ISSN: 2406-9868

PROSIDING
SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA

Meningkatkan Kualitas Sumber Daya Manusia dalam Persaingan Global melalui Pendidikan dan Aplikasi Matematika

Denpasar, 8 Oktober 2016

411posters.com/wp-content/uploads/2012/06/klausen-Platos-Garden-Fire-Air-Ether-EarthWater.jpg

Program Studi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Udayana

ISSN: 2406-9868

TIM PROSIDING

Penanggung Jawab Prosiding

I Wayan Sumarjaya, S.Si., M.Stats.

Editor

Ir. I Putu Eka N. Kencana, MT.
Ir. Komang Dharmawan, M.Math, Ph.D.
Desak Putu Eka Nilakusmawati S.Si, M.Si.
Ir. I Komang Gde Sukarsa, M.Si.
Drs. G.K. Gandhiadi, MT.
Drs. Ketut Jayanegara, M.Si.
Drs. I Nyoman Widana, M.Si.

Tim Teknis

Ir. Tjokorda Bagus Oka, Ph.D.
I Gusti Ayu Made Srinadi, S.Si., M.Si.
Dra. Luh Putu Suciptawati, M.Si.
Made Susilawati, S.Si., M.Si.
Ni Ketut Tari Tastrawati, S.Si., M.Si.
Kartika Sari, S.Si., M.Sc.
Luh Putu Ida Harini, S.Si., M.Sc.
Ni Made Asih, S.Pd. M.Si.

Layout & Cover

I Gusti Ngurah Lanang Wijayakusuma, S.Si., M.Kom
Drs. YB Sugiarto

 ISSN: 2406-9868

TIM REVIEWER

No.	Nama	Instansi
1	Prof. Dr. I Nengah Suparta, M.Si.	Universitas Pendidikan Ganesha
2	Prof. Drs. Sariyasa, M.Sc., Ph.D.	Universitas Pendidikan Ganesha
3	Prof. Dr. Drs. I Nyoman Budiantara, M.Si	Institut Teknologi Sepuluh November
4	Prof. Dr. Marjono, M.Phil.	Universitas Brawijaya
5	Dr. Putu Harry Gunawan, S.Si., M.Si., M.Sc.	Telkom University

 ISSN: 2406-9868

DAFTAR ISI

Halaman

PERLUASAN MODEL KENDALI OPTIMAL PADA MASALAH INVENTORI YANG MENGALAMI PENURUNAN MUTU

Pardi Affandi

Dosen Matematika FMIPA UNLAM Banjarmasin
Email : p_affandi@unlam.ac.id

ABSTRAK

Inventori merupakan investasi yang paling besar pada sebagian besar perusahaan industri. Baik inventori barang jadi maupun inventori bahan baku. Dalam masalah yang dibahas pada penelitian ini, inventori yang dimaksud adalah inventori dalam bentuk barang jadi. Inventori barang jadi yang mudah rusak harus dikenakan biaya kemerosotan hal ini disebabkan bila barang tersebut dikemudian hari menjadi membusuk atau merosot mutunya yang akibatnya adalah kerusakan. Sehingga dibutuhkan aplikasi teori kontrol dalam sebuah model inventori yang mengalami kemerosotan kualitas barang produksi, kemudian menetukan solusi dari sistem inventori yang sudah ada.

Menurut Hesaam K. Alfares (Integrating quality and maintenance decisions in a production-inventory model for deteriorating items) bahwa dalam periode produksi $[0, t_1]$. Selama masa ini, inventori akan bertambah banyak selama masa produksi tetapi akan berkurang dengan adanya permintaan dan kemerosotan sehingga akan diperoleh inventory differential equation (IDE) adalah sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))$$

Model tersebut diperluas dengan periode yang sangat lama, model merepresentasikan masalah kontrol optimal dengan sebuah state variable yaitu tingkat inventori dan satu variable kontrol yaitu rata-rata tingkat produksi. Seluruh fungsi yang digunakan diasumsikan non negatif, kontinu dan differensiabel. Diperoleh hasil minimum fungsi objektif yang diinginkan, dan biaya yang dikeluarkan seoptimal mungkin.

***Kata Kunci** : Kendali Optimal, Inventori yang Mengalami Kemerosotan.*

1. PENDAHULUAN

Berbagai permasalahan banyak yang melibatkan teori sistem, teori kontrol optimal dan beberapa aplikasinya. Salah satunya adalah masalah inventori, masalahnya adalah bagaimana mengatur perubahan permintaan konsumen pada sebuah produk barang jadi. Sehingga perusahaan tersebut harus membuat perencanaan yang baik dalam memproduksi barang agar sesuai dengan jumlah permintaan. Salah satunya dengan cara produk barang yang sudah jadi harus di muat dalam sebuah tempat sebelum dipesan oleh konsumen. Hal inilah yang menyebabkan munculnya *inventori* yang sudah tentu akan menambah biaya yaitu berupa *biaya penyimpanan* yang berupa biaya secara fisik menyimpan produk barang atau biaya yang muncul karena modal perusahaan terikat dalam bentuk barang. Masalah ini dapat dimodelkan dengan menggunakan teknik kendali optimal matematika, pemrograman dinamis dan optimasi jaringan.

