NO. 332 / UN10.F09/ PP / 2018

SERTIFIKAT

Sertifikat ini diberikan kepada :

Muhammad Ahsar K., S.Si., M.Sc.

yang telah aktif berpartisipasi sebagai pemakalah dengan judul :

Estimasi Parameter pada Persamaan Osilator Harmonik Fuzzy: Perbandingan Pendekatan Numerik antara Metode Runge-kutta Klasik dan Diperluas

di Konferensi Nasional Matematika XIX
pada tanggal 24 Juli - 26 Juli 2018 di Universitas Brawijaya Malang

Malang, 25 Juli 2018

Dr. Intan Muchtadi, S.Si, M.Si, DEA	Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si.,M.Si.,Ph.D	Syaiful Anam, S.Si.,MT.,Ph.D
PRESIDEN INDOMS	KETUA JURUSAN MATEMATIKA FMIPA UB	KETUA PELAKSANA KNM XIX

DISELENGGARAKAN OLEH :

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Brawijaya

IndoMS
Indonesian Mathematical Society

KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XIX

24 – 26 JULI 2018, WIDYALOKA & MIPA CENTER,
UNIVERSITAS BRAWIJAYA MALANG

Malang, 28 Juni 2018

Yth. Muhammad Ahsar Karim
di tempat

Dengan hormat, atas nama panitia Konferensi Nasional Matematika XIX tahun 2018, kami menginformasikan bahwa makalah Bapak/Ibu dengan judul

ESTIMASI PARAMETER PADA PERSAMAAN OSILATOR HARMONIK FUZZY: PERBANDINGAN PENDEKATAN NUMERIK ANTARA METODE RUNGE-KUTTA KLASIK DAN DIPERLUAS

dinyatakan **DITERIMA** untuk dipresentasikan dalam KNM XIX. Berkaitan dengan hal tersebut, kami mengundang Bapak/Ibu untuk mempresentasikan makalah dalam sesi paralel.

Untuk makalah lengkap mohon diunggah melalui akun Bapak/Ibu, selambat-lambatnya tanggal **24 Juli 2018** dan ditulis sesuai dengan template makalah yang dapat diunduh di https://knm19ub.org/makalah.

Atas partisipasi Bapak/Ibu, kami ucapkan terima kasih.

Mengetahui,
Presiden IndoMS,

HIMPUNAN MATEMATIKA INDONESIA PUSAT 1976

Dr. Muchtadi Intan Detiena, S.Si, M.Si
NIP. 197511251998022001

Ketua Pelaksana KNM 19,

KNM 2018 KONFERENSI NASIONAL MATEMATIKA XIX

Syaiful Anam, S.Si, MT, Ph.D
NIP. 197801152002121003

SEKRETARIAT

JURUSAN MATEMATIKA, FMIPA, UNIVERSITAS BRAWIJAYA
Jl. Veteran Malang, Jawa Timur, Indonesia 65145
Phone: +62-341- 571142, Fax: +62-341- 571142
Website: http:// knm19ub.org/

KNM 2018

Estimasi Parameter pada Persamaan Osilator Harmonik *Fuzzy*: Perbandingan Pendekatan Numerik antara Metode Runge-Kutta Klasik dan Diperluas

Muhammad Ahsar Karim[1], Agus Yodi Gunawan[2], Mochamad Apri[2], Kuntjoro Adji Sidarto[2]
[1] *Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lambung Mangkurat, Indonesia*
[2] *Program Studi Doktor Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung, Indonesia*

