^z = \frac{1}{e}e^{z+1}$

untuk $|\xi| < \infty$ berakibat $e^{\xi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi)^n}{n!}$

untuk $\xi = z + 1$,

$e^z = \frac{1}{e}e^{z+1} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!}$ untuk $|z| < \infty$

3). Buktikan (a) $\frac{z}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}$

(b) $\frac{z}{1-z^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-2)^n$ untuk $(|z-2| < 1)$

Penyelesaian

a. $\frac{z}{1+z^2} = z \cdot \frac{1}{1+z^2} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}$

b. $\frac{z}{1-z^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1-\frac{1}{3^{n+1}})(z-2)^n$, $(|z-2|<1)$

Gunakan $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ dan $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ untuk $(|z|<1)$

$$\frac{z}{1-z^2} = \frac{z}{(1-z)(1+z)} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{-1/2}{1+z}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1-(z-2)} - \frac{1}{3+(z-2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1+(z-2)} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+(\frac{z-2}{3})}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{3}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-2)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1-\frac{1}{3^{n+1}})(z-2)^n$$

4). Turunkan deret Taylor dalam pangkat (z+2) untuk f(z) = $\frac{z}{1-z^2}$ dan tentukan domain di mana ekspansi ini berlaku

Penyelesaian

Deret Taylor dalam pangkat (z + 2) untuk f(z) = $\frac{1}{1-z^2}$

f(z) = $\dfrac{1}{(1-z)(1+z)}$, f(z) analitik kecuali z = 1, z = -1. Radius kekonvergenan deret Taylor dalam pangkat z + 2. Ini adalah R = 1 untuk |z+2|<1

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-(z+2)} + \frac{1}{-1+(z+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{1-(\frac{z+2}{3})} + \frac{1}{1-(z+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\tfrac{z+2}{3})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(z+2)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(z+2)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}-1\right)(z+2)^n\right) \text{ untuk } |z+2|<1$$

5). Turunkan deret Maclaurin untuk cabang utama fungsi ln(z+1) dalam kitar $(|z+1|<1)$a

Penyelesaian

f(x) = Ln(z+1) dalam kitar $|z+1|<1$

f(0) = Ln 1 = 0

f'(z) = $\dfrac{1}{z+1}$ $\Rightarrow$ f'(0) = 1

f"(z) = $\dfrac{-1}{(z+1)^2}$ $\Rightarrow$ f"(0) = -1

$$f'''(z) = \frac{2}{(z+1)^3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 2$$

$$f^k(z) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z+1)^k} \quad \Rightarrow \quad f^k(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

$$\text{Ln }(z+1) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^k(0)z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}z^k}{k!} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

6). Deret Mc Laurin dari f(z) = $\tan^{-1} z$ untuk $|z| < \infty$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - z^{10} + \ldots$$

$$f''(z) = -2z + 4z^3 - 6z^5 + 8z^7 - 10z^9 + \ldots \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(z) = -2 + 12z^2 - 30z^4 + 56z^6 - 90z^8 + \ldots \Rightarrow \quad f'''(0) = -2$$

$$f^4(z) = 24z - 120z^3 + 336z^5 - 720z^7 + \ldots \quad \Rightarrow \quad f^4(0) = 0$$

$$f^5(z) = 24 - 360z^2 + 1680z^4 - 5040z^6 + \ldots \quad \Rightarrow \quad f^5(0) = 24$$

$$f^6(z) = -720z + 6720z^3 - 30240z^5 + \ldots \quad \Rightarrow \quad f^6(0) = 0$$

$$f^7(z) = -720 + 20160z^2 - 151200z^4 + \ldots \quad \Rightarrow \quad f^7(0) = -720$$

$$f^{2k}(0) = 0$$

$$f^n(0) = \begin{cases} (-1)^n(n-1)! & n = 4k-1 \\ (n-1)! & n = 4k+1 \end{cases}$$

$$\tan^{-1} z = 0 + \frac{z}{1!} + 0 + \frac{z^3(-2)}{3!} + 0 + \frac{z^5\,4!}{5!} + \ldots$$

$$= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$$

2. Deret Laurent

Latihan

1. Buktikan deret Laurent fungsi $\frac{e^{z^2}}{z^4}$ untuk 0 < |z| < ∞ adalah $\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(n+2)!}$