Teknik kendali optimal, teorinya merupakan perpanjangan dari kalkulus variasi, berupa metode optimasi matematika untuk menurunkan kebijakan pengendalian. Metode ini sebagian besar diilhami oleh karya Lev Pontryagin dan rekan-rekannya di Uni Soviet dan Richard Bellman di Amerika Serikat. Salah satu karya besar Lev Pontryagin adalah Pontragyn'S maximum principle atau prinsip maksimum Pontryagin.

Beberapa referensi teori yang mengaplikasikan teori kontrol kedalam produksi dan masalah inventori adalah Sprzeuzkouiski (1967), Hwang, Fan dan Erickson (1967), Pekelman (1974), Bensoussan, Hurst dan Naslund (1974), Hartl dan Sethi (1984a), Feihtinger dan Heartl (1985a), Stoppler (1985), dan Gaimon (1988). Bagian yang banyak diminati dalam teori inventori adalah masalah inventori yang sistem inventori mengalami pemerosotan diiringi dengan kemerosotan produksi. Berdasarkan tiga penelitian dari (Nahmias (1982), Raafat (1991), and Goyal and Giri (2001)), dapat kita amati betapa pentingnya masalah inventori yang sistem inventori mengalami pemerosotan diiringi dengan kemerosotan produksi.

Sethi S.P dan Thompson G.L (2002) membahas model produksi inventori dan solusinya sedangkan Yacine Benhadid, Lotfi Tadz dan Messaoud Bounkhel (2007) membahas model dalam kondisi permintaan dinamis dan inventori tersedia sepanjang waktu, fokus permasalahannya sistem inventori produksi yang berbentuk nonlinear dan biaya produksi diperlakukan sebagai fungsi secara umum masing-masing dari tingkat persediaan dan tingkat produksi.

Banyak hal yang menarik untuk dikaji terkait dengan sistem inventori namun dalam tesis ini fokus pada pembahasan tentang kendali optimal dari penurunan sistem inventori produksi. Model persamaan diferensialnya disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen, kemudian ditentukan solusi optimalnya. Model berikutnya di kembangkan solusinya untuk nilai t menuju tak hingga. Kemudian beberapa bentuk ilustrasi model yang dipakai yaitu permintaan konstan dan permintaan linier. Adapun tujuannya adalah untuk menentukan rata-rata produksi untuk meminimumkan beberapa fungsi biaya.

Kajian sistem inventori terkait tentang kendali optimal dari penurunan sistem inventori produksi dalam tesis ini mengacu pada Messauod Bounkhel dan Lotfi Tadz (2005), yang menjamin kondisi pokok dari sistem inventori memiliki solusi optimal sehingga memenuhi kondisi Hamiltonian yang teorinya diambil dari D.N Burges, kemudian solusinya dihubungkan dengan prinsip Optimal Kontrol dari Frank L.Lewis sedangkan persamaan state Menurut Hesaam K. Alfares (*Integrating quality and maintenance decisions in a production-inventory model for deteriorating items*) bahwa dalam periode produksi $[0, t_1]$. Selama masa ini, inventori akan bertambah banyak selama masa produksi tetapi akan berkurang dengan adanya permintaan dan kemerosotan. Beberapa penjelasan terkait dengan Persamaan Diferensial Linier nonhomogen dan solusinya mengacu pada Shepley L Ross, Sistem Persamaan Diferensial yaitu karangan Ogata K, Chi-Tsong Chen, dan inventori controlnya bersumber dari Stephen F. Love. Fungsinya terjamin konveksitasnya teori bersumber dari K.V Mital sehingga membantu menjamin kondisi optimal fungsinya.

Sistem inventori terkait tentang kendali optimal dari penurunan sistem inventori produksi dibentuk persamaan diferensialnya kemudian disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen, hingga dapat ditentukan solusi optimalnya berupa rata-rata produksi sehingga dapat meminimumkan beberapa fungsi biaya. Model berikutnya di kembangkan solusinya untuk nilai t menuju tak hingga. Kemudian beberapa bentuk ilustrasi model yang dipakai yaitu permintaan konstan dan permintaan linier yang kurvanya diperoleh dengan bantuan aplikasi program Maple.