E-mail: *m_ahsar@ulm.ac.id*

Abstrak

Sebagian besar sistem dalam dunia nyata mengandung ketidakpastian. Ketidakpastian ini dapat disebabkan oleh keterbatasan data yang tersedia, kompleksitas jaringan dari sistem, perubahan lingkungan atau demografi di saat melakukan pengamatan. Salah satu perilaku system yang biasanya muncul dalam dunia nyata adalah perilaku periodik. Model matematika dari sistem dengan perilaku periodik sering menunjukkan perilaku dinamis yang kompleks, bergantung pada nilai awal dan parameter. Dengan mengakomodir faktor ketidakpastian di dalam model, tentu saja diperlukan studi mendalam untuk mendeskripsikan struktur matematika, metodologi untuk menentukan solusi, dan prosedur untuk melakukan estimasi parameter. Diantara model matematika yang menggambarkan perilaku periodik adalah Persamaan Osilator Harmonik. Di dalam makalah ini, model ini diasumsikan memiliki ketidakpastian pada nilai awal dalam bentuk bilangan *fuzzy*, yang kemudian disebut Persamaan Osilator Harmonik *Fuzzy*. Model ini dikaji dalam tiga pendekatan diferensial *fuzzy*, yaitu Hukuhara diferensial, Hukuhara diferensial tergeneralisasi dan inklusi diferensial *fuzzy*. Aplikasi konsep aritmatika *fuzzy* pada model ini mengarah ke sistem deterministik *alpha-cut*. Sistem ini diselesaikan dengan menggunakan dua metode, yaitu Runge-Kutta klasik dan Runge-Kutta diperluas. Berbeda dengan metode Runge-Kutta klasik, metode Runge-Kutta diperluas menggunakan parameter baru untuk meningkatkan tingkat akurasi solusi dengan mengevaluasi nilai fungsi dan turunan pertamanya di dalam perhitungan. Di antara ketiga pendekatan *fuzzy* tersebut, inklusi diferensial *fuzzy* merupakan pendekatan yang paling tepat untuk menangkap perilaku periodik dari persamaan, baik menggunakan metode Runge-Kutta klasik ataupun metode Runge-Kutta diperluas. Akhirnya, ditunjukkan bagaimana melakukan estimasi parameter pada Persamaan Osilator Harmonik *Fuzzy* dengan menggunakan inklusi diferensial *fuzzy* pada suatu data *fuzzy* simulasi.

Kata kunci: Persamaan Osilator Harmonik *Fuzzy*, Hukuhara diferensial, Hukuhara diferensial tergeneralisasi, inklusi diferensial *fuzzy*, aritmatika *fuzzy*, sistem deterministik *alpha-cut*, Runge-Kutta klasik dan Runge-Kutta diperluas.

Daftar Pustaka

[1] M.A. Karim, A.Y. Gunawan, M. Apri, and K.A. Sidarto, Solving a fuzzy initial value problem of a harmonic oscillator model, AIP Conference Proceedings 1825, 020011 2017. Doi: 10.1063/1.4978980.
[2] L.A. Zadeh, Information and Control, Fuzzy Sets, 8, 338-353, 1965.
[3] S.L. Chang and L.A. Zadeh, IEEE Trans, Systems Man Cybernet, On Fuzzy Mapping and Control, 2, 30-34, 1972. Doi: 10.1109/TSMC.1972.5408553.
[4] Z.A. Ghanaie and M. M. Moghadam, The Journal of Mathematics and Computer Sciences, Solving Fuzzy Differential Equations by Runge-Kutta Method, 2 (2), 208-221, 2011.
[5] T. Jayakumar, D. Maheskumar, and K. Kanagarajan, Applied Mathematical Sciences, Numerical Solution of Fuzzy Differential Equations by Runge-Kutta Method of Order Five, 6 (60), 2989-3002, 2012.

ESTIMASI PARAMETER PADA MODEL OSILATOR HARMONIK *FUZZY*

(PERBANDINGAN PENDEKATAN NUMERIK ANTARA METODE RUNGE-KUTTA KLASIK DAN DIPERLUAS)

Muhammad Ahsar Karim

Agus Yodi Gunawan, Mochamad Apri, Kuntjoro Adji Sidarto

Industrial and Financial Mathematics Division

Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Institut Teknologi Bandung

Jl. Ganesha 10 Bandung, Indonesia- Indonesia

Motivasi

Pemodelan di dalam sistem yang kompleks sering kali berhadapan dengan **masalah ketidakpastian**
*Faktor penyebab: **keterbatasan data yang tersedia**, perubahan **lingkungan** atau **demografi***

⇐ Teori Ketidakpastian

⇓

Model Osilator Harmonik
(Masalah Nilai Awal dengan perilaku osilasi)

