BUKU AJAR RISET OPERASI

PARDI AFFANDI

CV IRDH

BUKU AJAR RISET OPERASI

Oleh	: Pardi Affandi
Perancang Sampul	: Rojagid Ariadi Mohammad
Penata Letak	: Laila Nur Hayati
Penyunting	: Cakti Indra Gunawan
Pracetak dan Produksi	: Yohanes Handrianus Laka

Cetakan pertama Mei 2019

Penerbit CV IRDH

Anggota IKAPI No. 159-JTE-2017

Office: Jl. Sokajaya No. 59, Purwokerto

New Villa Bukit Sengkaling C9 No. 1 Malang

HP / WA 081333252968 / 089621424412

www.irdhcenter.com

Email: buku.irdh@gmail.com

ISBN: 978-602-0726-57-1

i-xiiint + 143 hlm, 25 cm x 17.6 cm

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim.

Alhamdulillahirobbil'alamin, Segala puji syukur penulis panjatkan bagi Allah *SWT* yang Maha Segalanya atas rahmat, kasih sayang, pertolongan dan anugerah-Nya, sehingga buku ajar ini dapat diselesaikan. Sholawat dan salam tak lupa penulis sampaikan kepada junjungan dan panutan Nabi Muhammad *SAW* beserta keluarga, sahabat, serta para penegak sunnahnya hingga akhir zaman. Melengkapi bahan sumber pendukung bagi mahasiswa matematika FMIPA Universitas Lambung Mangkurat, buku ajar ini disajikan dengan sangat sederhana diharapkan akan dapat membantu mempermudah pemahaman bagi mahasiswa dalam mempelajarinya.

Buku ajar ini mencakup materi untuk perkuliahan mata kuliah Operasi Riset pada jenjang S1 Jurusan Matematika. Materi dirancang untuk disajikan sesuai dengan kurikulum yang dipakai. Penulis menyampaikan penghargaan dan terima kasih kepada banyak pihak yang mendukung hingga selesainya buku ajar Operasi Riset ini, mulai dari penyusunan materi sampai akhirnya buku ajar berjudul “Operasi Riset“ ini dapat diselesaikan.

Akhirnya penulis sadar dalam membuat dan menyusun buku ajar ini kemampuan dan keterbatasan yang penulis miliki sehingga sangat mengharapkan kritik, saran serta masukan untuk perbaikan buku ajar ini agar menjadi sebuah buku ajar yang baik dan berguna bagi kita semua.

DAFTAR ISI

BAB 1
PENGANTAR RISET OPERASI

Tujuan pembelajaran

Bab ini bertujuan agar mahasiswa mampu menguasai konsep tentang Perkembangan Riset Operasi dan definisi Riset Operasi secara teoritis juga bagian khusus dalam bidang operasi riset secara mendalam, serta mampu memformulasikan penyelesaian masalah prosedural model dari sistem baik yang diterministik maupun probabilistik serta mampu mampu merekonstruksi, memodifikasi, menganalisis/berpikir secara terstruktur terhadap permasalahan matematis dari terkait Model-model di dalam Riset Operasi, mengkaji keakuratan dan menginterpretasikannya dalam kehidupan nyata.

1.1 Perkembangan Riset Operasi

Istilah Riset Operasional (Operation Reseach) pertama kali digunakan pada tahun 1940 di suatu kota kecil Bowdsey Inggris. Riset Operasi adalah suatu metode pengambilan keputusan yang dikembangkan dari studi operasional-operasional militer selama Perang Dunia II. Dalam perang tersebut, Riset Operasi digunakan dalam mengalokasikan sumber-sumber atau input yang terbatas guna melayani berbagai operasi militer dan kegiatan-kegiatan di dalam setiap operasi secara efisien dan efektif. Tujuannya untuk menerapkan pendekatan ilmiah guna memecahkan permasalahan atau persoalan pada operasi militer ditambah lagi dengan permasalahan strategi dan taktis militer. Setelah bidang militer yang sudah dinyatakan sukses, industri secara bertahap mengaplikasi penggunaan riset operasi, pada tahun 1951 dunia industri dan bisnis dalam riset operasi memberikan dampak besar pada organisasi manajemen.

Banyak keputusan utama yang harus diambil oleh manajer dalam perusahaan untuk mencapai tujuan yang diinginkan perusahaan dalam situasi lingkungan yang serba terbatas. Batasan-batasan tersebut meliputi terbatasnya sumber daya seperti tenaga kerja, waktu, bahan baku, uang, dan lain-lain. Riset operasi banyak diterapkan dalam menyelesaikan masalah-masalah manajemen untuk meningkatkan produktivitas dan efisiensi.

Riset operasi dimulai sejak revolusi industri dilakukan. Dunia usaha mengalami perubahan dalam hal ukuran (besarnya) dan kompleksitas organisasi-organisasi perusahaan. Bagian yang mengalami perubahan yang cukup menyolok adalah perkembangan dalam pembagian kerja dan segmentasi tanggung jawab manajemen dalam organisasiorganisasi tersebut. Disisi lain, organisasi-organisasi (perusahaan) pada saat ini harus beroperasi di dalam situasi dan kondisi lingkungan bisnis yang dinamis dan selalu bergejolak, serta siap untuk berubah-ubah. Perubahan-perubahan tersebut terjadi sebagai akibat dari kemajuan teknologi yang begitu pesat ditambah dengan dampak dari beberapa faktor-faktor lingkungan lainnya seperti keadaan ekonomi, politik, sosial dan sebagainya. Perkembangan Kemajuan teknologi tersebut telah menghasilkan dunia komputerisasi. Buah-buah pembangunan telah melahirkan para pimpinan dan pengambilan keputusan, para peneliti, perencana dan pendidik untuk memikirkan serta memecahkan/menganalisis permasalahan, mengambil langkah-langkah dan strategi yang tepat serta target yang sesuai secara sistematis dalam rangka mencapai tujuan yang telah ditentukan, yakni hasil yang memuaskan. Hasil yang memuaskan tersebut adalah hasil yang optimal yang berarti dampak positifnya maksimum dan dampak negatifnya minimum.

1.2. Definisi Riset Operasi Menurut Para Ahli

Beberapa definisi riset operasi berkenaan dengan pengambilan keputusan yang optimal berdasarkan beberapa orang ahli.

Menurut Morse dan Kimbal:

- **Riset Operasi adalah** metode ilmiah (scientific method) yang memungkinkan para manajer mengambil keputusan mengenai kegiatan yang mereka tangani secara kuantitatif.

Menurut Curchma, Arkoff dan Arnoff:

- **Riset Operasi adalah** aplikasi metode-metode, teknik-teknik dan peralatan ilmiah dalam menghadapi masalah yang timbul di dalam operasi perusahaan dengan tujuan ditemukannya pemecahan optimum dari masalah-masalah tersebut

Menurut Miller dan Starr:

- **Riset Operasi adalah** sebagai peralatan manajemen yang menyatukan ilmu pengetahuan, matematika dan logika dalam kerangka pemecahan masalah yang dihadap sehari-hari, sehingga akhirnya permasalahan tersebut dapat dipecahkan secara optimal.

Dari beberapa definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa riset operasi berkenaan dengan pengambilan keputusan yang optimal dalam, dan penyusunan model dari sistem-sistem baik yang diterministik maupun probabilistik yang berasal dari kehidupan nyata. Atau dunia pengelolaan atau dunia usaha yang memakai pendekatan ilmiah atau pendekatan sistematis disebut *riset operasi (Operations Resech).*

Tim-tim riset operasi dalam lingkungan dunia bisnis ini menandai kemajuan teknik-teknik riset operasi. Sebagai contoh utama adalah metode simpleks untuk pemecahan masalah-masalah linear programming, yang dikembangkan oleh George Dantzig dalam tahun 1947. Disamping itu banyak peralatan-peralatan riset operasi standar, seperti linear programming, dynamic programming, teori antrian dan teori pengendalian persediaan telah dikembangkan sebelum akhir tahun 1950-an.

Sehingga Riset operasi berkenaan dengan pengambilan keputusan optimal dan penyusunan model dari sistem-sistem baik deterministik maupun probabilistik yang berasal dari kehidupan nyata.Riset operasi juga mengandung pendekatan atau aplikasi sangat berguna dalam menghadapi masalah bagaimana mengarahkan dan mengkoordinasikan operasi-operasi atau kegiatan-kegiatan dalam suatu organisasi dengan segala batasan-batasannya melalui prosedur "*search for optimality*", berkenaan dengan penggunaan matematika dan logika dalam pengambilan keputusan operasi sehingga diperoleh hasil yang terbaik.

Model-model dalam riset operasi dikelompokkan ke dalam 3 bagian utama, yaitu:

1) Teknik Pemrograman Matematika

   Teknik pemrograman matematika berguna untuk mencari harga optimum fungsi beberapa variabel yang memenuhi sekumpulan kendala. Beberapa model di antaranya meliatkan penggunaan kalkulus dan metode numeric dalam penyelesaiannya. Model-model yang termasuk dalam teknik ini, antara lain Metode Kalkulus, Pemrograman Tak Linier, Pemrograman Geometri, Pemrograman Kuadratis, Pemrograman Linier, Pemrograman Dinamis, Pemrograman Bilangan Bulat, Metode Jaringan: CPM dan PERT, Teori Permainan, Pemrograman Terpisah, Pemrograman dan Sasaran Ganda.

2) Teknik Pemesanan Stokastik

Teknik pemrosesan stokastik dapat dipakai untuk menganalisis masalah yang dinyatakan oleh variabel random yang diketahui distribusi probabilitasnya. Model yang termasuk dalam teknik ini antara lain: Proses Markov, Teori Antrian, Simulasi dan teori Reliabilitas.

3) Metode Statistik

Metode statistik berguna untuk menganalisis data eksperimental dan membuat model empiris untuk mendapatkan representasi yang paling akurat tentang suatu sistem fisis. Karena pemakaiannya sangat luas, metode statistic kemudian menjadi cabang ilmu tersendiri.

Model yang termasuk dalam bagian ini adalah: Analisis Regresi, Analisis Cluster, Pengenalam Pola (*Pattern Recognition*), Rancangan Percobaan dan Analisis Diskriminan.

1.3. Manfaat Riset Operasi

Beberapa manfaat dari *Riset Operasi* diantaranya adalah:

1. Merupakan alat untuk pengambilan keputusan yang optimal dari berbagai sumber daya yang tersedia.
2. *Riset Operasi* berusaha menetapkan arah tindakan terbaik (optimum) dari sebuah keputusan masalah dengan pembatasan sumber daya terbatas.

3. Memberikan pengembangan dari beberapa sektor keilmuan, seperti matematik, teknik dan ilmu perhitungan, ilmu politik, ekonomi, teori probabilitas dan statistik.
4. Memberikan kemudahan dalam pengambilan keputusan kegiatan kerja dalam bidang industri, bisnis, dan manajemen.

1.4 Tujuan Riset Operasi

Tujuan dari Riset Operasi adalah menerapkan pendekatan ilmiah guna memecahkan permasalah atau persoalan memikirkan serta memecahkan/menganalisis permasalahan, mengambil langkah-langkah dan strategi yang tepat serta target yang sesuai secara sistematis dalam rangka mencapai tujuan yang telah ditentukan, yakni hasil yang memuaskan. Hasil yang memuaskan tersebut adalah hasil yang optimal yang berarti dampak positifnya maksimum dan dampak negatifnya minimum.

1.5 Penerapan Dalam Kehidupan Sehari-hari

Sejalan dengan pekembangan dunia industri dan didukung dengan kemajuan dibidang komputer, Riset Operasi semakin diterapkan di berbagai bidang untuk menangani masalah yang cukup kompleks. Berikut ini adalah contoh-contoh penggunaan Riset Operasi dibeberapa bidang diantaranya:

Akuntansi dan Keuangan:

a. Penentuan jumlah kelayakan kredit
b. Alokasi modal investasi dari berbagai alternative
c. Peningkatan efektivitas akuntansi biaya
d. Penugasan tim audit secara efektif

Pemasaran:

a. Penentuan kombinasi produk terbaik berdasarkan permintaan pasar
b. Alokasi iklan diberbagai media
c. Penugasan tenaga penjual kewilayah pemasaran secra efektif
d. Penempatan lokasi gudang untuk meminimumkan biaya distribusi
e. Evaluasi kekuatan pasar dari strategi pemasaran pesaing

Operasi Produksi:

a. Penentuan bahan baku yang paling ekonomis untuk kebutuhan pelanggan
b. Meminimumkan persediaan atau inventori
c. Penyeimbangan jalur perakitan dengan berbagai jenis operasi
d. Peningkatan kualitas operasi manufaktur

Aplikasi riset operasi juga mempunyai dampak yang kuat dalam studi masalah sosial dan pekerjaan umum. Orang menjadi lebih sadar tentang bagaimana riset operasi dapat membantu aktifitas pembagian keputusan sehari-hari. Aplikasi dalam kesehatan masyarakat, perencanaan kota, dan sistem pendidikan kini sudah ditemukan.

Pembentukan Model dalam Riset Operasi pembuatan model melibatkan 3 komponen dasar yang penting, yaitu:

1. Variabel keputusan, yaitu faktor-faktor yang memengaruhi nilai ujian.
2. Tujuan, yaitu suatu fungsi atau persamaan yang menghubungkan variabel dan membentuk keatuan tentang apa yang ingin dicapai. Dalam riset operasi kita mengoptimalkan

harga fungsi tujuan. Artinya, kita mencari nilai-nilsi variabel yang akan meminimumkan/memaksimumkan fungsi tujuan.

3. Kendala, yaitu sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang membatasi harga suatu variabel. Harga variabel yang mengoptimumkan fungsi tujuan harus memenuhi semua kendala yang dtetapkan.

Solusi dari model ini layak jika memenuhi semua kendala. jika optimal jika, selain layak itu menghasilkan nilai terbaik (maksimum atau minimum) dari fungsi tujuan.

RANGKUMAN

1. Secara umum riset operasi berkenaan dengan pengambilan keputusan yang optimal dari sistem-sistem baik yang diterministik maupun probabilistik yang berasal dari kehidupan nyata. Atau dunia pengelolaan atau dunia usaha yang memakai pendekatan ilmiah atau pendekatan sistematis disebut riset operasi (Operations Research).
2. Tujuan dari *Riset Operasi* adalah menerapkan pendekatan ilmiah guna memecahkan permasalahan atau persoalan, dengan mengambil langkah-langkah dan strategi yang tepat serta target yang sesuai secara sistematis dalam rangka mencapai tujuan yang telah ditentukan secara optimal.
3. Sejalan dengan pekembangan dunia industri dan didukung dengan kemajuan dibidang komputer, *Riset Operasi* semakin diterapkan di berbagai bidang untuk menangani masalah yang cukup kompleks. Beberapa contoh-contoh penggunaan *Riset Operasi* dibeberapa bidang yaitu Akuntansi dan Keuangan, Pemasaran, Operasi Produksi, dan lain-lain.

4. Model dalam riset operasi terbagi atas 3 bagian utama, yaitu: Teknik pemrograman matematika, Teknik pemrosesan stokastik dan metode statistik.
5. Dalam riset operasi, pembuatan model melibatkan 3 komponen dasar yang penting, yaitu variabel keputusan, tujuan dan kendala.
6. Tahapan-tahapan dalam penerapan Riset Operasi untuk memecahkan persoalan adalah sebagai berikut: Merumuskan/menganalisis persoalan sehingga jelas tujuan apa yang akan dicapai, Pembentukan model matematika untuk mencerminkan persoalan yang akan dipecahkan, Mencari pemecahan dari model yang telah dibuat dalam tahap sebelumnya, Menguji model dan hasil pemecahan dari penggunaan model. Sering juga disebut melakukan validasi, Implementasi hasil pemecahan.