2. LANDASAN TEORI

Berikut diberikan pengertian-pengertian konsep berupa definisi dan teorema-teorema yang dijadikan sebagai acuan yang mendasari pembahasan dalam 3.

2.1 Fungsi kontinu dan Fungsi Diferensiabel Kontinu

Definisi 2.1.1 (Bartle 1982) Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, $C \in A$, *dan fungsi* $f: A \to \mathbb{R}$, *fungsi f dikatakan kontinu di C jika untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sehingga untuk setiap* $x \in A$ *dengan* $\| x - c \| < \delta$ *berlaku* $\| f(x) - f(c) \| < \varepsilon$.

Teorema 2.1.1 (Bartle 1982) *Jika* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *kontinu, maka terdapat* $M > 0$ *sehingga* $f(x) \le M$ *untuk setiap* $x \in [a, b]$.

Teorema 2.2.4 (Mangasarian 1969) *Diberikan himpunan terbuka* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$.
Fungsi $\theta: \Gamma \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *terdifrensial di* $\bar{x} \in \Gamma$. *Jika* θ *konveks di* $\bar{x} \in \Gamma$ *maka*
$\theta(x) - \theta(\bar{x}) \ge \nabla\theta(\bar{x})(x - \bar{x})$ *untuk setiap* $x \in \Gamma$.

2.2 Himpunan Konveks dan Fungsi konveks

Teorema 2.2.2 *Bola terbuka* $B_r(x) = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n \|x - \bar{x}\| < \epsilon\}, \epsilon > 0$ *adalah merupakan himpunan konveks.*

Definisi 2.2.4 (Mangasarian 1969) *Himpunan* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *dikatakan himpunan konveks jika untuk sebarang* $x_1, x_2 \in \Gamma$ *dan untuk* $\lambda \in \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga* $0 \le \lambda \le 1$ *berlaku* $(1 - \lambda)(x_1) + \lambda(x_2) \in \Gamma$.

Definisi 2.2.5 (K.V Mital) *Misalkan* $x \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ *dengan A adalah himpunan konveks. Suatu fungsi* θ *disebut fungsi konveks di A bila dan hanya bila untuk sebarang dua titik* $x_1, x_2 \in A$ *dan setiap* $\lambda \in [0,1]$, *berlaku* $\{\theta(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\} \leq \lambda\,\theta(x_1) + (1-\lambda)\theta(x_2)$

Teorema 2.2.4 (Mangasarian 1969) *Diberikan himpunan terbuka* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. *Fungsi* $\theta: \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *terdifrensial di* $\bar{x} \in \Gamma$. *Jika* θ *konveks di* $\bar{x} \in \Gamma$ *maka* $\theta(x) - \theta(\bar{x}) \geq \nabla\theta(\bar{x})(x - \bar{x})$ *untuk setiap* $x \in \Gamma$.

2.3 Persamaan Diferensial Linear Nonhomogen dan Solusinya

Definisi 2.3.1 (Ross, S.L 1984) *Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.*

Definisi 2.3.2 (Ross, S.L 1984) *Persamaan diferensial linier orde-n, dengan variabel tak bebas y, dan variabel bebas x, dapat dinyatakan sebagai berikut*

$$a_0 x \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = F(x) \tag{2.10}$$

Dengan a_0 *tidak sama dengan nol. Jika F sama dengan nol maka persamaan tersebut tereduksi menjadi*

$$a_0 x \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n x y = 0 \tag{2.11}$$

yang disebut dengan persamaan diferensial homogen. Untuk $F(x) \neq 0$, *disebut dengan persamaan diferensial non homogen.*

Selanjutnya dibicarakan teorema eksistensi untuk masalah syarat awal yang berkaitan dengan persamaan diferensial linear orde-n.

Teorema 2.3.7 (Ross, S.L 1984) *Diberikan* y_p *suatu solusi untuk persamaan diferensial linear nonhomogen (2.14) yang tidak memuat sebarang konstanta.*

Jika $y_c = (c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n)$ solusi umum persamaan diferensial linear homogen (2.15) maka setiap solusi persamaan diferensial (2.14) dapat dinyatakan sebagai $y_c + y_p$ untuk suatu pemilihan konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$ yang sesuai.

2.4. Sistem Persamaan Diferensial

Teorema 2.4.1 *Matriks transisi sistem linear homogen* $\dot{x} = Ax$ *adalah* $e^{A(t-s)}$.