⇐
- Probabilistik
- **Linguistik**

⇓

Model Osilator Harmonik *Fuzzy*
(Persamaan Diferensial *Fuzzy* tipe Osilasi)

⇐ **Teori Fuzzy** (Linguistik)

⇓

Solusi Persamaan Diferensial *Fuzzy*

⇐
- Aritmetika *Fuzzy*
- **Tipe** Diferensial *Fuzzy*
- Metode (Eksak/**Numerik**)

⇓

Estimasi Parameter

Metodologi

Bilangan *Fuzzy* →

Model Harmonik Osilator
(Masalah Nilai Awal)

↓

- Aritmetika *Fuzzy*
- Diferensial Hukuhara (***HD***)
- HD Diperluas (***GHD***)
- Inklusi Diferensial *Fuzzy* (***FDI***)

→

Model Harmonik Osilator *Fuzzy*

↓

Metode Runge-Kutta
(**Klasik & Diperluas**) →

Sistem Deterministik *α-Cut*

↓

Estimasi Parameter
(Data Simulasi; metode LSQ-Nonlin) →

Solusi *Fuzzy*

↓

Parameter

Model Osilator Harmonik Fuzzy

Masalah Nilai Awal *Fuzzy*:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \tilde{y}_2, & \tilde{y}_1(0) &= \tilde{y}_{1,0} \\ \tilde{y}_2' &= -\tilde{y}_1 + \omega \sin(\beta t), & \tilde{y}_2(0) &= \tilde{y}_{2,0} \end{aligned}$$

$\tilde{y}_{1,0}, \tilde{y}_{2,0} \in R_F$: Nilai-nilai awal *fuzzy,*

$\tilde{y} \in R_F$: Variabel (*fuzzy*) koordinat posisi, fungsi terhadap waktu *t*,

$\omega \in R$: Parameter (amplitudo atau perpindahan) fungsi gelombang,

$\beta \in R$: Kecepatan sudut,

R: Himpunan bilangan real, dan

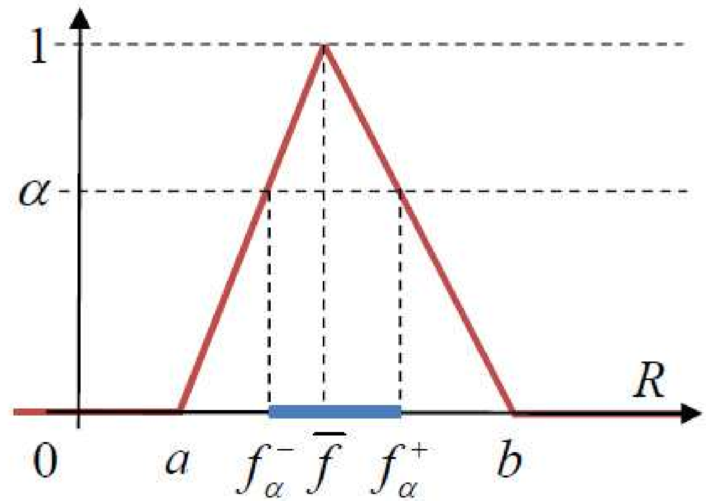
R_F: Koleksi semua bilangan *fuzzy* di R.

α-Cut dari Bilangan Fuzzy

Ilustrasi:

Misalkan $F \in R_F$ bilangan *fuzzy* segitiga, biasa disebut "**sekitar** f".

$$Trimf_F\left(x,[a,\bar{f},b]\right)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{\bar{f}-a} & ;a \le x < \bar{f}\\ \dfrac{b-x}{b-\bar{f}} & ;\bar{f} \le x < b\\ 0 & ;x \text{ lainnya}\end{cases}$$



$a,\bar{f},b \in R$ dan $a < \bar{f} < b$.

α-Cut dari F : $[F]^\alpha = [f_\alpha^-, f_\alpha^+] = \{x \in R : F(x) \ge \alpha\}; \alpha \in [0,1]$.

Aritmetika Fuzzy

Misalkan A dan B bilangan-bilangan *fuzzy* dengan α-*Cut*:

$[A]^\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ dan $[B]^\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$, serta $\delta \in R$.