Contoh Soal dan Pembahasan

1. Apakah yang dimaksud dengan Riset Operasi?
2. Menurut Rao (1984), model dalam riset operasi terbagi atas 3 bagian utama. Sebutkan dan jelaskan kegunaan serta berikan masing-masing minimal 3 contoh!
3. Telitilah mana di antara model-model berikut ini yang dapat diselesaikan dengan program linier:
   a. Maksimumkan f(x_1, x_2)= 5x_1+ x_2^2

      Kendala:

      -x_1+ 4x_2 = 3

      3x_1+ 4x_2= -5

      x_1,$x_2 \geq 0$

   b. Minimumkan f x_1,x_2,x_3 = 5x_1+2x_2- x_3

Kendala:

$2x_1 - 4x_1x_2 = 3$

$5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$

$x_1, x_2, x_3, \geq 0$

c. Minimumkan f $x_1, x_{2,} = x_1 - x_{2,}$

Kendala:

$4x_1 + x_{2,} = 2$

$3x_1 - x_{2,} = 1$

d. Maksimumkan f $x_1, x_{2,} x_3 = -x_1 + 3x_2$

Kendala:

$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1$

$3x_1 + x_2 \leq 2$

$x_1, x_2, x_3, \geq 0$

e. Minimumkan f $x_1, x_{2,} = x_1^2 x_2^2$

Kendala:

$x_1^2 x_2^2 \geq e^3$

$x_1 \; x_2^4 \geq e^4$

$x_1^2 x_2^3 \geq e$

$x_1, x_{2,}, \geq 0$

4. Sebuah perusahaan mebel akan membuat meja dan kursi. Setiap meja membutuhkan $5m^2$ kayu jati dan $2m^2$ kayu pinus, serta membutuhkan waktu pembuatan selama 4 jam. Untuk membuat sebuah kursi dibutuhkan $2m^2$ kayu jati, $3m^2$ kayu pinus dan 2 jam kerja. Dari penjualan sebuah meja didapatkan keuntungan sebesar Rp12.000,00 sedangkan keuntungan dari sebuah kursi adalah Rp 8000,00. Mebel itu ingin membuat sebanyak-banyaknya, tetap terbatas dalam bahan baku dan tenaga kerja. Dalam seminggu ia hanya mampu mendapatkan $150m^2$ kayu jati, $100m^2$ kayu pinus, serta hanya memiliki 80 jam kerja.

Masalah: Berapa buah meja dan kursi yang harus ia buat mengingat kendala yang ada, supaya ia memperoleh keuntungan sebanyak-banyaknya?

Buatlah model riset operasi (variabel keputusan, tujuan dan kendala) dari permasalahan diatas disertakan penjelasannya!

5. Dalam Riset Operasi ada sebuah model bernama pemrograman linier, dan salah satu penyelesaian pemrograman linier adalah dengan metode grafik. Jawablah soal berikut dengan metode grafik!

   Minimumkan:

   $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$

   Kendala:

   $x_1 + x_2 \leq 8$

   $6x_1 + 4x_2 \geq 12$

   $4x_1 + 8x_2 = 20$

Pembahasan

1. Riset operasi berkenaan dengan pengambilan keputusan yang optimal dalam, dan penyusunan model dari, sistem-sistem baik yang diterministik maupun probabilistik yang berasal dari kehidupan nyata. Atau dunia pengelolaan atau dunia usaha yang memakai pendekatan ilmiah atau pendekatan sistematis disebut riset operasi.
2. Menurut Rao (1984), model dalam riset operasi terbagi atas 3 bagian utama, yaitu:

A. Teknik Pemrograman Matematika

Teknik pemrograman matematika berguna untuk mencari harga optimum fungsi beberapa variabel yang memenuhi sekumpulan kendala. Beberapa model diantaranya melibatkan penggunaan kalkulus dan metode numerik dalam penyelesaiannya.

Model-model yang termasuk dalam tekni ini, antara lain:

a) Metode Kalkulus,
b) Pemrograman Tak Linier,
c) Pemrograman Geometri,
d) Pemrograman Kuadratis,
e) Pemrograman Linier,
f) Pemrograman Dinamis,
g) Pemrograman Bilangan Bulat,
h) Metode Jaringan, CPM dan PERT,
i) Teori Permainan,
j) Pemrograman Terpisah,
k) Pemrograman Sasaran Ganda,

B. Teknik Pemrosesan Stokastik

Teknik Pemrosesan stokastik dapat dipakai untuk menganalisis masalah yang dinyatakan oleh variabel random yang diketahui distribusi probabilitasnya.

Model yang termasuk dalam teknik ini antara lain:

a) Proses Markov,
b) Teori Antrian,
c) Simulasi,
d) Teori Reliabilitas,

C. Metode Statistik

Metode statistik digunakan untuk menganalisis data eksperimental dan membuat moel empiris untuk mendapatkan representasi yang paling akurat tentang suatu sistem fisis. Karena pemakaiannya sangat luas, metode statistik kemudian menjadi cabang ilmu sendiri.

Model yang termasuk kedalam bagian ini adalah:

a) Analisis Regresi,

b) Analisis Cluster,

c) Pengenalan Pola *(Pattern Recognition),*

d) Rancangan Percobaan,

e) Analisis Diskriminan,

3. Model-model berikut ini yang dapat diseesaikan dengan program linier:

a. Bukan merupakan bentuk program linier karena fungsi sasarannya mengandung suku x_2^2 , yang jelas bukan merupakan bentuk linier.

b. Bukan merupakan bentuk program linier meskipun fungsi sasarannya merupakan bentuk linier dalam $x_1, x_2,$ dan x_3, tetapi ada kendala yang memuat bentuk pergandaan variabel (4 x_1, x_2). Perhatikan di sini bahwa meskipun fungsi sasaran maupun kendala lain sudah berbentuk linier, namun jika ada satu kendala saja yang tidak berbentuk linier, maka model tidak bias diselesaikan dengan program linier.

c. Model program linier. Tampak bahwa baik fungsi maupun kedua kendala merupakan bentuk fungsi linier dalam $x_1$dan

x_2. Meskipun tidak adda syarat $x_1, x_2 \geq 0$, dengan sedikit transformasi, bentuk tetap dapatdiselesaikan dengan program linier.

d. Model program linier dalam 3 variabel x_1 , $x_{2,}$ dan x_3 . Meskipun kendala berbentuk pertidaksamaa, tetapi dengan transformasi sederhana dapat dijadikan ke bentuk persamaan (cara transformasi dibahas dalam Bab 3). Perhatikan juga bahwa meskipun merupakan model dalam 3 variabel x_1,$x_{2,}$ dan x_3, tetapi tidak semua variabelnya muncul dalam fungsi sasaran maupun kendalanya. Fungsi sasaran f x_1,$x_{2,}x_3 = -x_1+3x_2$ yang merupakan fungsi 2 variabel sama dengan fungsi f x_1,$x_{2,}x_3 = -x_1+3x_2+0x_3$ yang merupakan fungsi 3 variabel.

e. Meskipun tampak bahwa model bukan merupakan model program linier, tetapi dengan suatu transformasi dapat dijadikan program linier.

Fungsi ln(x) merupakan fungsi monoton sehingga meminimumkan f(x) sama dengan meminimumkan ln(f(x)). Misalkan y_1 =ln (x_1), y_2 = ln (x_2). Dengan mengingat bahwa ln (xy) = ln (x) + ln (y), ln (x^a) =a ln (x) dan ln (e)= 1, fungsi sasaran dapat dituliskan sebagai:

$g\ y_1 y_2 \ = \ln f\ \ x_1^2 x_2^2$

$= \ln x_1^2 + \ln x_2^2$

$= 2 \ln x_1 + 2 \ln x_{2,}$

$= 2\, y_1 + 2\, y_2$

Maka model hasil transformasi adalah:

Minimumkan $g\ y_1 y_2 \ = 2y_1 + 2y_2$

Kendala

$3y_1 + 2y_2 \geq 3$

$y_1 + 4y_2 \geq 4$

$2y_1 + 3y_2 \geq 1$

$y_1, y_2 \geq 0$

4. Penyelesaian

   Keuntungan ditentukan oleh seberapa banyak meja dan kursi yang dibuat. Oleh karena itu dibuat variabel keputusan sebagai berikut:

   Misalkan:

   x_1 = Jumlah meja yang harus dibuat

   x_2 = Jumlah kursi yang harus dibuat

   Tujuan:

   Tujuan dari perusahaan tersebut adalah memaksimumkan keuntungan. Keuntungan sebuah meja adalah Rp12.000,00 dan sebuah kursi adalah Rp 8.000,00. Karena ia membuat x_1 meja dan x_2 kursi (x_1 dan x_2 adalah besaran yang akan dicari), maka total keuntungan yang ia peroleh adalah sebesar:

   $f(x_1, x_2) = 12.000\ x_1 + 8.000\ x_2$

   Fungsi inilah yang akan dioptimalkan (dalam kasus ini dimaksimalkan). Jika tidak ada kendala, penyelesaian masalh ini menjadi mudah, yaitu dengan membuat x_1 dan x_2 sebesar-besarnya. Dengan memperbanyak jumlah meja dan kursi yang dibuat, maka perusahaaan itu akan memperoleh keuntungan yang semakin besar. Tetapi keadaan itu tidak dapat dicapai mengingat keterbatasan bahan baku (kayu jati dan pinus) serta tenaga kerja.

Kendala:

Keterbatasan bahan baku dan tenaga kerja dapat dinyatakan dalam table di bawah ini:

Sumber Daya	Meja	Kursi	Persediaan
Kayu Jati	5	2	150
Kayu Pinus	2	3	100
Jam Kerja	4	2	80

Dengan membaut x_1 buah meja dan x_2 buah kursi, maka kendala yang harus dipenuhi adalah:

$5x_1 + 2x_2 \leq 150$

$2x_1 + 3x_2 \leq 100$

$4x_1 + 2x_2 \leq 80$

$x_1, x_2 \geq 0$ (bisa juga ditambahkan syarat bahwa x_1 dan x_2 bilangan bulat)

Dengan demikian model yang sesuai untuk kasus perusahaan mebel diatas adalah:

Maksimumkan $f(x_1, x_2) = 12.000\ x_1 + 8.000\ x_2$

Kendala:

$5x_1 + 2x_2 \leq 150$

$2x_1 + 3x_2 \leq 100$

$4x_1 + 2x_2 \leq 80$

$x_1, x_2 \geq 0$

5. Penyelesaian

1) Kendala: $x_1 + x_2 \leq 8$

Jika $x_1 = 0$, maka $x_2 = 8$. Didapat titik $A(0,8)$.

Jika $x_2 = 0$, maka $x_1 = 8$. Didapat $B(8,0)$.

Garis $x_1 + x_2 = 8$ merupakan garis yang menghubungkan titik A dan B. Jika titik uji $(0,0)$ dimasukkan dalam kendala, maka pertidaksamaan bernilai benar sehingga daerah penyelesaian kendala adalah segitiga AOB.

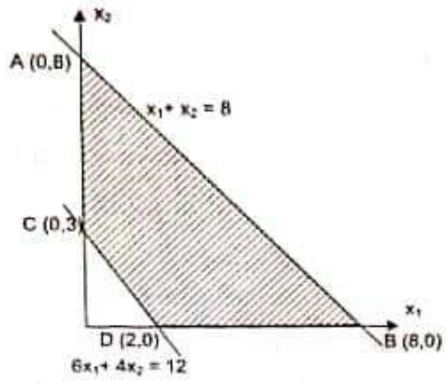
2) Kendala $6x_1 + 4x_2 \geq 12$

Jika $x_1 = 0$, maka $x_2 = 3$. Didapat titik $C(0,3)$.

Jika $x_2 = 0$, maka $x_1 = 2$. Didapat titik $D(2,0)$.

Garis $6x_1 + 4x_2 = 12$ merupakan garis yang menghubungkan titik C dan D. Jika titik uji $(0,0)$ dimasukkan dalam kendala, maka pertidaksamaan bernilai salah sehingga daerah penyelesaian kendala adalah daerah tak berhingga disisi kanan/atas garis CD.

Irisan daerah penyelesaian kendala (1) dan kendala (2) berupa segiempat ABCD yang tampak pada daerah berarsir Gambar 1.



Gambar 1.

Kendala $4x_1 + 8x_2 = 20$

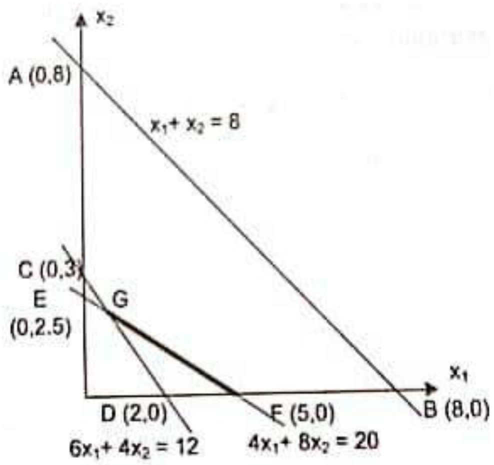
Tidak seperti kendala yang lain, daerah penyelesaian kendala persamaan hanyalah berupa suatu garis (bukan suatu bidang datar).

Jika $x_1 = 0$, maka $x_2 = 2.5$. Didapat $E(0{,}2.5)$.

Sebaliknya, jika $x_2 = 0$, maka $x_1 = 5$. Didapat $F(5{,}0)$.

Garis EF adalah daerah penyelesaiannya.

Daerah fisibel pada soal ini adalah garis yang menghubungkan titik F dengan titik G (perpotongan garis EF dan CD). Dalam gambar 2, daerah fisibel ditandai dengan garis tebal. Perhatikan bahwa daerah fisibel tidak selalu berupa segin-n, tapi bias berupa garis lurus, bahkan hanya sebuah titik saja.



Gambar 2

Titik G adalah perpotongan garis $4x_1 + 8x_2 = 20$ dengan garis $6x_1 + 4x_2 = 12$.

Penyelesaian kedua persamaan menghasilkan $G\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

Nilai fungsi dititik $F = f(5{,}0) = 3(5) + 2(0) = 15$.

Nilai fungsi dititik $G = f\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{9}{4}\right) = 6$.

Titik minimumnya adalah titik $G\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ dengan nilai minimum 6.

BAB 2
PROGRAM LINEAR

Tujuan pembelajaran

Bab ini bertujuan agar mahasiswa mampu menguasai konsep tentang bentuk umum Program Linier yang merupakan salah satu metode penyelesaian masalah dalam Riset Operasi, disertai dengan beberapa definisi Program Linier, serta mampu memformulasikan penyelesaian masalah procedural serta mampu Mampu merekonstruksi, memodifikasi, menganalisis/berpikir secara terstruktur terhadap permasalahan matematis terkait dengan model-model dalam Program Linier yaitu teknik memaksimumkan dan meminimukan (Pemodelan Matematika) secara mendalam dan mampu menginterpretasikannya dalam menyelesaikan permasalahan teori permainan.