Sistem persamaan diferensial berbentuk $\dot{x} = ax + bu$, solusinya dapat diselesaikan sehingga diperoleh

$$x = x_0 e^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} (bu) \tau d\tau$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang kendali optimal dari penurunan sistem inventori produksi. Model persamaan diferensialnya disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen, kemudian ditentukan solusi optimalnya. Model berikutnya di kembangkan solusinya untuk nilai t menuju tak hingga. Kemudian beberapa bentuk ilustrasi model yang dipakai yaitu permintaan konstan dan permintaan linier.

3.1 Pembentukan Model

Pada bagian awal terlebih dahulu diperkenalkan notasi-notasi yang digunakan :

$I(t)$: tingkat inventori pada waktu t,

$P(t)$: rata-rata produksi pada waktu t,

$D(t)$: rata-rata permintaan pada waktu t,

$\theta(t,I(t))$: rata-rata kemerosotan pada waktu t sesuai dengan $I(t)$,

$h(I(t))$: rata-rata biaya penyimpanan sesuai dengan $I(t)$,

$K(P(t))$: rata-rata biaya produksi sesuai dengan $P(t)$,

T : panjang rencana dalam waktu tertentu,

ρ : konstan non negatif rata-rata discount,

I_0 : tingkat inventori awal,

$\tilde{\theta}$: tujuan rata-rata kemerosotan,

$\tilde{I}$: tingkat inventori tujuan,

$\tilde{P}$: rata-rata produksi tujuan,

c : biaya positif produksi unit produksi

Seluruh fungsi yang digunakan diasumsikan non negatif, kontinu dan differensiabel. Andaikan hasil perolehan rata-rata permintaan D, produksi yang dapat diawasi nilai rata-ratanya P, dan pemerosotan yang terjadi rata-ratanya θ, mengikuti tingkat inventori $I(t)$, berkembang secara dinamis berdasarkan persamaan state. Menurut Hesaam K. Alfares (*Integrating quality and maintenance decisions in a production-inventory model for deteriorating items*) bahwa dalam periode produksi $[0, t_1]$. Selama masa ini, inventori akan bertambah banyak selama masa produksi tetapi akan berkurang dengan adanya permintaan dan kemerosotan sehingga akan diperoleh *inventory differential equation (IDE)* adalah sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t)) \tag{3.1.1}$$

 ISSN: 2406-9868

Model tersebut merepresentasikan masalah kontrol optimal dengan sebuah *state variable* yaitu tingkat inventori dan satu variable kontrol yaitu rata-rata tingkat produksi. Masalahnya diasosiasikan meminimumkan sebuah fungsi objektif yang kita inginkan, hingga biaya yang dikeluarkan seoptimal mungkin. Berarti kita akan meminimumkan :

$$\min_{P(t)\geq 0} J(P,I) = \int_0^T F(t,I(t),P(t))dt \tag{3.1.2}$$

subjek dari persamaan state (3.1.1) adalah

$$F(t,I(t),P(t)) = e^{-\rho t}\left(\frac{1}{2}[h(I(t)) - h(\bar{I})]^2 + \frac{1}{2}[K(P(t)) - K(\bar{P})]^2 + \frac{c}{2}[\theta(t,I(t)) - \bar{\theta}]^2\right) \tag{3.1.3}$$

Alat utama untuk menyelesaikan masalah $(\mathcal{P})$ pencariannya melibatkan kondisi optimal bentuk pontryagin maksimum seperti yang terdapat dalam pembahasan sebelumnya. Kemudian teori yang digunakan melibatkan fungsi *Hamiltonian* yaitu:

$$H(t,I(t),P(t),\lambda(t)) = -F(t,I(t),P(t)) + \lambda(t)f(t,I(t),P(t))$$

Masalah minimisasi dengan performance functional berbentuk J(u) dapat diselesaikan dengan *prinsip maksimum Pontryagin* yaitu terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk masalah memaksimalkan $J^*(u)$ dengan $J^*(u) = -J(u)$.

Dimana $f(t,I(t),P(t)) = P(t) - D(t) - \theta(t,I(t))$ dan λ adalah yang menghubungkan dengan fungsi konstrain dari persamaan differensialnya. Kemudian solusinya akan dihubungkan dengan *prinsip Pontryagin maksimum* .