Jumlah dan **Selisih** dari $[A]^\alpha$ and $[B]^\alpha$:

$$[A+B]^\alpha = [A]^\alpha + [B]^\alpha = [A_\alpha^- + B_\alpha^-, A_\alpha^+ + B_\alpha^+],$$
$$[A-B]^\alpha = [A]^\alpha - [B]^\alpha = [A_\alpha^- - B_\alpha^+, A_\alpha^+ - B_\alpha^-]$$

Kali dari $[A]^\alpha$ and $[B]^\alpha$:

$$[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha = [\min P, \max P];$$
$$P = \{A_\alpha^- B_\alpha^-, A_\alpha^- B_\alpha^+, A_\alpha^+ B_\alpha^-, A_\alpha^+ B_\alpha^+\}$$

Kali dari $[A]^\alpha$ oleh δ :

$$[\delta A]^\alpha = \delta[A]^\alpha = \delta[A_\alpha^-, A_\alpha^+] = \begin{cases} [\delta A_\alpha^-, \delta A_\alpha^+]; \delta \geq 0 \\ [\delta A_\alpha^+, \delta A_\alpha^-]; \delta < 0 \end{cases}$$

Bagi dari $[A]^\alpha$ oleh $[B]^\alpha$, if $0 \notin \mathrm{Supp}(B)$:

$$[A/B]^\alpha = [A]^\alpha / [B]^\alpha = [A_\alpha^-, A_\alpha^+] \cdot [1/B_\alpha^+, 1/B_\alpha^-]$$

Sistem Deterministik α-Cut

Misal *α-Cut* dari $\tilde{y}_{1,0}, \tilde{y}_{2,0}, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ pada Masalah *Fuzzy* yang diberikan:

$$[\tilde{y}_{1,0}]^{\alpha} = [y_{1,0\alpha}^{-}, y_{1,0\alpha}^{+}], \quad [\tilde{y}_{2,0}]^{\alpha} = [y_{2,0\alpha}^{-}, y_{2,0\alpha}^{+}]$$
$$[\tilde{y}_1]^{\alpha} = [y_{1\ \alpha}^{\ -}, y_{1\ \alpha}^{\ +}], \quad [\tilde{y}_2]^{\alpha} = [y_{2\ \alpha}^{\ -}, y_{2\ \alpha}^{\ +}]$$

Sistem Deterministik *α-Cut*:

HD	***GHD***	***FDI***
$(y_{1\alpha}^{-})' = y_{2\alpha}^{-}$	$(y_{1\alpha}^{-})' = y_{2\alpha}^{+}$	$(y_1)' \in [y_{2\alpha}^{-}, y_{2\alpha}^{+}]$
$(y_{1\alpha}^{+})' = y_{2\alpha}^{+}$	$(y_{1\alpha}^{+})' = y_{2\alpha}^{-}$	$(y_2)' \in -[y_{1\alpha}^{-}, y_{1\alpha}^{+}] + \omega\sin(\beta t)$
$(y_{2\alpha}^{-})' = -y_{1\alpha}^{+} + \omega\sin(\beta t)$	$(y_{2\alpha}^{-})' = -y_{1\alpha}^{-} + \omega\sin(\beta t)$	$y_{1,0} \in [y_{1,0\alpha}^{-}, y_{1,0\alpha}^{+}]$
$(y_{2\alpha}^{+})' = -y_{1\alpha}^{-} + \omega\sin(\beta t)$	$(y_{2\alpha}^{+})' = -y_{1\alpha}^{+} + \omega\sin(\beta t)$	$y_{2,0} \in [y_{2,0\alpha}^{-}, y_{2,0\alpha}^{+}]$

dengan nilai awal:

$$\tilde{y}_1(0)_{\alpha}^{-} = y_{1,0\alpha}^{-} \quad \tilde{y}_2(0)_{\alpha}^{-} = y_{2,0\alpha}^{-}$$
$$\tilde{y}_1(0)_{\alpha}^{+} = y_{1,0\alpha}^{+} \quad \tilde{y}_2(0)_{\alpha}^{+} = y_{2,0\alpha}^{+}$$

dengan:

$$[y_{1\alpha}^{-}, y_{1\alpha}^{+}] = [\min\{y_1\}, \mathrm{maks}\{y_1\}]$$
$$[y_{2\alpha}^{-}, y_{2\alpha}^{+}] = [\min\{y_2\}, \mathrm{maks}\{y_2\}]$$