2.1. Pendahuluan

Salah satu teknik penyelesaian suatu masalah dalam riset operasi yaitu dengan menggunakan teknik program linier. Program linier ini menjadikan model matematis untuk menemukan solusi dari permasalahan yang dihadapi. Terdapat kata “Linier” yang berarti dalam proses pemecahan permasalahan model matematis yang digunakan dalam bentuk fungsi linier. Sedangkan kata “Program” mengarah pada proses perencanaan solusi untuk kejadian selanjutnya. Program linier berkaitan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu model matematik yang terdiri dari sebuah fungsi linier dengan beberapa kendala linier (Siringoringo, 2005). Merode program linier pertama kali di temukan oleh ahli statistika dari Amerika Serikat yang bernama Prof Deorge Dintzig yang memiliki julukan *“Father of the*

Linear Programming". Penggunaan teknik ini hanya dapat dilakukan untuk menemukan solusi masalah optimasi (memaksimalkan atau meminimumkan) akan tetapi keterbatasan teknik ini hanya dapat dipecahkan untuk persoalan yang dapat diubah menjadi suatu fungsi linier. Persoalan dasar dalam permasalahan program linier yaitu dalam menetukan masing-masing besarnya nilai variabel sehingga nilai fungsi tujuan atau linier yang objektif menjadi optimum (memaksimalkan atau meminimumkan) dengan memperhatikan atas kendala yang ada tentunya sebuah kendala yang bias dinyatakan dalam bentuk ketidakasamaan linier. Teknik peogram linier merupakan salah satu cara matematis mencari sebuah solusi dan perencanaan atas permasalahan yang ada kaitannya dengan pengalokasian kemampuan atau sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu titik optimal yaitu dalam memaksimumkan atau meminimumkan objektif linier yang bergabung pada sebagian variabel input. Mengenai masalah mengalokasian muncul ketika diharuskan memilih secara random tingkat aktivitas-aktivitas tertentu dalam hal penggunaan sumber daya yang minim atau terbatas yang diperlukan. Penggunaan teknik program linier dapat di implementasikan keberbagai sector bidang dalam menemukan sebuah solusi permasalahan misalnya di bidang ekonomi, industri, sosial, dan lain-lain. Sebagai contoh mengenai pengalokasian fasilitas dalam suatu produksi, solusi dan perencanaan suatu permainan (game) serta pemilihan pola pengiriman.

Dalam menyelesaikan permasalahan menggunakan teknik program linier hal yang harus diperhatikan adalah mencari tahu apa tujuan dari penyelesaian masalah tersebut dan penyebab utama kenapa masalah tersebut bias terjadi. Memecahkan suatu permasalahan dengan menggunakan teknik program linier secara matematis harus memenuhi beberapa syarat/ criteria yaitu melakukan sebuah perubahan dari bentuk pertidaksamaan menjadi sebuah persaman, harus adanya fungsi tujuan atau objektif yang linier dari variabel keputusan dan dapat digambarkan dalam satu set fungsi linier begitu pula untuk keterbatasan sumber daya. Program linier berkaitan dengan penjelasan suatu dunia nyata sebagai suatu model matematik yang terdiri atas sebuah fungsi tujuan dan sistem kendala linier (Sri Mulyono, 2002). Dengan adanya program linier sangat berguna dalam kehidupan sehari-hari terutama apabila dapat diorientasikan pada realitas dan aplikasi. Karakteristik yang terdapat pada program linier 5 yaitu sifat linieritas dimana suatu kasus dapat di pecahkan dengan beberapa cara. Apabila dilihat secara statistik, sifat ini dapat dilakukan dengan memeriksa kelinieran dengan mengguanakan grafik (Diagram Pancar) atau dengan menggunakan uji hipotesa. Kontibusi dari setiap variabel fungsi tujuan atau penggunaan sumberdaya yang membatasi. Sifat addivitas dimana bias berlaku baik hanya untuk fungsi tujuan maupun pembatas. Sifat divisibilitas dimana akan terpenuhi apabila nilai variabel dalam keputusan non integer itu memungkinkan. Sifat kepastian artinya koefisien fungsi tujuan maupun fungsi pembatas merupakan suatu nilai pasti, bukan merupakan nilai dengan suatu peluang tertentu. Langkah sederhana dalam pengguanaan teknik program linier yaitu menentukan jenis permasalahan program linier, mendefinisikan peubah keputusan, merumuskan fungsi tujuan (sasaran) atauperencanaan, merumuskan model kendala/syarat/batasan, dan menetapkan syarat negatif. Jadi dengan adanya beberapa metode ilmiah seperti program linier pada riset operasi dengan perpaduan bidang ilmu lain akan mempermudah dalam menguji sensitivitas pemecahan suatu permasalahan dan melakukan sebuah perencanaan untuk dimasa yang akan datang.

2.2 Bentuk Umum Program Linear

Program linear didefinisikan sebagai permasalahan dalam memilih variable riil yang memaksimalkan atau meminimalkan fungsi linear (disebut fungsi sasaran) dengan batasan – batasan linear pada variabel–variabelnya. Batasan tersebut bisa merupakan persamaan ataupun pertidaksamaan.

Fungsi yang memaksimumkan dan meminimumkan disebut sebagai objective function (fungsi sasaran). Vektor x untuk standar permasalahan maksimum atau vektor y untuk standar permasalahan minimum disebut layak jika memenuhi batasan-batasan yang bersesuaian. Kumpulan atau himpunan dari vektor-vektor yang layak disebut himpunan penyelesaian dan jika himpunan penyelesaian kosong maka program linear tidak layak, dan sebaliknya.

Sebuah permasalahan maksimum (minimum) yang layak menjadi tidak terbatas jika fungsi sasarannya bernilai positif (negatif) tak berhingga besarnya, dan sebaliknya dikatakan terbatas. Sebuah vektor layak yang menyebabkan fungsi sasaran maksimum/minimum disebut sebagai penyelesaian optimal. dan nilai yang dihasilkan terhadap fungsi sasaran disebut sebagai nilai optimal.

Diberikan $b = (b_1, \ldots b_m)^T$, $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$ dan matrik

$$A_{m\,x\,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Permasalahan Maksimum Standar program linear adalah mencari vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ yang memaksimumkan dan memenuhi batasan-batasan $c^T x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned} \qquad (\text{atau } Ax \le b)$$

dan

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \qquad (\text{ atau } x \ge 0).$$

Permasalahan Minimum Standar program linear adalah mencari vektor $y^T = (y_1, \ldots, y_m)$ yang meminimumkan

$$y^T b = y_1 b_1 + \cdots + y_m b_m$$

dan memenuhi batasan-batasan

$$\begin{aligned} y_1 a_{11} + y_2 a_{21} + \cdots + y_m a_{m1} &\ge c_1 \\ y_1 a_{12} + y_2 a_{22} + \cdots + y_m a_{m2} &\ge c_2 \\ &\vdots \\ y_1 a_{1n} + y_2 a_{2n} + \cdots + y_m a_{mn} &\ge c_n \end{aligned} \qquad (\text{atau } y^T A \ge c^T)$$

dan

$$y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0 \qquad (\text{ atau } y \ge 0).$$

Definisi 2.1

Fungsi $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dikatakan fungsi linear jika dan hanya jika untuk konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

Contoh**:** $f(x_1, x_2) = 3x_1 + 5x_2$

Definisi 2.2

Untuk fungsi linear $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan suatu bilangan b, pertidaksamaan dengan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b$ dan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq b$ disebut pertidaksamaan linear.

Contoh: $3x_1 + 5x_2 \leq 12$, $2x_1 - x_2 \geq 4$

Contoh 2.1

Petani Ridwan mempunyai lahan seluas 45 ha. Dia akan menanam gandum dan jagung. Setiap hektar tanaman gandum dapat memberikan keuntungan sebesar dua juta rupiah dan setiap hektar tanaman jagung memberikan keuntungan sebesar tiga juta rupiah. Jumlah tenaga kerja dan pupuk yang diperlukan untuk setiap hektarnya diberikan dalam tabel berikut:

	Gandum	Jagung
Tenaga kerja (orang)	3	2
Pupuk (ton)	2	4

Petani Ridwan mempunyai 100 tenaga kerja dan 120 ton pupuk. Tentukan model program linear yang dapat digunakan untuk memaksimumkan keuntungan petani Ridwan dalam satu kali panen.

Penyelesaian

- Variabel keputusan

  x_1: luas lahan yang ditanami gandum (ha)

  x_2: luas lahan yang ditanami jagung (ha)

- Fungsi tujuan

Petani Ridwan ingin memaksimumkan keuntungan yang diperoleh dari tanaman gandum dan jagung yaitu $2x_1 + 3x_2$ juta rupiah.

- Kendala

  Jumlah tenaga kerja dan pupuk yang tersedia terbatas yaitu 100 orang dan 120 ton. Dari tabel di atas dirumuskan

  $3x_1 + 2x_2 \leq 100$

  $2x_1 + 4x_2 \leq 120$

- Kendala non negatif

  Luas lahan tidak boleh negatif, jadi $x_1, x_2 \geq 0$.

- Model PL

  Maksimumkan $z = 2x_1 + 3x_2$

  dengan kendala $3x_1 + 2x_2 \leq 100$

  $2x_1 + 4x_2 \leq 120$

  $x_1, x_2 \geq 0$

2.3. Solusi pada Program Linear

2.3.1 Metode Grafik

Definisi 2.3

Garis $z = c_1x_1 + c_2x_2$ untuk suatu nilai z disebut garis selidik (isoprofit line untuk soal maksimum, isocost line untuk soal minimum) pada masalah PL dengan fungsi tujuan $z = c_1x_1 + c_2x_2$

Definisi 2.4

Daerah fisibel adalah himpunan titik-titik yang memenuhi semua kendala yang ada dalam masalah PL.

Definisi 2.5

Penyelesaian optimal adalah titik dalam daerah fisibel yang memaksimumkan (untuk soal maksimum) atau meminimumkan (untuk soal minimum) fungsi tujuan.

Contoh 1.2

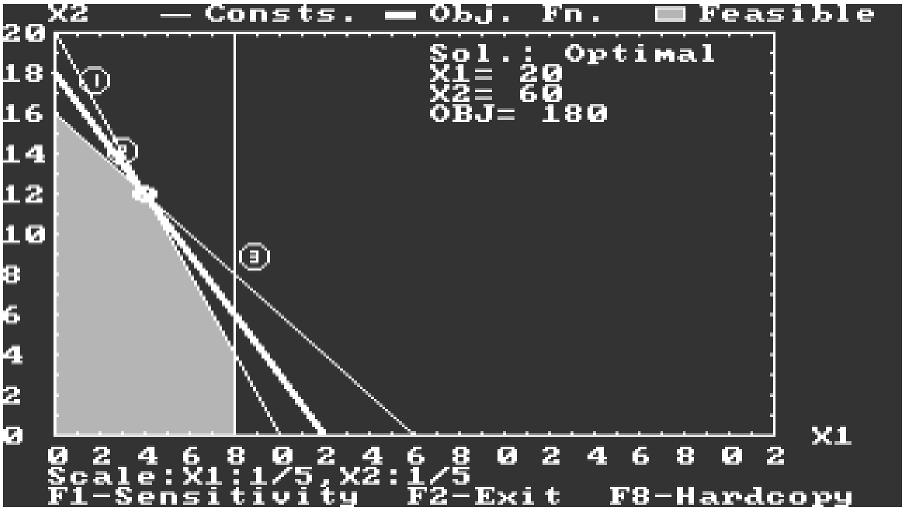
Maksimumkan $z = 3x_1 + 2x_2$

dengan kendala $2x_1 + x_2 \leq 100$

$x_1 + x_2 \leq 80$

$x_1 \leq 40$, $x_1, x_2 \geq 0$

Penyelesaian



Contoh 1.3

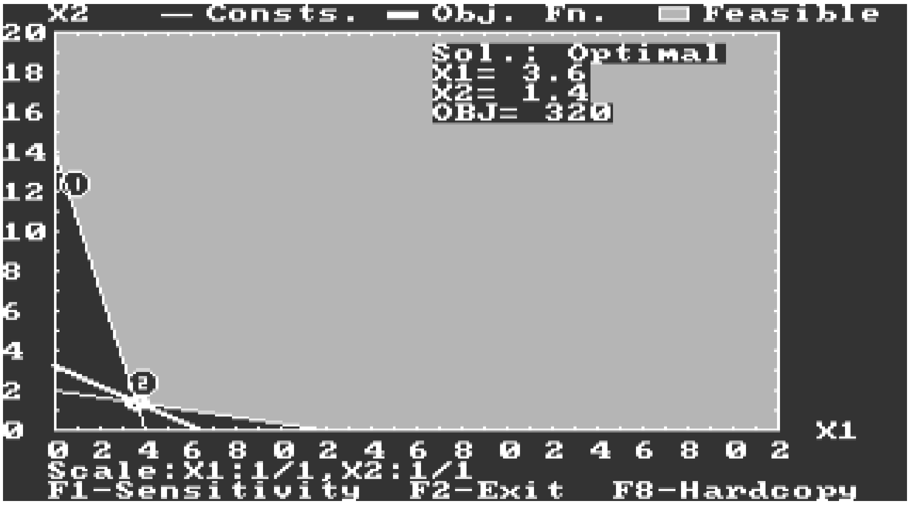
Minimumkan $z = 50x_1 + 100x_2$

dengan kendala $7x_1 + 2x_2 \geq 28$

$2x_1 + 12x_2 \geq 24$

$x_1, x_2 \geq 0$

Penyelesaian



2.3.2 Kejadian-kejadian Khusus

Kejadian-kejadian khusus pada penyelesaian masalah program linear :

- Penyelesaian alternatif (*alternative or multiple optimal solutions*)

  Masalah program linear dua variabel mempunyai pnyelesaian alternatif berarti penyelesaian optimal berada pada semua titik dalam suatu ruas garis.

  Contoh 1.4

  Maksimumkan $z = 3x_1 + 2x_2$

  dengan kendala $\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1$

  $$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1$$

  $$x_1, x_2 \geq 0$$

Penyelesaian

- Tidak ada daerah fisibel (*infeasible*)

Contoh 1.5

Maksimumkan $z = 3x_1 + 2x_2$

dengan kendala $\frac{1}{40}x_1 + \frac{1}{60}x_2 \leq 1$

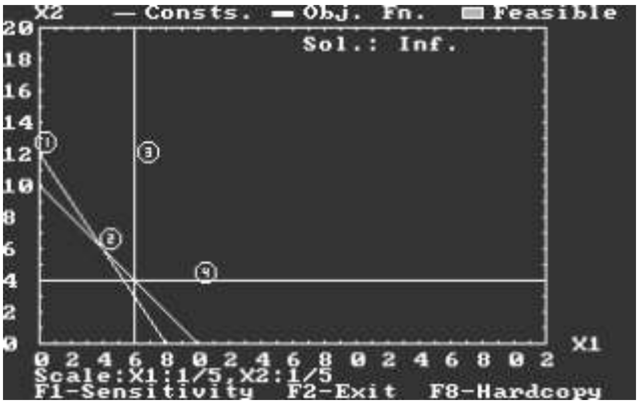
$$\frac{1}{50}x_1 + \frac{1}{50}x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 30$$

$$x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Penyelesaian



- Penyelesaian tak terbatas (*unbounded solutions*)

  Contoh 1.6

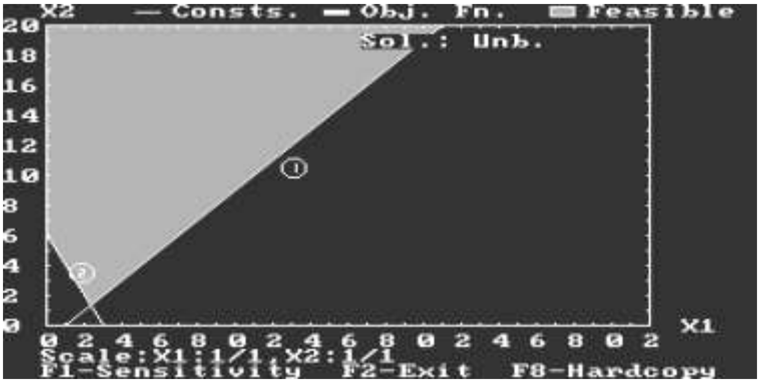
  Maksimumkan z = $2x_1 - x_2$

  dengan kendala $x_1 - x_2 \leq 1$

  $2x_1 + x_2 \geq 6$

  $x_1, x_2 \geq 0$

  Penyelesaian



2.3.3 Metode Simplek

Untuk dapat menyelesaikan standar permasalahan maksimum dan minimum terlebih dahulu akan dibahas mengenai tabel simplek dari standar permasalahan maksimum dan minimum.