Teorema 3.1

Kondisi pokok untuk (P^*,I^*) *untuk menjadi solusi optimal dari masalah* $(\mathcal{P})$

$$K(P^*(t)) - K(\bar{P})\frac{d}{dt}P^*(t)\frac{d^2}{dp^2}K(P^*(t)) - \rho\frac{\partial}{\partial I}\theta(t^*,I(t))\frac{d}{dP}K(P^*(t)) = -\frac{d}{dt}P^*(t)\frac{d}{dP}K(P^*(t))^2 + (h(I^*(t)) - h(\bar{I}))\frac{d}{dP}h(I^*(t)) + c(\theta(t^*,I(t))\frac{\partial}{\partial I}\theta(t^*,I(t))$$
(3.1.4)

Dan $I^*(0) = I_0$ $\quad K(P^*(T)) - K(\tilde{P})\frac{d}{dT}P^*(T) = 0 \quad P^*(t) \geq 0$

Teorema 3.2

Diasumsikan bahwa fungsi F(t,.,P) dan θ(t,.) adalah konvek. Kemudian kondisi pokok (3.1.5) – (3.1.7) *adalah syarat cukup* (P^*,I^*) *akan menjadi syarat optimal untuk masalah* $(\mathcal{P})$.

Untuk pembahasan berikutnya, kita akan melibatkan fungsi eksogen yang sifat fungsinya sangat umum. Sehingga solusi eksplisit yang sukar ditemukan, akan dapat diselesaikan pada masalah yang akan kita bahas berikut. Pada hakekatnya mencari nilai dari sistem, sama halnya kita menghitung solusi eksplisit dalam kasus yang fungsi eksogennya memiliki bentuk dasar. Akan didapatkan hasil yang dapat memenuhi kondisi optimal sehingga sistem yang lebih komplek dapat disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen.

Fungsi eksogen yang lain tidak dipergunakan disini, diupayakan untuk tidak terkait notasi kompleks karena terlalu banyak menggunakan teknik yang detail. Sebagai ilustrasi tujuan mari kita asumsikan beberapa dari bentuk fungsi eksogen sebagai berikut.

$$\begin{aligned} K\big(P(t)\big) &= K_1 P(t) + K_2 \\ h\big(I(t)\big) &= h_1 I(t) + h_2 \\ \theta\big(t, I(t)\big) &= \theta_1 I(t) + \theta_2 \end{aligned}$$

Dimana $K_i, h_i\, dan\, \theta_i\ (i = 1,2)$ adalah konstanta real K_1, h_1 dan θ_1 adalah tidak kosong. Dalam kasus ini, karena I adalah tertutup ke $\hat{I}$ dan $\theta\big(t, I(t)\big)$ adalah tertutup ke $\tilde{\theta}$, hingga kita akan peroleh $\tilde{\theta} = \theta_1 I + \theta_2$ dalam problem ($\mathcal{P}$). Sehingga fungsi objektif (3.1.2) akan disederhanakan

$$F\big(t, I(t), P(t)\big) = e^{-\rho t}\left[\frac{H}{2}\Big([\mathrm{I}(t) - (\tilde{\mathrm{I}})]^2 + \frac{K}{2}\Big([\mathrm{P}(t) - (\tilde{\mathrm{P}})]^2\Big)\Big)\right] \tag{3.1.18}$$

Dengan nilai dari $H = h^2 + c\theta_1{}^2$ dan $K = K^2$.

Kemudian fungsi eksogen juga kita gunakan pada teorema 3.1.1 sehingga diharapkan akan diperoleh bentuk dasar yang lebih sederhana. Persamaan kita mulai dari kombinasi persamaan (3.1.8) dengan (3.1.9) seperti yang sudah kita peroleh sebelumnya yaitu

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2} I(t) - \rho \frac{d}{dt} I(t) - \left((\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right) I(t) \\ &\qquad = \rho D(t) - \rho \tilde{P} + \rho\theta_2 + \theta_1 D(t) - \theta_1 \tilde{P} + \theta_1\theta_2 - \frac{d}{dt} D(t) - \frac{h}{K}\tilde{I} \end{aligned}$$

Berarti dengan fungsi eksogen kita dapat peroleh bentuk dasar yang lebih sederhana dari teorema 3.1.1 yaitu

$$\frac{d^2}{dt^2} I(t) - \rho \frac{d}{dt} I(t) - \left((\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right) I(t) = (\rho + \theta_1)[D(t) - \tilde{P} + \theta_2] - \frac{d}{dt} D(t) - \frac{h}{K}\tilde{I}$$

Corollary 3.1

Kondisi pokok dari (P^*, I^*) untuk menjadi syarat optimal untuk masalah ($\mathcal{P}$) adalah

$$\frac{d^2}{dt^2} I(t) - \rho \frac{d}{dt} I(t) - \left((\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right) I(t) = \beta(t) \tag{3.1.19}$$

Dengan

$$I^*(0) = I_0 \qquad P^*(T) = \hat{P} \qquad P^*(t) \geq 0 \tag{3.1.20}$$

Dimana

$$\beta(t) = (\rho + \theta_1)[D(t) - \tilde{P} + \theta_2] - \frac{d}{dt}D(t) - \frac{h}{K}\hat{I} \tag{3.1.21}$$

Masalah state dalam Corollary 3.1 adalah masalah dua titik batas. Akan diselesaikan dalam *Corollary* berikutnya.