Metode Runge Kutta (RK)

Diberikan persamaan diferensial biasa:

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

RK Klasik	RK Diperluas
Fungsi utama:	
$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_nk_n)h$	$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{m}(hb_ik_{i1} + h^2c_ik_{i2})$
Fungsi evaluasi:	
$k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$, $k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$, $\ldots$, $k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \ldots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$	$k_{i1} = f\left(x_n + \overline{c}_ih, y_n + h\sum_{s=1}^{i-1}a_{is}k_{s1}\right)$ $k_{i2} = f'\left(x_n + \overline{c}_ih, y_n + h\sum_{s=1}^{i-1}a_{is}k_{s1}\right)$ Fungsi f' dapat didekati dengan metode *forward difference*.

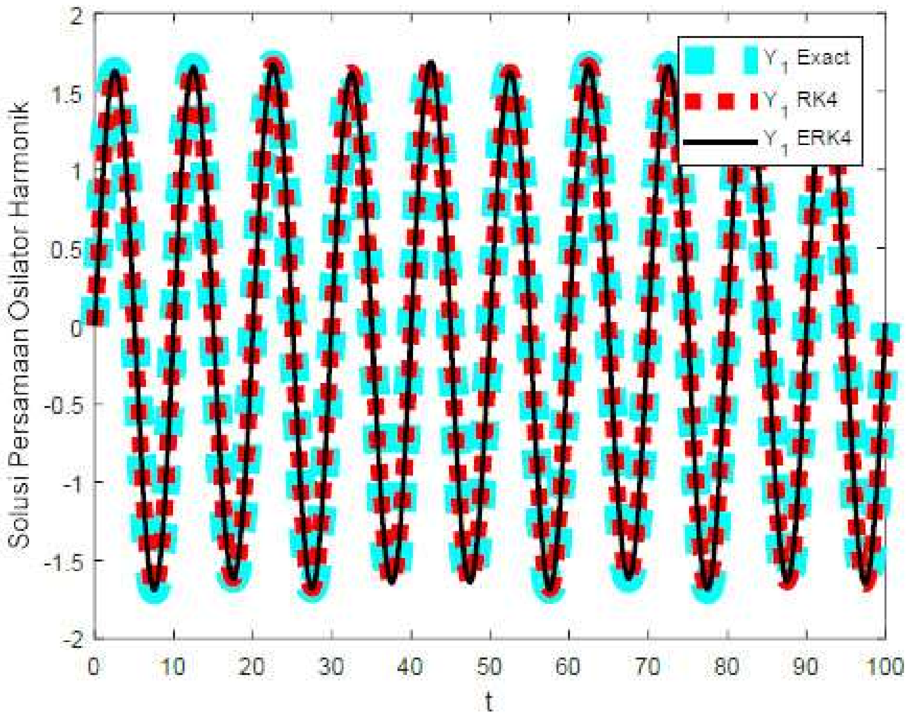
Konstanta riil $a_i, p_i, q_{i,i}$ dan $b_i, c_i, \overline{c}_i, a_{is}$ ditentukan menggunakan Tabel Butcher.

Solusi (RK Klasik vs Diperluas)

Solusi dari Masalah Nilai Awal Klasik:

$$y_1' = y_2, \qquad y_1(0) = 0$$
$$y_2' = -y_1 + \omega \sin(\beta t), \quad y_2(0) = 1$$

dengan $\omega = 1$, $\beta = \pi / 5$ dan partisi $h = 0.0125$ adalah:



Selisih maksimum antara Solusi Exact terhadap masing-masing RK Klasik dan **RK Diperluas**:

$$D_{Klasik} = 1.1255 \times 10^{-09}$$
$$D_{Diperluas} = 2.8827 \times 10^{-10}$$