Tabel Simplek.

Diberikan standar permasalahan minimum : mencari y yang meminimumkan $y^T b$ dengan y ≥ 0 dan $y^T A \geq c^T$. Misal $y^T A$ - c^T = s^T dengan s merupakan variabel slack sehingga standar permasalahan minimum menjadi mencari y yang meminimumkan $y^T b$ dengan y $\geq$ 0, s ≥ 0 dan $s^T = y^T A$ - c^T.

	s_1	s_2	$\cdots$	s_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
1	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0

Tabel 2.1.

Kolom pertama dan terakhir merupakan bentuk $y^T b$ yaitu permasalahan yang akan diminimumkan. Jika -$c \geq 0$ dan $b \geq 0$ terdapat solusi dari permasalahan yaitu minimum jika $y = 0$ dan $s = -c$, dan nilai minimum $y^T b = 0$. Jika $y \geq 0$, $s \geq 0$ dan $s^T = y^T A - c^T$, maka jika $y > 0$ dan $b < 0$ fungsi sasaran $y^T b$ tidak mempunyai nilai minimum atau standar permasalahan minimum menjadi unbounded/tak terbatas.

Misal terdapat $b_1 < 0$, untuk membuat $b_1 \geq 0$ maka akan dilakukan pivot pada a_{11} dengan $a_{11} \neq 0$, tabel 2 menjadi:

	y_1	s_2	$\cdots$	s_n	
s_1	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	$\cdots$	$\hat{a}_{1n}$	$\hat{b}_1$
y_2	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	$\cdots$	$\hat{a}_{2n}$	$\hat{b}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	$\hat{a}_{m1}$	$\hat{a}_{m2}$	$\cdots$	$\hat{a}_{mn}$	$\hat{b}_m$
s_n	$-\hat{c}_1$	$-\hat{c}_2$	$\cdots$	$-\hat{c}_n$	$\hat{v}$

Tabel 2.2.

Dari Tabel 2.2. dimisalkan

$\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_n) = (y_1, s_2, \ldots, s_n)$

dan

$\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) = (s_1, y_2, \ldots, y_n)$

maka $s^T = y^T A - c^T$ menjadi $r^T = t^T \hat{A} - \hat{c}^T$ dan fungsi sasaran $y^T b$ menjadi

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i = \frac{b_1}{a_{11}} s_1 + \left(b_2 - \frac{a_{21} b_1}{a_{11}} \right) y_2 + \ldots + \left(b_m - \frac{a_{m1} b_1}{a_{11}} \right) y_m + \frac{c_1 b_1}{a_{11}}$$

$$= t^T \hat{b} + \hat{v}.$$

Permasalahan minimum standar menjadi : mencari vektor y dan s yang meminimumkan $t^T \hat{b}$ dengan $y \geq 0$, $s \geq 0$ dan $r^T = t^T \hat{A}$ - $\hat{c}^T$. Jika $-\hat{c} \geq 0$ dan $\hat{b} \geq 0$ terdapat solusi dari permasalahan yaitu minimum jika $t = 0$ dan $r = -\hat{c}$, dengan nilai minimum $\hat{v}$.

Permasalahan maksimum standar : mencari x yang memaksimumkan $c^T x$ dengan $x \geq 0$ dan $Ax \leq b$. Misal $b - Ax = u$ dengan u merupakan variabel slack sehingga standar permasalahan maksimum menjadi : mencari x dan u yang memaksimumkan $c^T x$ dengan $x \geq 0$, $u \geq 0$ dan $u = b - Ax$.

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	-1
$-u_1$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$-u_2$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$-u_m$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0

Tabel 2.3.

Baris pertama dan terakhir merupakan bentuk $c^T x$ yaitu permasalahan yang akan dimaksimumkan atau sama saja dengan meminimumkan $-c^T x$. Jika $-c \geq 0$ dan $b \geq 0$ terdapat solusi dari permasalahan yaitu maksimum jika $x = 0$ dan $u = b$ dengan nilai maksimum $c^T x = 0$. Fungsi sasaran $c^T x$ tidak mempunyai nilai maksimum atau tak terbatas jika $x > 0$ dan $c > 0$.

Dengan menukar u_1 dengan x_1 dan anggap $a_{11} \neq 0$. Persamaan-persamaan

$$
\begin{aligned}
-u_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 \\
-u_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 \\
&\vdots \\
-u_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - b_m
\end{aligned}
$$

mejadi

$$
\begin{aligned}
-x_1 &= \frac{1}{a_{11}}u_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n - \frac{b_1}{a_{11}} \\
-u_2 &= -\frac{a_{21}}{a_{11}}u_1 + \left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n - \frac{b_2}{a_{11}} \\
&\vdots \\
-u_m &= -\frac{a_{m1}}{a_{11}}u_1 + \left(a_{m2} - \frac{a_{m1}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 + \dots + \left(a_{mn} - \frac{a_{m1}a_{1n}}{a_{11}}\right)x_n - \frac{b_m}{a_{11}}
\end{aligned}
$$

.

Jika pivot dilakukan hingga baris paling bawah dan kolom paling kanan menjadi positif, maka penyelesaian optimal dari permasalahan dan dualnya didapat pada waktu yang bersamaan. Pada akhirnya tabel simplek menjadi:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0

Tabel 2.4.

Metode Simpleks

Bentuk – bentuk masalah program linear:

- **PL 1** Maks z = **CX**

  dengan kendala $\mathbf{AX} \leq \mathbf{B}$

  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

- **PL 2** Min z = **CX**

  dengan kendala $\mathbf{AX} \geq \mathbf{B}$

  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

- Bentuk kanonik masalah program linear

  PL 3 Maks/Min z = **CX**

  dengan kendala **AX** = **B**

  $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$

  $\mathbf{A}_{mxn} = [a_{ij}]$

  $\mathbf{C} = [c_1\ c_2\ \ldots c_n\ ]$

  $\mathbf{X} = [x_1\ x_2\ \ldots x_n\ ]^T$

  $\mathbf{B} = [b_1\ b_2\ \ldots b_m\ ]^T$

Definisi 2.6

X disebut penyelesaian basis untuk **AX**=**B** jika n-m variabel disamakan dengan nol dan m variabel yang lain merupakan penyelesaian sistem persamaan tersebut.

Variabel yang dinolkan disebut variabel basis, lainnya disebut variabel non basis.

Definisi 2.7

$\mathbf{X_B}$ disebut penyelesaian fisibel basis (PFB) untuk PL 3 jika $\mathbf{X_B}$ penyelesaian basis **AX=B** dengan semua nilai variabelnya nonnegatif.

Algoritma simpleks langkah-langkahnya sebagai berikut:

Langkah 1 Ubah masalah program linear ke bentuk kanonik.

Langkah 2 Tentukan penyelesaian fisibel basis (PFB) awal/susun tabel awal.

Langkah 3 Cek optimalitas

Langkah 4 Jika PFB belum optimal, tentukan variabel non basis yang masuk menjadi variabel basis dan variabel basis yang keluar menjadi variabel non basis untuk mendapatkan PFB baru yang memperbaiki nilai fungsi tujuan.

Langkah 5 Susun tabel baru. Kembali ke langkah 3 sampai penyelesaian optimal diperoleh.

Keterangan:

1. Tanda pertidaksamaan ≤ (atau ≥) yang ada dalam kendala ke-i pada masalah PL dijadikan = dengan menambahkan (mengurangkan) variabel slack s_i. Koefisien fungsi tujuan variabel slack adalah nol. Jika belum ada bentuk tereduksi dalam matriks **A** setelah dimasukkannya variabel slack maka dimasukkan variabel semu A seperlunya sampai ada bentuk tereduksi (matriks $\mathbf{I}_{mxm}$). Koefisien fungsi tujuan variabel semu adalah M untuk soal minimum dan -M untuk soal maksimum, M bilangan positif besar.

2. Contoh tabel awal

```
+------------------------------------------------------------+
¦     ¦ x(j)¦x1   ¦x2   ¦x3   ¦s1   ¦s2   ¦s3   ¦A3   ¦     ¦ b(i) ¦
¦     ¦-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----¦     ¦______¦
¦Basis¦c(j) ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦b(i) ¦a(i,j)¦
¦-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+------¦
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦      ¦
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦      ¦
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦      ¦
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦      ¦
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦      ¦
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦      ¦
¦-----------+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+------¦
¦ c(j)-z(j) ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦      ¦
¦   * Big M ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦      ¦
+------------------------------------------------------------+
```

Keterangan:

x(j) ≅ x_j

b(i) ≅ b_i

a(ij) ≅ a_{ij}

c(j) ≅ c_j

Basis ≅ $\mathbf{X_B}$

Big M ≅ koefisien M pada nilai c(j)-z(j)

Didefinisikan $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{Bi} a_{ij} = C_B A_j$, $\mathbf{A_j}$ kolom ke-j matriks **A**.

Untuk PFB $\mathbf{X_B}$ diperoleh nilai z = $\mathbf{C_B X_B}$,$\mathbf{C_B}$ vektor baris koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis.

3. Ciri-ciri tabel optimal
   - Soal maks: c(j)-z(j)≤ 0 atau z(j)-c(j)≥ 0
   - Soal min: c(j)-z(j)≥ 0 atau z(j)-c(j)≤ 0

4. Pedoman memilih variabel non basis x_k yang masuk menjadi variabel basis yaitu pilih kolom ke-k sedemikian hingga
    - $c_k - z_k = \underset{j}{maks}\{c_j - z_j \mid c_j - z_j > 0\}$ untuk soal maks.
    - $c_k - z_k = \min_j \{c_j - z_j \mid c_j - z_j < 0\}$ untuk soal min.

    Kolom ke-k disebut kolom kunci.

    Pedoman memilih variabel basis x_{Br} yang keluar menjadi variabel non basis untuk soal maks dan min yaitu pilih baris ke-r sedemikian hingga

    $$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \mid a_{ik} > 0 \right\}$$

    Baris ke-r disebut baris kunci. Elemen a_{rk} disebut elemen kunci.
5. Pedoman penyusunan tabel baru:
    - x_{Br} diganti dengan x_k dan c_{Br} diganti c_k.
    - baris-i baru = baris-i lama - $\frac{a_{ik}}{a_{rk}}$(baris-r lama), $i \neq r$
    - baris-r baru = baris-r lama: a_{rk}
    - lengkapi nilai-nilai c(j)-z(j)dan z.

Penyelesaian model Program Linier Pola Maksimum

Contoh 1.7

Maksimumkan $z = 12x_1 + 24x_2 + 30x_3$

dengan kendala $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 40$

$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 70$

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 20$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Penyelesaian

Bentuk kanonik:

Maksimumkan $z = 12x_1 + 24x_2 + 30x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

dengan kendala $2x_1 + 3x_2 + x_3 + s_1 = 40$

$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_2 = 70$

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + s_3 = 20$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

	x(j)	x1	x2	x3	s1	s2	s3		b(i)
Basis	c(j)	12.00	24.00	30.00	0	0	0	b(i)	a(i,j)
s1	0	2.000	3.000	1.000	1.000	0	0	40.00	40.00
s2	0	4.000	2.000	5.000	0	1.000	0	70.00	14.00
s3	0	2.000	3.000	**5.000**	0	0	1.000	60.00	**12.00**
c(j)-z(j)		12.00	24.00	**30.00**	0	0	0	0	
* Big M		0	0	**0**	0	0	0	0	
s1	0	1.600	**2.400**	0	1.000	0	-.200	28.00	**11.67**
s2	0	2.000	-1.00	0	0	1.000	-1.00	10.00	-
x3	30.00	0.400	0.600	1.000	0	0	0.200	12.00	20.00
c(j)-z(j)		0	**6.000**	0	0	0	-6.00	360.0	
* Big M		0	**0**	0	0	0	0	0	
x2	24.00	0.667	1.000	0	0.417	0	-.083	11.67	
s2	0	2.667	0	0	0.417	1.000	-1.08	21.67	
x3	30.00	0	0	1.000	-.250	0	0.250	5.000	
c(j)-z(j)		-4.00	0	0	-2.50	0	-5.50	430.0	
* Big M		0	0	0	0	0	0	0	

+--+

(Max.) Optimal OBJ value = 430

Contoh 1.8

Maksimumkan $z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$

dengan kendala $3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 18$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 20$$

$$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Penyelesaian

Bentuk kanonik Program Linier :

Maksimumkan $z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 - MA_3$

dengan kendala $3x_1 + 4x_2 - x_3 + s_1 = 18$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 + s_2 = 20$$

$$3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - s_3 + A_3 = 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	x(j)	x1	x2	x3	s1	s2	s3	A3		b(i)
Basis	C(j)	1.000	5.000	3.000	0	0	0	- M	b(i)	a(i,j)
s1	0	3.000	4.000	-1.00	1.000	0	0	0	18.00	4.500
s2	0	1.000	-2.00	5.000	0	1.000	0	0	20.00	-
A3	- M	3.000	**4.000**	-2.00	0	0	-1.00	1.000	15.00	**3.750**
c(j)-z(j)		1.000	**5.000**	3.000	0	0	0	0	0	
* Big M		3.000	**4.000**	-2.00	0	0	-1.00	0	-15.0	
s1	0	0	0	**1.000**	1.000	0	1.000	-1.00	3.000	**3.000**

```
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦
¦s2   ¦    0¦2.500¦    0¦4.000¦    0¦1.000¦-.500¦0.500¦27.50¦6.875 ¦
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦
¦x2   ¦5.000¦0.750¦1.000¦-.500¦    0¦    0¦-.250¦0.250¦3.750¦-     ¦
¦-----------+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+------¦
¦ c(j)-z(j) ¦-2.75¦    0¦5.500¦    0¦    0¦1.250¦-1.25¦18.75¦      ¦
¦   * Big M ¦    0¦    0¦    0¦    0¦    0¦    0¦-1.00¦    0¦      ¦
¦-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+------¦
¦x3   ¦3.000¦    0¦    0¦1.000¦1.000¦    0¦1.000¦-1.00¦3.000¦      ¦
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦
¦s2   ¦    0¦2.500¦    0¦    0¦-4.00¦1.000¦-4.50¦4.500¦15.50¦      ¦
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦
¦x2   ¦5.000¦0.750¦1.000¦    0¦0.500¦    0¦0.250¦-.250¦5.250¦      ¦
¦-----------+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+------¦
¦ c(j)-z(j) ¦-2.75¦    0¦    0¦-5.50¦    0¦-4.25¦4.250¦35.25¦      ¦
¦   * Big M ¦    0¦    0¦    0¦    0¦    0¦    0¦-1.00¦    0¦      ¦
+-------------------------------------------------------------+
```
(Max.) Optimal OBJ value = 35.25

Contoh 1.9

Minimumkan $z = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3$

dengan kendala $5x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$

$3x_1 + x_2 \leq 10$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 5, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Penyelesaian