Corollary 3.2

Syarat optimal untuk solusi masalah ($\mathcal{P}$) adalah diberikan dengan

$$P^*(t) = maks\{P(t), 0\},$$

$$I^*(t) = I_0 e^{-\theta_1 t} + \int_0^t [P^*(s) - D(s) - \theta_2] e^{\theta_1 (s-t)}\, ds \tag{3.1.22}$$

Dimana

$$P(t) = a_1(m_1 + \theta_1)e^{m_1 t} + a_2(m_2 + \theta_1)e^{m_2 t} + \frac{d}{dt}Q(t) + \theta_1 Q(t) + D(t) + \theta_2$$

Konstanta a_1, a_2, m_1 dan m_2 akan diberikan dalam bukti berikut, dan $Q(t)$ adalah solusi partikular dari persamaan (3.1.19) .

Bukti

Kita selesaikan persamaan (3.1.19) dengan metode standar. Persamaan karakteristiknya adalah

$$m^2 - \rho m - (\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K} = 0$$

Memiliki dua jenis akar berlawanan, yang diberikan dengan

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\left[(\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right]}\right) < 0$$

$$m_2 = \frac{1}{2}\left(\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\left[(\rho + \theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right]}\right) > 0$$

Hingga diperoleh nilai

$$I(t) = a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t) \tag{3.1.23}$$

Sedangkan dari persamaan (3.1.1) nilai dari $\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))$

Berarti dapat ditentukan

$$P(t) = \frac{d}{dt} I(t) + D(t) + \theta(t, I(t))$$

Dengan menggunakan persamaan (3.1.23)

$$I(t) = a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t)$$

akan kita peroleh

$$P(t) = \frac{d}{dt}(a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t)) + D(t) + \theta(t, I(t))$$

Karena $\theta(t, I(t) = [\theta_1 I(t) + \theta_2]$ berarti akan diperoleh

$$P(t) = \frac{d}{dt}(a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t)) + D(t) + (\theta_1 I(t) + \theta_2)$$

$$P(t) = (a_{1m_1} e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + \frac{d}{dt} Q(t)) + D(t) + (\theta_1 (a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t)) + \theta_2)$$

Sehingga

$$P(t) = (a_{1m_1} e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + \frac{d}{dt} Q(t)) + D(t) + (\theta_1 a_1 e^{m_1 t} + \theta_1 a_2 e^{m_2 t} + (\theta_1 Q(t)) + \theta_2)$$

$$P(t) = a_1(m_1 + \theta_1) e^{m_1 t} + a_2(m_2 + \theta_1) e^{m_2 t} + \frac{d}{dt} Q(t) + \theta_1 Q(t) + D(t) + \theta_2$$

Dimana $Q(t)$ adalah solusi partikular (3.1.19). Syarat awal dan kondisi akhir (3.1.20) akan digunakan untuk menghitung konstanta a_1 dan a_2 sebagai berikut. Dari kondisi awal kita peroleh

$$I(0) = a_1 + a_2 + Q(0)$$

Dan dari kondisi akhir kita dapatkan

$$a_1(m_1 + \theta_1) e^{m_1 T} + a_2(m_2 + \theta_1) e^{m_2 T} + \left[\frac{C}{K} + \frac{d}{dt} Q(T) + \theta_1 Q(T) + D(T)\right] = 0$$

Dengan mengambil

$$b_1 = I_0 - Q(0)$$

$$b_2 = -\left[\frac{C}{K} + \frac{d}{dt} Q(T) + \theta_1 Q(T) + D(T)\right]$$

Maka akan kita peroleh dua sistem persamaan linier dengan dua variabel yang tidak diketahui

$$a_1 + a_2 = b_1$$

$$a_1(m_1 + \theta_1)e^{m_1 T} + a_2(m_2 + \theta_1)e^{m_2 T} = b_2$$

Maka akan kita peroleh solusi yang unik

$$a_1 = \frac{b_2 - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T} b_1}{(m_1 + \theta_1)e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T}}$$

$$a_2 = \frac{(m_2 + \theta_1)e^{m_2 T} b_1 - b_2}{(m_1 + \theta_1)e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T}}$$

Kita dapat menarik kesimpulan dari P menggunakan ekspresi optimal I mendekati dengan persamaan *state* (3.1..1). Mengingat bahwa nilai optimal kontrol P^* harus *non negatif*, sehingga P^* akan menjadi

$$P^*(t) = maks\{P(t), 0\}$$

Dan kemudian I^* akan kita peroleh langsung dengan menggunakan (3.1.1) yaitu

$$\theta(t, I^*(t)) = P^*(t) - D(t) - \frac{d}{dt}\mathrm{I}^*(\mathrm{t})$$

Berarti kita peroleh

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}^*(\mathrm{t}) = P^*(t) - D(t) - \theta(t, I^*(t))$$