   Penyelesaian

   f(z) = $\frac{e^{z^2}}{z^4}$ singular di z = 0, untuk 0<|z|<∞

$$\frac{1}{z^4}e^{z^2} = \frac{1}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^2)^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{z^4}\cdot 1+\frac{1}{z^4}\cdot z^2+\frac{1}{z^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}$$

$$= \frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2(n-2)}}{n!} \quad \text{k = n – 2, n = k + 2}$$

$$= \frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(k+2)!}$$

2. Buktikan ekspansi Laurent untuk $z^4\sinh\frac{1}{z}$ adalah $z^3+\frac{z}{3!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)!z^{2n-1}}$

   Penyelesaian

   $f(z)=z^4\sinh\frac{1}{z}$ untuk 0 < |z| < ∞

$$f(z)=z^4\sinh\tfrac{1}{z} = z^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{z})^{2n+1}}{(2n+1)!} = z^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}} = z^3+\frac{z}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!z^{2n-3}} =$$

$$z^3+\frac{z}{3}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{[(2n+1)+3]!z^{2(n-1)-1}} \text{ ,n-1=k}$$

3. Tentukan deret Laurent f(z) = $\frac{1}{1-z^2}$ untuk 1 < |z| < ∞.

   Penyelesaian

a. f(z) = $\frac{1}{1-z^2} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}$

untuk 1 < |z| < ∞ $\Rightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}$$

$$= \frac{1}{2z}\left[\frac{-1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right]$$

$$= \frac{1}{2z}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}(\tfrac{1}{z})^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\tfrac{1}{z})^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)+(-1)^n}{z^{n+1}}\right],\ n+1 = k,\ n = k-1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)+(-1)^{k-1}}{z^k}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)+(-1)^{n-1}}{z^n}\right]$$

b. $b_1 = 0$

$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{1}\,dz = 0$

$\oint_C f(z)\,dz = 0$

4. Tentukan ekspansi Laurent untuk f(z) = $\frac{1}{z^2(1-z^2)}$

Penyelesaian

$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z^2)}$ singular untuk $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$.

Jadi ada dua daerah yaitu 0<|z|<1 dan 1<|z|<∞

Untuk 0 < |z| < 1

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z^2)} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n-2}$$

Untuk 1 < |z| < ∞ $\Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}$$

$$\frac{1/2}{1-z} = \frac{1/2}{z(\frac{1}{z}-1)} =$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}$$

$$\frac{1/2}{1-z} = \frac{1/2}{z(\frac{1}{z}-1)} = \frac{-1/2}{z(1-\frac{1}{z})} = -\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1/2}{1+z} = \frac{1/2}{z(\frac{1}{z}+1)} = \frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{z^2(1-z^2)} = \frac{1}{z^2}\ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n-1\right]\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n-1\right]\left(\frac{1}{z}\right)^{n+3}$$

5. Diberikan fungsi f(z) = $\frac{z}{(z-1)(z-2)}$. Tentukan

a) deret Maclaurin untuk |z| < 1

b) deret Laurent dalam pangkat z untuk 1 < |z| < 2,

c) deret Laurent dalam pangkat z untuk 2 < |z| < ∞.

Penyelesaian

f(z) = $\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

a. untuk $|z| < 1$

f(z) $= \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{z-1}$

$= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n\,(1-\frac{1}{2^n})$ untuk $|z| < 1$

b. untuk $1 < |z| < 2$

untuk $|z| > 1$ berakibat $\frac{1}{z} < 1$, sehingga

$\frac{-1}{z-1} = \frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n = -\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z})^n$

untuk $|z| < 2$ berakibat $\frac{z}{2} < 1$ sehingga

$\frac{2}{z-2} = \frac{1}{\frac{z}{2}-1} = \frac{-1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n$

$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z})^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n$

c. untuk $|z| > 2$ berakibat $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ demikian juga $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$\frac{-1}{z-1} = \frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})} = -\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{z})^n$

$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{z(1-\frac{z}{2})} = \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{z})^n = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{z})^n$

f(z) $= -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{z})^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^n}$

Barisan dan Deret

95. Buktikan bahwa a. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 i^n}{n^3+1}$ *=0*, b. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3i} - \frac{in}{n+1}\right)$*=1-i*

a. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 i^n}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 i^n}{n^3+1}\cdot\frac{n^3-1}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^5 i^n - n^2 i^n}{n^6+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{i^n}{n}-\frac{i^n}{n^4}}{1+\frac{1}{n^6}} = 0.$

b. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3i}-\frac{in}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-in(n+3i)}{(n+3i)(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n-in^2}{(n+3i)(n+1)}$

= *1-i*

96. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3z}{n^2}\right)$ = *1*+ *0* = 1

97. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dan $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

a. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n$ = *A* + *B*,

$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$

b. $\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = A - B$

$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$

c. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = AB$

d. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$ = A/B

98. Gunakan teorema limit untuk menghitung semua limit berikut:

a. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{in^2-in+1-3i}{(2n+4i-3)(n-i)}\right)$

b. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n^2-3i)(n-i)1-3i}{in^3-3n+4-i}\right|$

c. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}$

d. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left\{\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}\right\}$

Penyelesaian

a. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{in^2-in+1-3i}{(2n+4i-3)(n-i)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{in^2-in+1-3i}{2n^2+2in+3n+3i+4}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{i-\frac{i}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{3i}{n}}{2+\frac{2i}{n}+\frac{3}{n}-\frac{3i}{n^2}+\frac{4}{n^2}}\right) = \dfrac{i}{2}$

b. $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n^2-3i)(n-i)1-3i}{in^3-3n+4-i}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{n^2-in^2+3in+3}{in^3-3n+4-i}\right| = \left|\frac{1}{i}\right|$

$= 1$

c. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}\right)\left(\frac{\sqrt{n+2i}+\sqrt{n+i}}{\sqrt{n+2i}+\sqrt{n+i}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{i/\sqrt{n}}{\sqrt{1+\frac{2i}{n}}+\sqrt{1+\frac{i}{n}}}\right) = 0$

d. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left\{\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}\right\} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left\{\sqrt{n+2i}-\sqrt{n+i}\right\}\left(\frac{\sqrt{n+2i}+\sqrt{n+i}}{\sqrt{n+2i}+\sqrt{n+i}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{(n+2i)-(n+i)}{\sqrt{n+2i}+\sqrt{n+i}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{i\sqrt{n}}{\sqrt{n+2i}+\sqrt{n+i}}\right)$

$= \frac{i}{2}$

99. Buktikan bahwa deret $1+\left(\frac{i}{3}\right)+\left(\frac{i}{3}\right)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^{n-1}$ konvergen dan tentukan jumlahnya.

Penyelesaian

Diketahui $U_n = (\frac{i}{3})^{n-1}$ dan $U_{n+1} = (\frac{i}{3})^n$, diperoleh

$\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\dfrac{(\frac{i}{3})^{n-1}}{(\frac{i}{3})^n}\right| = \left|\frac{i}{3}\right| = \frac{1}{3}$, karena $\left|U_{n+1}\right| = \frac{1}{3}\left|U_n\right|$, maka

$1+\left(\frac{i}{3}\right)+\left(\frac{i}{3}\right)^2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{3}\right)^{n-1}$ konvergen

Jumlahnya adalah menggunakan formulasi $S_\infty = \frac{a}{1-r}$, dari deret diketahui

a=1 dan $r = \frac{i}{3}$ sehingga

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{i}{3}} = \frac{3}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{9+3i}{10}$$

100. Tunjukkan bahwa $i - 2i + 3i - 4i + \cdots$ divergen

Penyelesaian :

Diketahui $U_n = i(-1)^{n-1}n$ dan $U_{n+1} = i(-1)^n(n+1)$

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{i(-1)^n(n+1)}{i(-1)^{n-1}n}\right| = \left|\frac{(n+1)}{n}(-1)\right| = \left|1+\tfrac{1}{n}\right|,$$

karena $\left|1+\frac{1}{n}\right|$ >1, maka $i - 2i + 3i - 4i + \cdots$ divergen

101. Diketahui $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{5^{\frac{n}{2}}}$, $w = \sqrt{3}+i$. Misalkan $U_n = \frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}}$, $U_{n+1} = \frac{(\sqrt{3}+i)^{n+1}}{5^{\frac{n+1}{2}}}$.

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{\frac{(\sqrt{3}+i)^{n+1}}{5^{\frac{n+1}{2}}}}{\frac{(\sqrt{3}+i)^n}{5^{\frac{n}{2}}}}\right| = \left|\frac{5^{\frac{n}{2}}(\sqrt{3}+i)^{n+1}}{5^{\frac{n+1}{2}}(\sqrt{3}+i)^n}\right| = \left|\frac{(\sqrt{3}+i)}{5^{\frac{1}{2}}}\right|$$

$$= \sqrt{\frac{3}{5}+\frac{1}{5}} = \tfrac{2}{5}\sqrt{5}$$

Karena $|U_{n+1}| < |U_n|$ maka $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{5^{\frac{n}{2}}}$ konvergen.