Minimumkan $z = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + MA_3$

dengan kendala $5x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 6$

$3x_1 + x_2 + s_2 = 10$

$2x_1 + x_2 + 3x_3 - s_3 + A_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Basis	x(j) / c(j)	x1	x2	x3	s1	s2	s3	A3	b(i)	b(i) / a(i,j)
Basis	c(j)	4.000	6.000	8.000	0	0	0	M	b(i)	a(i,j)
s1	0	5.000	1.000	1.000	1.000	0	0	0	6.000	6.000
s2	0	3.000	1.000	0	0	1.000	0	0	10.00	-
A3	M	2.000	1.000	**3.000**	0	0	-1.00	1.000	5.000	**1.667**
c(j)-z(j)		4.000	6.000	**8.000**	0	0	0	0	0	
* Big M		-2.00	-1.00	**-3.00**	0	0	1.000	0	5.000	
s1	0	**4.333**	0.667	0	1.000	0	0.333	-.333	4.333	**1.000**
s2	0	3.000	1.000	0	0	1.000	0	0	10.00	3.333
x3	8.000	0.667	0.333	1.000	0	0	-.333	0.333	1.667	2.500
c(j)-z(j)		**-1.33**	3.333	0	0	0	2.667	-2.67	13.33	
* Big M		**0**	0	0	0	0	0	1.000	0	
x1	4.000	1.000	0.154	0	0.231	0	0.077	-.077	1.000	
s2	0	0	0.538	0	-.692	1.000	-.231	0.231	7.000	
x3	8.000	0	0.231	1.000	-.154	0	-.385	0.385	1.000	
c(j)-z(j)		0	3.538	0	0.308	0	2.769	-2.77	12.00	
* Big M		0	0	0	0	0	0	1.000	0	

(Min.) Optimal OBJ value = 12

Contoh 1.10

Minimumkan $z = x_1 + 2x_2 + x_3$

dengan kendala $2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 6$

$$3x_1 \qquad +2x_3 \leq 2$$

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -5, \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Penyelesaian

Minimumkan $z = x_1 + 2x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + MA_1$

dengan kendala $2x_1 + x_2 - 3x_3 - s_1 \qquad + A_1 = 6$

$$3x_1 \qquad +2x_3 \qquad + s_2 \qquad = 2$$

$$-4x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad + s_3 \qquad = 5, \qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Basis	x(j) / c(j)	x1	x2	x3	s1	A1	s2	s3	b(i)	b(i)/a(i,j)
	c(j)	1.000	2.000	1.000	0	M	0	0	b(i)	a(i,j)
A1	M	2.000	1.000	-3.00	-1.00	1.000	0	0	8.000	4.000
s2	0	**3.000**	0	2.000	0	0	1.000	0	2.000	**0.667**
s3	0	-4.00	1.000	-2.00	0	0	0	1.000	5.000	-
c(j)-z(j)		**1.000**	2.000	1.000	0	0	0	0	0	
* Big M		**-2.00**	-1.00	3.000	1.000	0	0	0	8.000	
A1	M	0	**1.000**	-4.33	-1.00	1.000	-.667	0	6.667	**6.667**
x1	1.000	1.000	0	0.667	0	0	0.333	0	0.667	-
s3	0	0	1.000	0.667	0	0	1.333	1.000	7.667	7.667
c(j)-z(j)		0	**2.000**	0.333	0	0	-.333	0	0.667	
* Big M		0	**-1.00**	4.333	1.000	0	0.667	0	6.667	
x2	2.000	0	1.000	-4.33	-1.00	1.000	-.667	0	6.667	0
x1	1.000	1.000	0	0.667	0	0	0.333	0	0.667	0
s3	0	0	0	5.000	1.000	-1.00	2.000	1.000	1.000	0
c(j)-z(j)		0	0	9.000	2.000	-2.00	1.000	0	14.00	

```
¦  * Big M ¦    0¦    0¦    0¦    0¦1.000¦    0¦    0¦    0¦      ¦
+----------------------------------------------------------------+
   (Min.) Optimal OBJ value =  14
```

RANGKUMAN

1. Masalah pemrograman linier adalah masalah optimisasi bersyarat yakni pencarian nilai maksimum atau pencarian nilai minimum suatu fungsi tujuan berkenaan dengan kendala yang harus dipenuhi. Program linear juga membutuhkan kemampuan untuk mengubah bahasa cerita menjadi bahasa matematika atau model matematika.
2. Model matematika adalah bentuk penalaranmanusia dalam menerjemahkan permasalahan menjadi bentuk matematika (dimisalkan dalamvariabel$x$ dan y) sehingga dapat diselesaikan.
3. Program linier adalah cabang dari matematika terapan yang model matematikanya berupa persamaan-persamaan atau pertidaksamaan-pertidaksamaan linier. Sedangkan yang dimaksud dengan persoalan program linier adalah suatu persoalan untuk menentukan besarnya masing-masing nilai variabel yang memaksimumkan atau meminimumkan suatu nilai fungsi tujuan, dengan memperhatikan pembatasan-pembatasan yang ada yang dinyatakan dalam bentuk persamaan atau pertidaksamaan linier.
4. Model persoalan dikatakan merupakan persoalan program linier jika memenehui ketentuan-ketentuan berikut ini.
    a. Memuat fungsi tujuan yang harus dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi linier dari variabel-variabelnya. Sebagai contoh, $f(x, y) = ax + by$. Fungsi tujuan ini harus mencerminkan tujuan persoalan yang akan dicapai.

b. Sumber-sumber yang tersedia dalam jumlah yang terbatas (biaya terbatas, bahan mentah terbatas, waktu terbatas, tenaga terbatas, dan lain-lain). Pembatasan tersebut harus dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan linier atau pertidaksamaan linier.
c. Harus terdapat alternative penyelesaian atau himpunan penyelesaian yang mungkin, yaitu penyelesaian yang membuat fungsi tujuan menjadi maksimum atau minimum.

5. Model dasar program linier yaitu:

   Maksimumkan atau minimumkan:

   $Z = c_1x_1 + \ c_2x_2 + \ldots + c_nx_n (1)$

   Dengan kendala-kendala:

   $a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq atau \ \leq b_1 (2)$

   $a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq atau \ \leq b_2$

   $a_{m1}x_1 + \ a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq atau \ \leq b_m$

   Dan $x_j \geq 0$ untuk $j = 1, 2, \ldots, n.$

6. Solusi Program linier dapat diselesaikan dengan metode grafik dan juga menggunakan metode simpleks.

Contoh Soal dan Pembahasan

1. Seorang pengusaha bahan kimia membuat 2 macam cairan pembunuh serangga yaitu superior (C_1) dan jenis standar (C_2). Keduanya terbuat dari 2 macam bahan yang sama yaitu A dan B dengan komposisi yang berbeda. Setiap liter C_1 dibuat dari 1unit bahan A dan 3 unit bahan B. Setiap liter C_2 dibuat dari 2 unit bahan A dan 1 unit bahan B. setiap hari hanya memperoleh 20 unit A dan 20 unit bahan B. Untuk setiap liter cairan C_1, keuntungan yang didapat Rp. 30.000,- sedangkan jenis C_2 ,

keuntungannya sebesar Rp.20.000,- Jika diasumsikan semua cairan laku terjual, berapa liter cairan masing-masing jenis harus ia buat tiap agar mendapatkan keuntungan maksimum?

2. Minimumkan $f(x_1,x_2)= 2x_1 + 3x_2$

   Kendala $x_1 + x_2 \geq 3$

   $x_1 - 2x_2 \leq 4$

   $x_1, x_2 \geq 0$

3. Jadikan bentuk berikut ini menjadi bentuk standar simpleks:

   a. Maksimumkan $z = x_1 + x_2$

   b. Kendala:

   $x_1 + 5x_2 \leq 5$

   $2x_1 + x_2 \leq 4 : x_1, x_2 \geq 0$

   Minimumkan $z = 2x_1 - x_2 + 4_{x_3}$

   Kendala:

   $z = 2x_1 - x_2 + 4_{x_3}$

   $2_{x_1} - 2_{x_2} + x_3 \leq -7 \quad x1, x2, x3 \geq 0$

4. Seorang kontraktor merencanakan untuk membangun 3 tipe rumah (sederhana, menengah, dan mewah) yang biaya pembuatan per unitnya adalah 20, 50, dan 80 (juta rupiah). Daana yang tersedia adalah sebesar 4000 (juta rupiah). Menurut peraturan pemerintah, dari keselurahan rumah yang ia bangun, minimal 50% di antaranya harus rumah sederhana dan paling banyak 20% di antaranya adalah rumah mewah. Keuntungan yang diperoleh dari penjualan sebuah rumah tipe sederhana, menengah, dan mewah masing-masing adalah sebesar 5, 15, dan 30 juta rupiah. Berapa jumlah rumah tiap tipe yang harus ia bangun (mengingat dana yang tersedia dan peraturan pemerintah) agar keuntungan yang ia dapatkan maksimum?

5. Selesaikanlah masalah Program linier berikut:

   Minimumkan $z = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3$

   dengan kendala $5x_1 + x_2 + x_3 \le 6$

   $3x_1 + x_2 \le 10$

   $2x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 5, \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0$

6. Selesaikanlah masalah Program linier berikut

   Minimumkan $z = x_1 + 2x_2 + x_3$

   dengan kendala $2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge 6$

   $3x_1 + 2x_3 \le 2$

   $4x_1 - x_2 + 2x_3 \ge -5, \quad x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Pembahasan

1. Karena ada 2 macam cairan penentu keuntungan, maka ada 2 variabel keputusan.

   Misalkan: x_1 = jumlah cairan jenis superior

   x_2 = jumlah cairan jenis standar

   Fungsi sasaran yang hendak dimaksimumkan adalah keuntungan. Untuk tiap liter cairan C_1 keuntungan yang didapat adalah 30.000. maka jika dibuat x_1 liter C_1, keuntungan yang didapat adalah 30.000 C_1 secara analog, karena keuntungan dari pembuatan tiap liter C_2 adalah 20.000, sedangkan yang dibuat adalah x_2 liter, maka keuntungan yang didapat adalah 20.000 x_2. Dengan demikian keuntungan yang didapat jika dibuat x_1 liter C_1 dan x_2 liter C_2 adalah sebesar $30.000\ x_1 + 20.000\ x_2$. Fungsi keuntungan inilah yang akan dimaksimumkan.

Bentuk tabel:

Bahan	Cairan Jenis Superior (C_1)	Cairan Jenis Standar Superior (C_2)	Pasokan Maksimum
A	3	2	20
B	1	1	20
Untung	30.000	20.000	

Maka model untuk masalah pengusaha kimia tersebut adalah $f(x_1,x_2)=30.000\ x_1+20.000\ x_2$

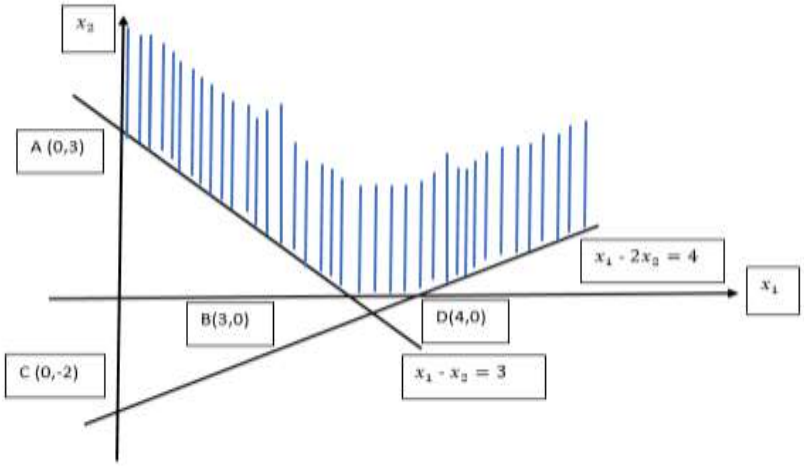
Kendala $x_1 + 2x_2 \leq 20$

$3x_1 + x_2 \leq 20;\ x_1, x_2 \geq 0$

Maka fungsi sasaran:

Maksimumkan $f(X)=f(x_1,x_2)=30.000\ x_1+20.000\ x_2$

2. Dengan menggambar grafik seperti pada contoh terdahulu, didapat gambar. Perhatikan bahwa daerah fisibel merupakan daerah yang tak terbatas. Titik sudut yang terbentuk adalah titik A(0,3), B(3,0), dan titik D(4,0)



$f(A)=f(0,3)=2(0)+3(3)=9$

f(B)=f(3,0)=2(3)+3(0)=6

f(C)=f(4,0)=2(4)+3(0)=8

Nilai minimum = 6 pada titik B (3,0) daerah fisible tak terbatas.

3. Karena kedua kendala berbentuk pertidaksamaan maka harus dibah ke bentuk persamaan dengan menambahkan variabel slack.

   Pada kendala pertama, karena kendala berbentuk ≤, maka harus ditambah suatu variabel baru x3 ≥ 0 sehingga menjadi suatu persamaan.

   Didapat: $x_1 + 5x_2 + x_3 = 5$

   Secara analog untuk menjadikan kendala kedua sebagai suatu persamaan haruslah ditambahkan suatu variabel baru x4 ≥ 0. Didapat $2x_1 + x_2 + x_4 = 4$

   Perhatikan di sini bahwa variabel yang ditambahkan pada kendala kedua haruslah berbeda dengan variabel yang ditambhkan pada kendala pertama karena secara umum nilai kedua variabel slack (x3 dan x4) berbeda.

   Pada awalnya fungsi sasaran hanya terdiri dara 2 variabel, x1dan x2. Akan tetapi dengan perubahan kendala menjadin suatu persamaan, muncul variabel baru x3 dan x4. Kedua variabel tambahan ini harus muncul juga dalam fungsi sasaran. Akan tetapi agar fungsi sasaran tidak berubah, maka koefisien kedua variabel slack pada fungsi sasaran dibuat = 0. Jadi bentu standar simpleks adalah:

   Maksimumkan $z = x_1 + x_2 + x0_3 + 0x_3 + 0x_4$

   Kendala:

   $x_1 + 5x_2 + x_3 = 5$

$2x_1 + x_2 + x_4 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Ada 2 hal yang harus diubah untuk mejadikan soal itu berbentuk standar simpleks. Pertama adalah mengubah kendala sehingga ruas kanan tidak ada yang negatif. Berikutnya adalah mengubah kendala menjadi suatu persamaan.

Untuk mengubah kendala pertama sehingga ruas kanan tidak negatif, kalikan kedua ruas dengan (-1).

Didapat $-5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 7$

Langkah selanjutnya adalah mengubah pertidaksamaan menjadi suatu persamaan.

Pada kendala pertama, akrena bentuk pertidaksamaan adalah ≥, maka haruslah dikurangi dengan x4.

Didapat $-5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 7$

Pada kendala kedua, karena pertidaksamaan berbentuk ≤ , maka harus ditambah dengan x5 sehingga menjadi persamaan.

Didapat $2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 8$

Penambahan variabel baru x4 dan x5 harus dilakukan pada fungsi sasaran dengan koefisien = 0. Maka bentuk standar simpleks adalah:

Minimumkan: $z = 2x_1 - x_2 + 4_{x_3} + 0_{x_4} + 4_{x_5}$

Kendala:

$-5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 7$

$2x_1 - 2x_2 + x_3 + \quad x_5 = 8$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

4. Variabel keputusan adalah jumlah rumah tipe sederhana, menengah, dan mewah yang dibangun, Misalkan:

   X_1 = jumlah rumah tipe sederhana yang dibangun

   X_2 = jumlah rumah tipe menengah yang dibangun

   X_3 = jumlah rumah tipe mewah yang dibangun

   Jelas bahwa X_1, X_2 dan $X_3 \geq 0$

   Fungsi sasarannya adalah memaksimumkan keuntungan yang didapatkan. Kareana keuntungan tipe sederhana, menengah dan mewah masing-masing adalah 5, 15 dan 30, maka fungsi sasarannya dapat dinyatakan sebagai:

   $f\ x_1, x_2, x_3 = 5x_1 + 15x_2 + 30x_3$

   Ada 2 macam kendala yang harus dipenuhi, yaitu keterbatasan dana dan peraturan pemberintah.