Sedangkan berdasarkan fungsi eksogen $\theta\big(t, I(t)\big) = \theta_1 I(t) + \theta_2$ berarti

$$\theta(t, I^*(t)) = \theta_1 I^*(t) + \theta_2$$

Sehingga akan didapatkan

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}^*(t) = P^*(t) - D(t) - (\theta_1 \mathrm{I}^*(\mathrm{t}) + \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}I^*(t) = -\theta_1 I^*(t) + P^*(t) - D(t) - \theta_2.$$

Berdasarkan bentuk solusi sistem $\dot{x}_1(t) = Ax + Bu \;\; dengan \;\; x(t_0) = x_0$ dapat dinyatakan dalam bentuk solusi

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau.$$

Maka dengan membentuk solusi sesuai dengan permasalahan di atas akan kita peroleh hasil solusi dalam batas interval dari *(0,t)* adalah sebagai berikut:

$$I^*(t) = I_0 e^{-\theta_1 t} + \int_0^t [P^*(s) - D(s) - \theta_2] e^{\theta_1 (s-t)}\, ds.$$

Sehingga bentuk akhir diperoleh

$$I^*(t) = I_0 e^{-\theta_1 t} + \int_0^t [P^*(s) - D(s) - \theta_2] e^{\theta_1 (s-t)}\, ds$$

3.2 Perluasan Model

Solusi optimal untuk masalah ($\mathcal{P}$) yang dihasilkan *Corollary* 3.2 dapat diperluas dalam beberapa kondisi pada kasus perencanaan waktu yang lama. Berikut akan kita bahas kasus untuk $T \to \infty$. Dengan asumsi bahwa $\rho > 0$. Kita akan tunjukkan bahwa solusi limit menuju tak hingga memiliki masalah solusi optimal yang akan diselesaikan sebagai berikut

$$(\mathcal{P}\infty) \qquad \begin{cases} \min\limits_{P(t)\geq 0} J(P,I) = \int_0^\infty F\big(t, I(t), P(t)\big) dt \\ \frac{d}{dt} I(t) = f\big(t, I(t), P(t)\big), \quad I(0) = I_0 \end{cases}$$

Dimana

$$F\big(t, I(t), P(t)\big) = e^{-\rho t}\left(\frac{1}{2}\left[h\big(I(t)\big) - h(\hat{I})\right]^2 + \frac{1}{2}\left[K\big(P(t)\big) - K(\hat{P})\right]^2 + \frac{c}{2}\left[\theta\big(t, I(t)\big) - \hat{\theta}\right]^2\right)$$

$$f\big(t, I(t), P(t)\big) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))$$

Untuk kasus tak hingga, kondisi akhir $\lambda(T) = 0$ akan diubah menjadi

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0 \quad , \qquad (3.2.1)$$

Maka akan kita peroleh solusi yang unik

$$a_1 = \frac{b_2 - (m_2 + \theta_1) e^{m_2 T} b_1}{(m_1 + \theta_1) e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1) e^{m_2 T}}$$

$$a_2 = \frac{(m_2 + \theta_1) e^{m_2 T} b_1 - b_2}{(m_1 + \theta_1) e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1) e^{m_2 T}}$$

Sehingga akhirnya akan diperoleh :

$$P_\infty^*(t) = maks\{P(t), 0\}$$

$$I_\infty^*(t) = I_0 e^{-\theta_1 t} + \int_0^t [P_\infty^*(s) - D(s) - \theta_2] e^{\theta_1 (s-t)}\, ds$$

4. KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari uraian bab-bab sebelumnya dan pembahasan tentang kendali optimal dari sebuah sistem inventori produksi yang mengalami kemerosotan dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Kita dapat menggunakan kendali optimal dari sebuah sistem inventori produksi yang mengalami kemerosotan. Andaikan hasil perolehan rata-rata permintaan D, produksi yang dapat diawasi nilai rata-ratanya P, dan pemerosotan yang terjadi rata-ratanya θ, mengikuti tingkat inventori $I(t)$, berkembang secara dinamis berdasarkan persamaan state. Menurut Hesaam K. Alfares (*Integrating quality and maintenance decisions in a production-inventory model for deteriorating items*) bahwa dalam periode produksi $[0, t_1]$. Selama masa ini, inventori akan bertambah banyak selama masa produksi tetapi akan berkurang dengan adanya permintaan dan kemerosotan sehingga akan diperoleh *inventory differential equation (IDE)* adalah sebagai berikut:

   $\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))$. Adapun caranya dengan terlebih dahulu membentuk model persamaan diferensialnya kemudian teori yang digunakan melibatkan fungsi Hamiltonian yaitu:

   $H(t, I(t), P(t), \lambda(t)) = -F\big(t, I(t), P(t)\big) + \lambda(t) f\big(t, I(t), P(t)\big)$ disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen, sehingga dapat ditentukan solusi optimalnya yaitu rata-rata optimal produksi pada sistem inventori produksi yang keadaannya mengalami penurunan.