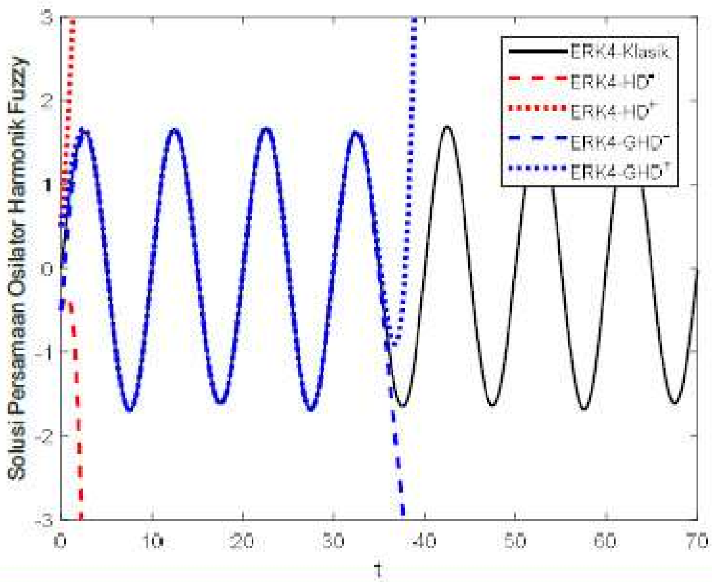
Solusi (RK Klasik vs Diperluas)

Solusi dari Masalah Nilai Awal *Fuzzy*:

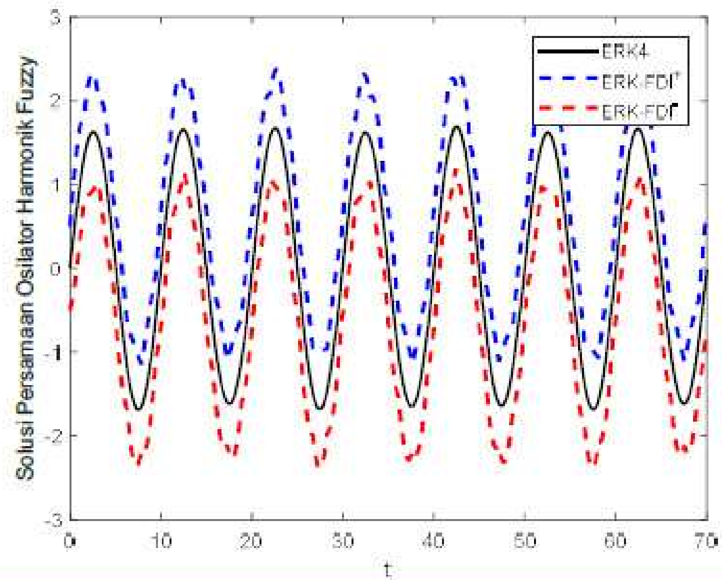
$$\tilde{y}_1' = \tilde{y}_2, \qquad \tilde{y}_1(0) = \tilde{0}$$

$$\tilde{y}_2' = -\tilde{y}_1 + \omega \sin(\beta t), \quad \tilde{y}_2(0) = \tilde{1}$$

dengan *α-Cut* $\tilde{0} = [-0.5, 0.5], \tilde{1} = [0.5, 1.5]$, $\omega = 1$, $\beta = \pi / 5$ adalah:



(a) Solusi metode **HD** & **GHD**



(b) Solusi metode FDI

$(6.1917^{-09}, 6.2197^{-09})$

Estimasi Parameter

Prosedur:

1. Diberikan **data simulasi *fuzzy*** dalam bentuk *α-Cut* (pada grafik):

$$[\tilde{y}_{data}]^{\alpha} = [y_{data\,\alpha}^{-}, y_{data\,\alpha}^{+}]$$

2. Dibentuk **fungsi obyektif** dari data Simulasi *Fuzzy* dan solusi FDI:

$$\min_{\omega} \left\| F(\omega) \right\|_2^2 = \min_{\omega} \frac{1}{2N} \left(\sum_{t=0}^{N-1} (y_{1\alpha}^{-}(t) - y_{data\,\alpha}^{-}(t))^2 + \sum_{t=0}^{N-1} (y_{1\alpha}^{+}(t) - y_{data\,\alpha}^{+}(t))^2 \right),$$