   Karena biaya pembuatan sebuah rumah tipe sederhana, menengah dan mewah masing-masing sebesar 20, 50, dan 80 (juta), sedangkan dana yang dimiliki sebesar 4000 (juta), maka kendala keterbatasan biaya dapat dinyatakan sebagai: $20x_1 + 50x_2 + \ 80x_3 \leq 4000$

   Jumlah keseluruhan rumah yang dibuat adalah $x_1 + x_2 + x_3$. Kendala bahwa minimal 50% di antaranya harus rumah sederhana dapat dinyatakan sebagai $x_1 \geq 0.5\ (x_1 + x_2 + x_3)$. Kendala bahwa maksimal 20% di antaranya harus rumah mewah dapat dinyatakan sebagai $x_3 \leq 0.2\ (x_1 + x_2 + x_3)$

   Jadi model yang sesuai adalah:

   Maksimumkan $f\ x_1, x_2, x_3 = 5x_1 + 15x_2 + 30x_3$

   Kendala: $20x_1 + 50x_2 + \ 80x_3 \leq 4000$

$$x_1 \geq 0.5\ (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_3 \leq 0.2\ (x_1 + x_2 + x_3)$$

x_1, x_2 dan $x_3 \geq 0$ dan bulat

5. Minimumkan $z = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3$

   dengan kendala $5x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$

   $3x_1 + x_2 \leq 10$

   $2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 5, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Minimumkan $z = 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + MA_3$

dengan kendala

$$5x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 6$$
$$3x_1 + x_2 + s_2 = 10$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 - s_3 + A_3 = 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	x(j)	x1	x2	x3	s1	s2	s3	A3		b(i)
Basis	c(j)	4.000	6.000	8.000	0	0	0	M	b(i)	a(i,j)
s1	0	5.000	1.000	1.000	1.000	0	0	0	6.000	6.000
s2	0	3.000	1.000	0	0	1.000	0	0	10.00	-
A3	M	2.000	1.000	**3.000**	0	0	-1.00	1.000	5.000	**1.667**
c(j)-z(j)		4.000	6.000	**8.000**	0	0	0	0	0	
* Big M		-2.00	-1.00	**-3.00**	0	0	1.000	0	5.000	
s1	0	**4.333**	0.667	0	1.000	0	0.333	-.333	4.333	**1.000**
s2	0	3.000	1.000	0	0	1.000	0	0	10.00	3.333
x3	8.000	0.667	0.333	1.000	0	0	-.333	0.333	1.667	2.500
c(j)-z(j)		**-1.33**	3.333	0	0	0	2.667	-2.67	13.33	
* Big M		**0**	0	0	0	0	0	1.000	0	

x1	4.000	1.000	0.154	0	0.231	0	0.077	-.077	1.000	
s2	0	0	0.538	0	-.692	1.000	-.231	0.231	7.000	
x3	8.000	0	0.231	1.000	-.154	0	-.385	0.385	1.000	
c(j)-z(j)		0	3.538	0	0.308	0	2.769	-2.77	12.00	
* Big M		0	0	0	0	0	0	1.000	0	

(Min.) Optimal OBJ value = 12

6. Minimumkan $z = x_1 + 2x_2 + x_3$
   dengan kendala $2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 6$
   $3x_1 + 2x_3 \leq 2$
   $4x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -5, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Minimumkan $z = x_1 + 2x_2 + x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + MA_1$
dengan kendala $2x_1 + x_2 - 3x_3 - s_1 + A_1 = 6$
$3x_1 + 2x_3 + s_2 = 2$
$-4x_1 + x_2 - 2x_3 + s_3 = 5, \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

	x(j)	x1	x2	x3	s1	A1	s2	s3		b(i)
Basis	c(j)	1.000	2.000	1.000	0	M	0	0	b(i)	a(i,j)
A1	M	2.000	1.000	-3.00	-1.00	1.000	0	0	8.000	4.000
s2	0	**3.000**	0	2.000	0	0	1.000	0	2.000	**0.667**
s3	0	-4.00	1.000	-2.00	0	0	0	1.000	5.000	-
c(j)-z(j)		**1.000**	2.000	1.000	0	0	0	0	0	
* Big M		**-2.00**	-1.00	3.000	1.000	0	0	0	8.000	
A1	M	0	**1.000**	-4.33	-1.00	1.000	-.667	0	6.667	**6.667**
x1	1.000	1.000	0	0.667	0	0	0.333	0	0.667	-
s3	0	0	1.000	0.667	0	0	1.333	1.000	7.667	7.667

```
¦-----------+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+------¦
¦ c(j)-z(j) ¦    0¦2.000¦0.333¦    0¦    0¦-.333¦    0¦0.667¦      ¦
¦   * Big M ¦    0¦-1.00¦4.333¦1.000¦    0¦0.667¦    0¦6.667¦      ¦
¦-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+------¦
¦x2   ¦2.000¦    0¦1.000¦-4.33¦-1.00¦1.000¦-.667¦    0¦6.667¦    0 ¦
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦      ¦
¦x1   ¦1.000¦1.000¦    0¦0.667¦    0¦    0¦0.333¦    0¦0.667¦    0 ¦
¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦     ¦      ¦
¦s3   ¦    0¦    0¦    0¦5.000¦1.000¦-1.00¦2.000¦1.000¦1.000¦    0 ¦
¦-----------+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+------¦
¦ c(j)-z(j) ¦    0¦    0¦9.000¦2.000¦-2.00¦1.000¦    0¦14.00¦      ¦
¦   * Big M ¦    0¦    0¦    0¦    0¦1.000¦    0¦    0¦    0¦      ¦
+------------------------------------------------------------------+
```

(Min.) Optimal OBJ value = 14

BAB 3
TRANSPORTASI

<u>Tujuan pembelajaran</u>

Bab ini bertujuan agar mahasiswa mampu menguasai konsep teoritis dan penjelasan tentang Model Transportasi, juga definisi Model Transportasi menurut beberapa orang Ahli. Mampu memformulasikan penyelesaian masalah procedural serta mampu Mampu merekonstruksi, memodifikasi, menganalisis/berpikir secara terstruktur pendekatan yang dapat digunakan dalam menyelesaikan model transportasi yaitu Metode Stepping Stone, Metode Modified Distribution (MODI) dan Metode Vogel’s Approximation (VAM).

3.1. Pendahuluan

Pada umumnya masalah transportasi berhubungan dengan distribusi suatu barang dari beberapa sumber dengan penawaran terbatas menuju beberapa tujuan dengan permintaan tertentu pada biaya transport minimum. Karena hanya ada satu macam barang, suatu tempat tujuan dapat memenuhi permintaannya dari satu atau lebih sumber. Persoalan transportasi terpusat pada pemilihan rute dalam jaringan distribusi produk antara pusat industri dan distribusi gudang atau antara distribusi gudang regional dan distribusi pengeluaran lokal. Dalam menggunakan model transportasi, pihak manajemen mencari rute distribusi atau penugasan yang akan mengoptimumkan tujuan tertentu. Misalnya tujuan meminimumkan total biaya transportasi, memaksimumkan laba, atau meminimumkan waktu yang digunakan. Model transportasi merupakan suatu model yang digunakan dalam pendistribusian barang dari sumber-sumber yang menyediakan barang yang sama ke tempat-tempat yang membutuhkan secara optimal. Pendistribusian barang harus diatur sedemikian rupa karena terdapat perbedaan biaya-biaya distribusi dari satu sumber ke tempat-tempat tujuan. Model transportasi bermanfaat untuk memperlancar pendistribusian barang, memaksimalkan pengalokasian dari sumber ke tujuan dan berguna dalam usaha menekan total biaya transportasi. Dengan penerapan model transportasi, biaya, waktu dan tenaga dapat dioptimalkan serta meningkatkan efisiensi perusahaan.

Salah satu metode yang digunakan untuk memecahkan permasalahan optimasi sehingga mendapatkan solusi yang optimal dengan memperhatikan batasan-batasan yang bersangkutan adalah program Linier. Masalah pemrograman linier terdiri dari fungsi tujuan yang akan diminimalkan atau dimaksimalkan terhadap sejumlah kendala (Schulze, 1998). Pemrograman linier dapat dilihat sebagai bagian dari perkembangan revolusioner yang besar, yang telah memberikan manusia kemampuan untuk menyatakan tujuan umum dan untuk mengambil keputusan yang lebih rinci dalam rangka untuk mencapai tujuan “terbaik” ketika berhadapan dengan situasi yang lebih kompleks (Dantzig, 1997).

Salah satu bentuk aplikasi dari suatu konsep program linier adalah masalah transportasi, masalah transportasi merupakan suatu masalah yang bertujuan mengatur pengalokasian berbagai komoditas homogen tunggal yang awalnya disimpan di berbagai daerah penawaran untuk selanjutnya disalurkan ke berbagai daerah tujuan, sedemikian rupa bahwa total biaya transportasi tersebut adalah minimum (Prakash, 2001).

3.2. Definisi Model Transportasi menurut Para Ahli

Secara umum, Metode Transportasi adalah suatu metode yang digunakan untuk mengatur distribusi dari sumber – sumber yang menyediakan produk – produk yang sama di tempat- tempat yang membutuhkan secara optimal. Adapun beberapa pengertian Model/Metode Transportasi menurut para ahli, diantaranya:

1. Hamdy A Taha (1996) mengemukakan bahwa dalam arti sederhana, model transportasi berusaha menentukan sebuah rencana transportasi sebuah barang dari sejumlah sumber ke sejumlah tujuan. Data dalam model ini mencakup:
   a. Tingkat penawaran di setiap sumber dan jumlah permintaan di setiap tujuan.
   b. Biaya transportasi per unit barang dari setiap sumber ke setiap tujuan.
2. Menurut Tamin (2000), model transportasi adalah suatu metode yang digunakan untuk mengatur distribusi suatu produk (barang-barang) dari sumber-sumber yang menyediakan produ (misalnya pabrik) ke tempat-tempat tujuan (misalnyagudang) secara optimal. Tujuan dari model ini adalah menentukan jumlah yang harus dikirim dari setiap sumber ke setiap tujuan sedemikian rupa dengan total biaya transportasi minimum.
3. Zulfitri (2010), Metode transportasi merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengatur distribusi dari sumber–sumber yang menyediakan produk yang sama, ke tempat–tempat yang membutuhkan secara optimal.

4. Menurut Prasetyo (2011), “Metode transportasi adalah kelompok khusus program linear yang menyelesaikan masalah pengiriman komoditas dari sumber (misalnya pabrik) ke tujuan (misalnya gudang).” Tujuannya adalah untuk menentukan jadwal pengiriman dengan meminimalkan total biaya pengiriman dengan memenuhi batas pasokan dan kebutuhan. Aplikasi transportasi dapat dikembangkan di daerah operasi yang lain, misalnya inventory control, penjadwalan pekerja (employment scheduling), dan penilaian personal (personnel assignment).
5. Haningsih (2012) menyimpulkan bahwa “metode transportasi merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengatur distribusi dari sumber–sumber yang menyediakan produk yang sama, ke tempat–tempat yang membutuhkan secara optimal”. Alokasi produk ini harus diatur sedemikian rupa, karena terdapat perbedaan biaya–biaya alokasi dari satu sumber ke tempat–tempat tujuan yang berbeda-beda, dan dari beberapa sumber ke suatu tempat tujuan yang juga berbeda-beda.
6. Heizer, (2005:631) menambahkan bahwa Permodelan transportasi adalah suatu prosedur berulang untuk memecahkan permasalahan meminimasi biaya pengiriman produk dari beberapa sumber ke beberapa tujuan.

3.3. Manfaat dan Tujuan Transportasi

Beberapa manfaat dari transportasi diantaranya adalah:

a. Merupakan alat untuk pengambilan keputusan yang optimal dari berbagai sumber daya yang tersedia ke tujuan yang sudah ditentukan.

b. Transportasi berusaha menetapkan arah tindakan terbaik (optimum) dari sebuah keputusan masalah dengan pembatasan sumber daya terbatas dengan tujuan tertentu.

Tujuan dari model transportasi adalah menerapkan pendekatan ilmiah dalam memecahkan permasalahan atau persoalan serta memecahkan atau menganalisis permasalahan dalam pengambilan keputusan atau pembuatan keputusan seperti rancang bangun dan pengandalian operasi pabrik, penentuan daerah penjualan dan pengalokasikan pusat-pusat distribusi.

Ada pula beberapa tujuan model transportasi adalah sebagai berikut:

1. Suatu proses pengaturan distribusi barang dari tempat yang memiliki atau menghasilkan barang tersebut dengan kapasitas tertentu ke tempat yang membutuhkan barang tersebut dengan jumlah kebutuhan tertentu agar biaya distribusi dapat ditekan seminimal mungkin.
2. Berguna untuk memecahkan permasalahan distribusi (alokasi).
3. Memecahkan permasalahan bisnis lainnya, seperti masalah-masalah yang meliputi pengiklanan, pembelanjaan modal (capital financing) dan alokasi dana untuk investasi, analisis lokasi, keseimbangan lini perakitan dan perencanaan schedulingproduksi.

3.4. Penerapan Model Transportasi

Beberapa contoh penerapan Model Transportasi dalam kehidupan sehari-hari yang sering dijumpai:

1. Distribusi pada perusahaan roti, Model Transportasi sangat dibutuhkan oleh perusahaan tersebut karena terkadang akan mengalami hambatan dan kesulitan dalam hal pengiriman barang

kepada konsumen dalam jumlah banyak. Maka dari itu cara yang diperlukan dalam mengatasi masalah tersebut adalah dengan menerapkan Model Transportasi agar dapat meningkatkan keuntungan bagi perusahaan, dan karenanya Model Transportasi sangat berguna bagi perusahaan dalam pendistribusian barang agar lebih efektif.

2. Perum BULOG Sub Divre sebagai pelaksana tugas publik dari Perum Bulog dalam hal ini program Raskin untuk beberapa wilayah diantaranya Makassar, Gowa, Takalar, Maros dan Pangkep membutuhkan biaya yang cukup besar untuk kegiatan distribusi Raskin yang mengakibatkan tugas komersil dari perum BULOG tidak memperoleh laba/profit yang baik. Khususnya pada tahun 2016 Perum BULOG Sub Divre Makassar menggunakan biaya distribusi sebesar Rp.517.338.900,00 (*sumber Perum BULOG Sub Divre Makassar*) dalam pendistribusian Raskin di kota Makassar. Hal tersebut mengakibatkan laba/profit yang didapatkan tidal optimal. Untuk mengoptimalkan biaya distribusi tersebut diperlukan beberapa perencanaan yang sistematis sehingga biaya untuk keperluan distribusi Raskin menjadi optimal.
3. Dalam kehidupan sehari-hari pada zaman sekarang, semua teknologi semakin canggih begitu juga dengan transportasi. Transportasi sangat berguna dalam kehidupan manusia seperti jika seseorang ingin berpergian dari suatu tempat ke tempat yang dituju atau memindahkan suatu barang dari tempat asalnya ke tempat yang di tuju, orang-orang biasa menggunakan kendaraan darat, laut maupun udara. Macam-macam kendaraan darat seperti

mobil, motor, angkutan umum, bus dan lain-lain. Pada transportasi laut dan udara bisa menggunakan kapal laut dan pesawat untuk jarak yang mungkin lebih jauh dan tidak dapat dijangkau dengan menggunakan kendaraan di darat.