2. Model berikutnya di kembangkan solusinya untuk nilai t menuju tak hingga, dengan asumsi bahwa $\rho > 0$. Untuk kasus tak hingga, kondisi akhir $\lambda(T) = 0$ akan diubah menjadi $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$, dimana nilai λ merupakan *adjoin*t fungsi yang terdapat dalam masalah ($\mathcal{P}$) dengan mempergunakan produksi rata-rata $P(t)$ selalu terbatas dan juga $K_1{}^2(P(t) - \hat{P})$ adalah terbatas. Melibatkan fungsi *Hamiltonian yang* diselesaikan dengan *prinsip maksimum Pontryagin.* Solusi optimal diberikan detail dengan menggunakan fungsi eksogen. Ini akan bermanfaat sebagai salah satu bentuk solusi dengan menggunakan fungsi eksogen. Kita mendapatkan prosedur solusi bisa menjadi lebih atau sedikit sukar, hal ini akan bergantung pada bentuk fungsi yang akan diperoleh.

4.2 Saran

Dapat dilakukan penelitian lebih lanjut untuk menyelidiki sifat-sifat sistem inventorinya, kemudian hal yang terkait dengan sistem inventori produksi yang mengalami peningkatan.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., 1988. *Calculus.* Drexel University, John Wiley & Sons, New York.

Burghes, D.N *Introduction to Control Theory Including Optimal Control* .John Wiley & Sons. New York.

Chi-Tsong Chen, 1984. *Linear System Theory and Design,* Madison Avenue New York.

Danese,A.E. 1965. *Advanced Calculus an introduction to Applied Mathematics.*

Edwin K.P Chong, 1996. *An introduction to Optimization*, John Wiley & Sons. New York.

Frank L.Lewis, *Applied Optimal Control & Estimation.* The University of Texas at Arlington. New York.

Haberman, R., 1977. *Mathematical Models in Mechanical Vibrations, Population Dynamics and Traffic Flow.* Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

Hamdy A.Taha.1998. *Operations Research an Introduction.*Prentice Hall International, Inc.Philippines.

Katsuhiko Ogata.1995.*Discrete-Time Control Systems*, 2 editions, Prentice-Hall International, INC.

Murray R. Spiegel Statistic Schaum, 2 edition Renselaer Polytechnic Institut Hartford.

Olsder, G.J., 1994. *Mathematical System Theory*, 1 . Delft University of Technlogy. Netherlands.

Perko, L., 1991. *Differential Equation and Dynamical System.* Springer-Verlag, New York.

Shepley L.Ross.1984. *Differential Equation.* 3 Editions, John Wiley & Sons. New York.

Serge Lang, 1968. *Linear Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company.New York.

Stephen F.Love.1979. *Inventory Control.* McGraw-Hill International Book Company.Tokyo.

Stewart,J.1998.*Kalkulus Jilid II. Edisi 5.* Penerbit Erlangga. Jakarta

Verhulst, Ferdinan, 1996. *Nonlinear Differential Equation and Dynamical System*, 2 edition, Springer-Verlag, Berlin Heidlberg.

Wiggins, S., 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos.* Springer-Verlag, New York.

Seminar Nasional Matematika II

Sertifikat

diberikan kepada

Pardi Affandi

Atas partisipasinya dalam Seminar Nasional Matematika II dengan Tema: "Meningkatkan Kualitas Sumber Daya Manusia dalam Persaingan Global Melalui Pendidikan dan Aplikasi Matematika", yang diselenggarakan oleh Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Udayana pada tanggal 8 Oktober 2016 di Universitas Udayana Kampus Sudirman, Denpasar - Bali

Sebagai

Pemakalah

Dengan judul

"Perluasan Model Kendali Optimal Pada Masalah Inventori yang Mengalami Penurunan Mutu"

Bukit Jimbaran, 8 Oktober 2016

Dekan FMIPA Universitas Udayana

Drs. Ida Bagus Made Suaskara, M.Si.
NIP.19660611 199702 1 001

Ketua Panitia,

I Wayan Sumarjaya, S.Si., M.Stats
NIP. 19770421 200501 1 001