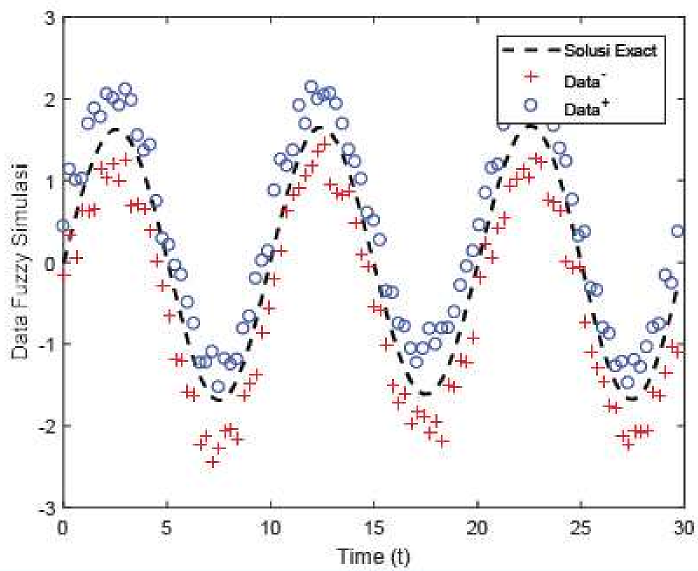
dengan N = jumlah seri data terhadap t.

3. Ditaksir parameter ω pada interval $(0,2]$ (diberikan parameter awal $\omega_0 = 1$).
4. Dilakukan optimasi menggunakan metode *LSQ-Nonlin*.

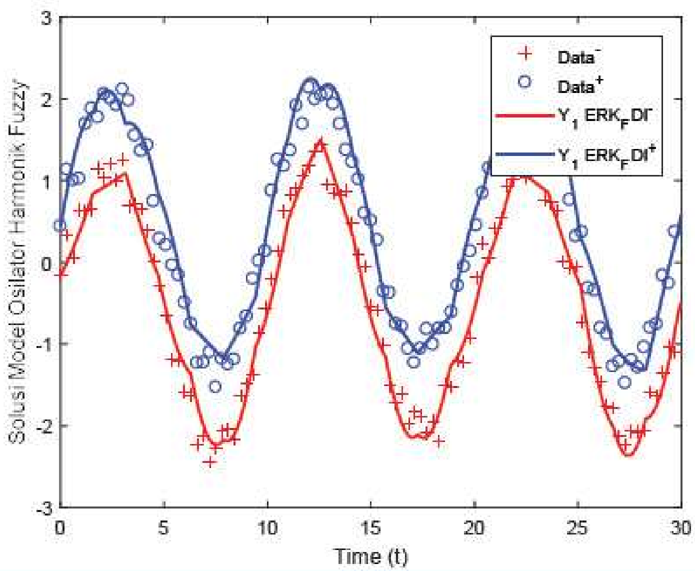
Solusi Model Osilator Harmonik Fuzzy

Dari prosedur estimasi parameter diperoleh:

$$\omega = 1.0061.$$



(a) Data *fuzzy* simulasi



(b) Solusi Model

Grafik data *fuzzy* simulasi & solusi Model Osilator Harmonik *Fuzzy* dengan $\omega = 1.0061$

Kesimpulan & Saran

Dalam presentasi ini, dua metode, yaitu HD dan GHD tidak mampu menangkap perilaku osilasi dari Model Osilator Harmonik *Fuzzy*, baik menggunakan RK Klasik maupun RK Diperluas. Sebaliknya, metode FDI mampu menangkap perilaku osilasi dan mempertahankan ketidakpastian solusi model, dimana metode RK Diperluas memperlihatkan solusi yang lebih tepat dibandingkan RK Klasik.

Hal ini menjadi alasan kami untuk menerapkan konsep FDI untuk menaksir parameter pada Model Osilator Harmonik *Fuzzy* dengan metode RK Diperluas.

Terima Kasih

(*Muhammad Ahsar Karim*)
m_ahsar@ulm.ac.id