4. Solusi awal yang didapat dengan menggunakan metode Ongkos terkecil lebih baik dari North west Corner, sebab penyelesaian pada metode ini sudah melibatkan faktor biaya, sedangkan pada Pojok Barat laut solusi awal ditentukan tanpa pengaruh biaya (solusi awal jauh dari optimum). Dunia usaha mikro atau usaha dalam skala kecil karena lebih sering ditemui dalam masyarakat selain itu bahwa dalam berwirausaha harus dimulai dari suatu hal yang kecil hingga berproses menjadi suatu hal yang besar. Usaha mikro banyak di masyarakat dan bisa juga disebut suatu kewirausahaan atau home industri. Kewirausahaan juga identik dengan pengertian entrepreneur, yaitu kemampuan mengelola usaha yang tidak hanya sekedar mencari keuntungan semata, tetapi juga bagaimana agar usaha tersebut dapat bertahan dalam persaingan dan berkembang. Masyarakat melakukan suatu kewirausahaan karena kurang tersedianya lapangan pekerjaan yang diberikan pemerintah. Hal ini membuat mayoritas masyarakat berfikir untuk menciptakan lapangan kerja bagi diri sendiri atau menciptakan lapangan kerja bagi orang lain mengelola sumber daya alam maupun sumber daya manusia untuk mengembangkan suatu usaha agar memperoleh penghasilan (pendapatan) atau keuntungan dan untuk memenuhi kebutuhan agar mereka dapat bertahan hidup. Selain hal diatas masyarakat yang terjun dalam berwirausaha karena bakat yang

diperoleh dari keluarga mereka. Namun agar kegiatan wirausaha dapat bertahan lama karena banyaknya persaingan dalam berwirausaha maka para wirausahawan harus meningkatkan bakat dalam berwirausaha dengan memiliki ilmu pengetahuan yang diperoleh dari pendidikan formal maupun non formal seperti kursus, penataran, pelatihan, dan sebagainya. Sehingga dengan bekal ilmu pengetahuan yang dimiliki, seorang wirausahawan dapat bekerja lebih mantap dan tidak asal-asalan sehingga resiko kegagalan yang dihadapi sangat kecil.

5. Bila perusahaan yang mempunyai beberapa pabrik dan beberapa gudang bermaksud menambah kapasitas satu pabriknya atau realokasi pelayanan dari setiap pabrik serta penambahan pabrik atau gudang baru.
6. Menentukan lokasi pabrik dimana harus dipilih beberapa lokasi dari beberapa alternatif lokasi yang ada.

Secara umum masalah transportasi ditentukan sebagai berikut:

1. Jika total *demand* sama dengan total *supply*, dengan persamaan:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Fungsi tujuan model transportasi ini dapat ditulis sebagai:

$$Minimum: Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Dengan fungsi kendala:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = s_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = d_j$$

$$X_{ij} \geq 0 \; untuk \; i = 1,2,3,\dots,m \; dan \; j = 1,2,3,\dots,n$$

Dari persamaan di atas dapat diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = \sum_{j=1}^{n} d_i$$

Selanjutnya persamaan tersebut dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} (X_{i1} + X_{i2} + \cdots + X_{in}) = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} X_{i1} + \sum_{i=1}^{m} X_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{m} X_{in} = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

$$\Leftrightarrow (X_{11} + X_{21} + \cdots + X_{m1}) + (X_{12} + X_{22} + \cdots + X_{m2}) + \cdots + (X_{1n} + X_{2n} + \cdots + X_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

$$\Leftrightarrow (X_{11} + X_{12} + \cdots + X_{1n}) + (X_{21} + X_{22} + \cdots + X_{2n}) + \cdots + (X_{m1} + X_{m2} + \cdots + X_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} X_{1j} + \sum_{j=1}^{n} X_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} X_{mj} = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (X_{1j} + X_{2j} + \cdots + X_{mj}) = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

Karena diketahui dari persamaan sehingga diperoleh bahwa:

$\sum_{j=1}^{n} d_j = \sum_{i=1}^{m} s_i$, adalah masalah transportasi seimbang.

Maka model permasalahan transformasi tersebut dapat pula disebut sebagai model transportasi seimbang (*balanced transportation).*

2. Jika total *demand* tidak sama dengan total *supply*, dengan persamaan:
   a) Total *demand* lebih besar dari total *supply*

   $$\sum_{i=1}^{m} s_i < \sum_{j=1}^{n} d_j$$

   Maka fungsi tujuan untuk model transportasi ini dapat ditulis sebagai:

   $$Minimum: Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

   Dengan fungsi kendala:

   $$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \geq s_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \leq d_j, \ \ X_{ij} \geq 0 \ untuk\ i = 1,2,3, \dots, m\ dan\ j = 1,2,3, \dots, n$$

b) Total *demand* lebih kecil dari total *supply*

$$\sum_{i=1}^{m} s_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Maka fungsi tujuan untuk model transportasi ini dapat ditulis sebagai:

$$Minimum: Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

Dengan fungsi kendala:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq s_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \geq d_j, \ \ X_{ij} \geq 0 \ untuk\ i = 1,2,3, \dots, m\ dan\ j = 1,2,3, \dots, n$$

Keterangan:

$s_i, i =$ $1,2,3, \dots, m$ merupakan penawaran pada supply ke-i

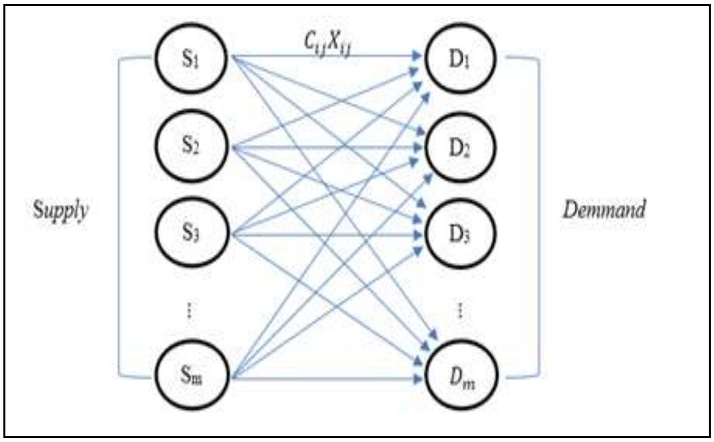
$d_j, j =$ $1,2,3, \dots, n$merupakan penawaran pada supply ke-j

C_{ij} = biaya pengalokasian material per unit dari lokasi penawaran atau supply menuju ke lokasi permintaan atau demand

X_{ij} = besar kapasitas pengalokasian material per unit dari lokasi penawaran atau supply ke lokasi permintaan atau demand (Winston, 1976).

3.5 Asumsi Model Masalah Transportasi

Pada model masalah transportasi menggunakan asumsi dasar biaya pengalokasian (C_{ij}) satu material adalah proporsional dengan kapasitas material (X_{ij}) yang dialokasikan. Secara umum satu sumber i $(i = 1,2,3, \dots, m)$ mempunyai penawaran sejumlah s_i untuk dialokasikan ke suatu tujuan j $(j = 1,2,3, \dots, n)$ yang mempunyai permintaan sejumlah d_j (Taha, 2003). Transportasi *networks* untuk model transportasi secara umum digambarkan sebagai berikut:



Gambar di atas memperlihatkan bahwa penawaran (S_i) dan permintaan (D_j) dilambangkan dengan sebuah node yang masing-masing dihubungkan dengan tanda *arc*, di mana tanda *arc* tersebut bergerak dari *node* penawaran menuju ke *node* permintaan dengan biaya pengalokasian per unit adalah C_{ij} dan kapasitas pengalokasian per unit adalah X_{ij}.

3.6 Formulasi Model Masalah Tranportasi

Selain biaya pengalokasian (C_{ij}) per unit dari penawaran pada sumber i menuju permintaan pada tujuan j dalam formulasi model transportasi terdapat sejumlah kapasitas yang dialokasikan (X_{ij}), sehingga untuk menentukan fungsi tujuan suatu permasalahan transportasi adalah sebagai berikut:

3.6.1 Model Masalah Tranportasi Seimbang

Untuk menentukan fungsi tujuan satu permasalahan transportasi seimbang adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
Minimum: Z = \; & C_{11}X_{11} + C_{21}X_{21} + C_{31}X_{31} + \cdots + C_{m1}X_{m1} + \\
& C_{12}X_{12} + C_{22}X_{22} + C_{32}X_{32} + \cdots + C_{m2}X_{m2} + \\
& C_{13}X_{13} + C_{23}X_{23} + C_{33}X_{33} + \cdots + C_{m3}X_{m3} + \\
& C_{1n}X_{1n} + C_{2n}X_{2n} + C_{3n}X_{3n} + \cdots + C_{mn}X_{mn}
\end{aligned}
$$

Sedemikian sehingga fungsi tujuan permasalahan transportasi ini dapat dituliskan seperti pada persamaan (2.2), dengan fungsi kendala sebagai berikut:

Fungsi kendala:

$$X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} + \cdots + X_{in} = s_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} X_{ij} = s_i$$

$$X_{1j} + X_{2j} + X_{3j} + \cdots + X_{mj} = d_j \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_{ij} = d_j$$

$$X_{ij} \geq 0 \; untuk \; i = 1,2,3, \dots, m \; dan \; j = 1,2,3, \dots, n$$

Dengan:

$s_i, i =$ $1,2,3, \dots, m$ merupakan penawaran pada supply ke-i

$d_j, j =$ $1,2,3, \dots, n$merupakan penawaran pada supply ke-j

C_{ij} = biaya pengalokasian material per unit dari lokasi penawaran *(supply)*menuju ke lokasi permintaan*(demand)*.

X_{ij} = besar kapasitas pengalokasian material per unit dari lokasi penawaran *(supply)* ke lokasi permintaan *(demand)*.

3.6.2 Model Masalah Tranportasi Tidak Seimbang

Jika masalah transportasi memenuhi persamaan (2.3) atau (2.4) maka masalah transportasi tersebut dikatakan sebagai masalah transportasi tidak seimbang. Sehingga untuk menyelesaikan suatu permasalahan transportasi dilakukan dengan menambahkan variabel *dummy* dengan tujuan untuk menyeimbangkan permasalahan transportasi tersebut.

Adapun cara untuk menyeimbangkan masalah transportasi tersebut adalah sebagai berikut:

1) *Supply>Demand =dummy destination* (gudang), membuat kolom semu (*dummy column*)
2) *Supply<Demand = dummy source* (pabrik), membuat baris semu (*dummy row*)
3) Sehingga jumlah kapasitas = kebutuhan. Pembuatan baris/kolom semu ini diisi dengan biaya nol (Ramakrishna, 1988).

3.7 Solusi Layak Basis Awal

Langkah awal dalam peyelesaian satu masalah transportasi linier adalah menentukan solusi layak basis awal. Secara umum solusi layak basis awal didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3.1

Untuk penawaran $i\ (i = 1, 2, 3, \dots, m)$ *dan permintaan* $j\ (j = 1, 2, 3, \dots, n)$ *suatu model transportasi linier dapat dikatakan sebagai solusi layak basis awal jika jumlah alokasi positif sama dengan* $(m + n - 1)$.

Dari Definisi 2.5.1 dijelaskan bahwa sebanyak *m* penawaran dan sebanyak *n* permintaan, satu tabel transportasi linier dapat dikatakan memeiliki solusi layak basis awal jika jumlah alokasinya positif atau kapasitas pengalokasiaannya sebanyak $(m + n - 1)$.

Secara umum prosedur untuk memperoleh solusi layak basis awal adalah:

1) Semua baris penawaran dan kolom tujuan pada tabel transportasi, dapat dijadikan variabel basis (daerah pengalokasian = masih kosong).
2) Diantara baris dan kolom yang masih dapat dijadikan variabel basis, dipilih variabel basis berikutnya berdasarkan pada beberapa kriteria yang bergantung pada metode yang digunakan.
3) Pengalokasian dibuat sebanyak mungkin untuk memenuhi nilai penawaran dan permintaan.
4) Menghilangkan baris atau kolom yang telah terpenuhi penawaran atau permintaannya dari pengalokasian berikutnya.
5) Bila hanya tersisa satu baris atau kolom yang bisa menerima pengalokasian, maka pengalokasian diberikan pada kotak baris atau kolom tersebut, dan prosedur selesai (Taha, 2003).

Dalam menentukan solusi basis awal satu permasalahan transportasi linier terdapat beberapa metode yang dapat digunakan, diataranya adalah metode *North West Corner (NWC); Least Cost (LC); Vogel Approximate Method (VAM); Modified Vogel Approximate Method (MVAM)*. Dari berbagai metode penentuan solusi basis awal tersebut, *Modified Vogel Approximate Method (MVAM)* yang akan digunakaan dalam penelitian kali ini.

Dalam menentukan solusi awal fisibel terdapat berbagai jenis metode. Metode-metode transportasi untuk menentukan solusi fisibel basis awal menurut Drs.Zulian Yamit,M.Si dalam bukunya yang berjudul "Manajemen Kuantitatif Untuk Bisnis(Operation Research)"(2003:222) adalah sebagai berikut :

a. Metode *North-West-Corner* (Sudut kiri Atas)

Metode ini bisa juga disebut metode pojok kiri atas atau metode barat laut. Metode ini digunakan untuk mencari penyelesaian awal dari persoalan transportasi yang dihadapi. Prosedur penggunaan Metode *North-West-Corner* adalah sebagai berikut:

- Tampilkan persoalan ke dalam matriks transportasi.
- Selalu memulai pengisian yang pertama kali pada jalur yang berada pada pojok kiri atas. Pengisian dan pengalokasian barang pada jalur ini harus berpedoman pada kapasitas yang ada dan jumlah permintaan yang harus dipenuhi.
- Lakukan gerakan zig-zag dari pojok kiri atas ke arah kanan bawah, sampai semua barang yang diproduksi habis terdistribusi dan memenuhi semua permintaan yang ada.
- Hitung total biaya yang diperoleh.

b. Metode *Least Cost* (Biaya Minimum)

Prinsip metode ini adalah sebagai berikut :

- Berikan nilai setinggi mungkin pada variabel X_{ij} dengan biaya unit C_{ij} terkecil dalam tabel (beberapa unit yang sama dipilih secara sembarang)
- Silang baris atau kolom yang sudah terpenuhi (seperti dalam metode sudut barat laut, jika sebuah baris dan sebuah kolom dipenuhi secara bersamaan hanya satu yang disilang).
- Sesuaikan persediaan dan permintaan untuk semua baris dan kolom yang belum disilang.

- Ulangi proses tersebut dengan memberikan nilai setinggi mungkin pada variabel X_{ij} dengan biaya terkecil yang belum disilang. Proses ini selesai ketika tepat satu baris atau satu kolom yang belum disilang.

c. *Vogel's Approximation Method* (Metode Pendekatan Vogel)

Metode ini merupakan metode terbaikdibandingkan dengan kedua metode diatas. Metode ini dapat menghasilkan pemecahan awal yang optimum atau dekat dengan optimum. Langkah-langkah pengerjaannya adalah sebagai berikut:

- Hitung penalty untuk tiap kolom dan baris dengan mengurangkan elemen ongkos terkecil dari yang kedua terkecil.
- Selidiki kolom atau baris dengan penalty terbesar. Alokasikan sebanyak variabel pada ongkos terkecil. Sesuai supply dengan demand, kemudian tandai kolom atau baris yang terpenuhi secara simultan, pilih baris atau kolom yang terpilih adalah nol, tidak terbawa lagi dalam perhitungan penalty berikutnya.
- Langkah selanjutnya adalah:
  - ✓ bila tinggi satu kolom atau baris yang belum ditandai STOP.
  - ✓ Jika hanya satu baris atau kolom yang disilang tentukan variabel dasar nol berdasarkan metode biaya terendah.
  - ✓ Jika semua baris atau kolom yang belum disilang memiliki supply dan demand nol, tentukan variabel-variabel basis yang berharga nol berdasarkan metode biaya terkecil, kemudian STOP.

- Jika ketiga langkah tersebut tidak terjadi, hitung kembali penalty untuk baris atau kolom yang belum ditandai.

Sebelum mengadakan pengujian Optimalisasi terhadap tabel awal transportasi, terlebih dahulu harus diperhatikan banyaknya sel yang terkena beban alokasi sementara. Hal ini sangat penting karena banyaknya sel yang terkena beban alokasi sementara harus sama dengan jumlah baris ditambah kolom dikurangi satu, agar dapat dilakukan pengujian optimalisasi terhadap tabel awal transportasi.

Jika banyaknya garis dilambangkan dengan "m", dan banyaknya kolom dilambangkan dengan "n", maka dinyatakan bahwa banyaknya sel yang terkena alokasi beban sementara harus = (m+n-1) agar dapat dilakukan pengujian optimalisasi tabel awal transportasi lebih lanjut.

3.8 Metode *VAM* (*Vogel Approximate Method)*

Metode *VAM* diperkenalkan oleh WR. Vogel tahun 1948, prinsip dari metode ini adalah dengan memilih masing-masing sebanyak dua biaya terkecil antara setiap baris maupun antar kolom yang diasumsikan sebagai biaya, kemudian hitung selisih dari kedua biaya terkecil tersebut, bilangan-bilangan tersebut dikenal dengan istilah bilangan *vogel*. Dalam suatu permasalahan transportasi, aplikasi dari metode ini digunakan untuk penentuan biaya penalti dan menyajikan penyelesaian layak basis awal yang sering kali menghasilkan total biaya yang sama atau mendekati solusi optimal (Singh, 2012).

Adapun langkah-langkah metode *VAM* adalah sebagai berikut:

1) Hitung penalti dari setiap baris dan kolom. Nilai penalti didapat dari selisih antara nilai terkecil dari baris atau kolom dengan nilai terkecil kedua dari baris atau kolom yang sama.
2) Pilih Penalti terbesar.
3) Alokasikan sebanyak mungkin barang pada sel dengan biaya terkecil.
4) Hentikan proses bila semua barang telah dialokasikan dan semua permintaan telah dipenuhi. Jika belum terpenuhi;
5) Ulangi langkah 1 dengan syarat baris/kolom dengan jumlah barang 0 tidak ikut diperhitungkan pada iterasi berikutnya (Singh,2012).

3.9 Metode *MVAM* (*Modified Vogel's Approximate Method)*

Metode *MVAM* adalah penyempurnaan dari metode *VAM*yang dimodifikasi menggunakan matriks *Total Opportunity Cost* (TOC) dan biaya alokasi alternatif. Dimana matriks *TOC* diperoleh dengan menambahkan biaya peluang baris dan biaya peluang kolom. Biaya peluang baris merupakan nilai matriks yang didapatkan dari pengurangan setiap baris dengan nilai terkecil dari baris tersebut. Sedangkan biaya peluang kolom adalah nilai matriks yang didapatkan dari pengurangan setiap kolom dengan nilai terkecil dari kolom tersebut. Setelah didapatkan matriks *TOC*, selanjutnya adalah mencari penalti dengan cara mengurangkan antara biaya terbesar dengan biaya terkecil, kemudian pilih dua penalti terbesar dan terakhir menggunakan biaya minimal untuk memilih *cell* pengalokasian.

Berikut ini adalah langkah-langkah *MVAM*:

1) Kurangkan entri terbesar dari setiap elemen pada tiap baris dalam tabel transportasi. Dan tulis hasilnya pada kiri atas setiap elemen tersebut.
2) Kurangkan biaya transportasi terbesar dari setiap elemen pada tiap kolom dalam tabel transportasi. Dan tulis hasilnya pada kiri bawah setiap elemen tersebut.
3) Bentuk sebuah matriksselisih dimana elemen-elemennya adalah hasil penjumlahan dari langkah 1 dan 2.
4) Hitung indikator distribusi dengan mengurangkan elemen terbesar dan elemen terbesar kedua pada tiap baris dan tiap kolom dari dari matriksselisih dan tulis hasilnya masing-masing pada kolom setelah kolom *supply* dan baris *demand*.
5) Inditifikasi indikator distribusi terbesar, jika terdapat dua atau lebih indikator terbesar, pilih indikator terbesar dimana terdapat elemen terbesar. Jika terdapat dua atau lebih elemen terbesar, pilih satu antara dua atau lebih elemen tersebut.
6) Alokasi $X_{ij} = \min(s_i, d_j)$ pada kiri bawah elemen terbesar di sel(i, j) pada matriks selisih.
7) Jika $s_i < d_j$, tinggalkan baris ke-i dan sesuaikan d_j sebagai $d'_j = d_j - s_i$. Jika $s_i > d_j$, tinggalkan kolom ke-j dan sesuaikan s_i sebagai $s'_i = s_i - d_j$. Jika $s_i = b_j$, tinggalkan baris ke-i dan kolom ke-j.
8) Ulangi langkah 4 sampai langkah 7 hingga pengalokasian supply dan demand habis.
9) Letakan semua aloksi positif dari matriks selisih ke table transportasi awal dan hitunglah TTC, $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$ dimana

X_{ij} adalah total alokasi pada sel (i, j) dan C_{ij} adalah biaya transportasi pada sel (i, j) (Ullah, 2016).

3.10 Solusi Optimal

Solusi optimal adalah solusi akhir yang diperoleh dengan cara menguji solusi layak basis awal menggunakan metode-metode pencarian solusi optimal.

Definisi 3.2

Sebuah solusi yang layak basis dapat dikatakan sebagai solusi yang optimal jika total keseluruhan biaya transportasi yang dihasilkan adalah minimum.

Dari definisi tersebut dikatakan bahwa untuk memperoleh solusi optimal dari suatu permasalahan dilakukan dengan menguji solusi layak basis menggunakan metode solusi optimal.Dari dua metode pengujian solusi optimal yang diketahui, pada penelitian ini akan digunakan metode *Stepping Stones.*

Ada dua metode yang digunakan untuk mengetahui optimal tidaknya tahap sebelumnya, yaitu menggunakan :

a. *The Stepping Stone Method* (Metode Batu Loncatan)

Cara ini diketemukan oleh W.W Cooper dan A. Chames dan ini merupakan cara yang sering dan banyak digunakan untuk mengetahui atau menguji optimal atau tidaknya tahap pertama. Dengan langkah-langkah sebagai berikut :

- Setiap sel kosong dievaluasi dengan memindahkan sel kosong tersebut satu unit dari sel yang terisi untuk menentukan pengaruh. Dari pemindahan satu unit ke sel yang kosong terhadap fungsi objektif, harus ditentukan lintasan tutup antara sel-sel yang terisi.

- Lintasan ini terdiri dari beberapa langkah yang dimulai dari sel yang kosong sampai kembali ke sel yang kosong tersebut, arahnya lurus dan siku-siku (arah diagonal tidak diperkenankan) serta jalurnya searah dengan jarum jam atau juga sebaliknya. Lintasan dilalui berturut-turut diberi tanda positif (pada sel kosong harus selalu bertanda "+"), kemudian negatif sampai akhirnya kembali ke sel yang dimaksud.
- Setelah semua sel kosong dihitung, tentukan sel kosong yang menghasilkan negatif terbesar dan gunakan lintasan tutupnya untuk memindahkan barang-barang, sehingga diperoleh suatu pemecahan fisibel baru, bila keadaan belum optimal. Sedangkan bila keadaan telah menunjukkan semua hasil dan perhitungan sel kosong positif, maka menandakan telah optimal.

b. *The Modified Distribution Method*/MODI (Metode Distribusi Termodifikasi)

MODI merupakan singkatan dari "Modified Distribution" yang berarti distribusi yang dimodifikasikan. Cara ini iterasinya sama dengan stepping stone. Perbedaan utama terjadi pada cara pengevaluasian variabel nonbasis, atau penentuan penurunan ongkos transport per unit untuk setiap variabel. Cara ini dikembangkan berdasarkan teori dualitas. Secara lebih jelas, langkah-langkah penyusunan MODI adalah sebagai berikut :

- Misalkan banyaknya baris (m) dan banyaknya kolom(n), agar dapat dilakukan tes untuk menguji apakah hasil alokasi sementara telah optimal atau belum, maka jumlah sel yang diberi alokasi sementara harus m+n-1.

- Kemudian menetapkan U_i, yaitu notasi untuk angka baris dan V_j, yaitu notasi untuk angka kolom.
- Dengan menggunakan rumus $C_{ij} = U_i + V_j$ untuk sel yang terkena beban alokasi maka ditentukan besarnya nilai U_i maupun V_j. Untuk memudahkan penentuannya dapat dimisalkan slah satu nilai U_i atau V_j sama dengan nol.
- Hitung semua sel bukan baris dengan rumus $C_{ij} - U_i - V_j$.
- Tentukan sel yang akan masuk baris dengan memilih nilai sel bukan baris yang memiliki negatif terbesar. Kemudian buatlah closed path (jalur tertutup) untuk menentukan sel yang akan keluar baris dengan memilih jumlah unit terkecil dari sel yang bertanda negatif.
- Tabel optimum tercapai apabila sel bukan baris semuanya memiliki nilai lebih besar sama dengan nol.
- Jika tabel belum optimum, ulangi kembali langkah awal sehingga ditemukan tabel optimum.

Rangkuman

1. Metode transportasi merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengatur distribusi dari beberapa sumber ke tempat-tempat yang membutuhkan barang. Tujuan dari masalah transportasi adalah untuk menentukan jumlah yang optimal dari barang yang akan diangkut dari berbagai sumber ke berbagai tujuan sehingga biaya transportasi total minimum.
2. Metode transportasi terbagi menjadi dua tahap utama yaitu tahap pertama merupakan tahap menentukan solusi awal fisibel dan tahap

kedua adalah tahap pengujian optimalisasi atau menentukan apakah pengalokasian sudah optimal atau belum.

3. Metode-metode transportasi untuk menentukan solusi fisibel basis awal adalah sebagai berikut :
    a. Metode *North-West-Corner* (Sudut kiri Atas).
    b. Metode *Least Cost* (Biaya Minimum).
    c. *Vogel's Approximation Method* (Metode Pendekatan Vogel)
4. Ada dua metode yang digunakan untuk mengetahui optimal tidaknya tahap sebelumnya, yaitu menggunakan :
    a. *The Stepping Stone Method* (Metode Batu Loncatan)
    b. *The Modified Distribution Method*/MODI (Metode Distribusi Termodifikasi)

Contoh Soal dan Pembahasan

Untuk lebih memantapkan pemahaman anda mengenai materi yang telah dipelajari, kerjakan dengan benar soal latihan berikut:

1) Jelaskan pengertian Metode Transportasi
2) Jelaskan Pengertian dari Metode Stepping Stone (SS)
3) Jelaskan pengertisn dari Metode Modified Distribution (MODI)
4) Jelaskan pengertian dari Metode Vogel's Approximation (VAM)
5) Sebutkan langkah-langkah pemecahan model transportasi
6) Perusahaan "XYZ" yang berkantor pusat di Jakarta memiliki 3 buah pabrik yang terletak di Makassar (Mak), Balikpapan (Bpp), dan Belawan (Bel) dengan kapasitas produksi masing-masing sebesar 70 ton, 55 ton, dan 75 ton/bulan. Disamping itu perusahaan tersebut memiliki Agen di 5 kota yakni; Jakarta (Jkt) dengan kebutuhan 30 ton/bulan, Bandung (Bdg) dengan

kebutuhan 20 ton/bulan, Semarang (Smg) meminta sebanyak 35 ton/bulan, Yogyakarta (Yog) sebanyak 75 ton/bulan dan Surabaya (Sby) membutuhkan sebanyak 40 ton/bulan. Biaya Transportasi dari sumber (pabrik) ke tujuan (Agen) dikemukakan pada Tabel sebagai berikut:

Ke	Biaya Transportasi (Rp 000)				
Dari	Jkt	Bdg	Smg	Yog	Sby
Mak	25	20	45	35	10
Bpp	15	45	20	30	35
Bel	40	25	50	15	20

Pembahasan

1. Metode Transportasi adalah suatu metode yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah transportasi atau pengiriman barang atau bahan dari beberapa sumber, ke beberapa tempat tujuan dengan prinsip biaya yang paling minimum. Masing-masing sumber mempunyai kapasitas pengiriman tertentu, sedangkan masing-masing tempat tujuan memiliki batasan-batasan permintaan (demand) tertentu pula.
2. Metode Stepping Stone adalah suatu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan problem transportasi dengan cara “coba-coba” dan pedoman alokasinya adalah sudut barat laut (sudut kiri atas) dari tabel permasalahan dengan menyesuaikan kapasitas pabrik dan kebutuhan atau permintaan.
3. Metode MODI adalah merupakan perkembangan dari metode Stepping Stone. Perbedaannya terletak pada pelaksanaanya yang

lebih cepat dan lebih tepat jika dibandingkan metode Stepping Stone. Langkah-langkah pemecahan masalah dengan menggunakan metode MODI adalah sebebagai berikut:

a. Menyusun matriks sumber–sumber (baris m) dan tujuan (kolom n). Pengisian alokasi
b. dilakukan dengan mengikuti prosedur Stepping Stone, yaitu dimulai dari sudut barat laut (sudut kiri atas)
c. Mencari nilai-nilai tiap baris dan tiap-tiap kolom (k) dengan menggunakan rumus umum,
d. yaitu Ri + kj = Cij. Nilai baris pertama diberi nilai = 0, kemudian dihubungkan dengan segiempat batu yang terisi alokasi (Stone Square).
e. Menghitung Indeks Perbaikan dengan berpatokan pada segi empat air yang tidak terisi alokasi (Water Square) dengan persamaan : Cij – Ri – kj.
f. Memilih titik tolak perubahan yang didasarkan pada angka negatif maksimum
g. Mengulangi langkah b, hingga diperoleh biaya paling optimal.

4. Metode VAM merupakan pengembangan dari metode-metode sebelumnya (SS dan MODI), perbedaannya terlatak pada kemudahan, kecepatan dan ketepatan perhitungan.Langkah-langkah yang dapat ditempuh dalam penelesaian masalah transportasi dengan menggunakan metode VAM ini adalah sebagai berikut:

   Formulasi masalah:

   a. Mencari perbedaan-perbedaan antara dua biaya pada kotak minimum dan urutan minimum berikutnya.

b. Mencari perbedaan terbesar sebuah baris atau kolom
c. Mencari titik tolak alokasi berdasarkan biaya paling minimum pada baris atau kolom perbedaan terbesar (maksimum)
d. Alokasi pada baris atau kolom dari titik tolak alokasi yang terpilih dan sisesuaikan dengan jumlah batasan baik kapasitas maupun kebutuhan/ demand
e. Tentukan kembali perbedaan biaya pada langkah kedua (poin2).

5. - Perumusan masalah
   - Penentuan alokasi pengiriman
   - Test optimasi, jika belum optimal, maka lakukan alokasi pengiriman lain
   - Realokasi sampai optimal.
6. Langkah pertama yaitu kita harus merumuskan permasalahannya terlebih dahulu

   a. Perumusan masalah

      Perumusan masalah dilakukan dengan cara memasukkan data-data kebutuhan/permintaan masing-masing agen, kapasitas masing-masing pabrik dan biaya transportasi dari sumber, atau pabrik (i) ke berbagai tujuan, atau agen (j). Adapun perumusan masalah tersebut dipaparkan:

Ke (j) Dari (i)	Biaya Transportasi (Rp 000)					**Kapasitas**
	Jkt	Bdg	Smg	Yog	Sby	
Mks	25	20	45	35	10	**70**
Bpp	15	45	20	30	35	**55**
Bel	40	25	50	15	20	**75**
Demand	**30**	**20**	**35**	**75**	**40**	**200**

b. Penentuan Alokasi

Penentuan Alokasi dimulai dari sudut kiri atas (pojok barat laut) yang tampak pada table yaitu kotak Mks-Jkt dengan memperhatikan kapasitas pabrik Mks = 70 ton. Dan permintaan di Jkt hanya sebanyak 30 ton. Jika kapasitas pabrik masih tersisa, maka akan dialokasikan pada kotak selanjutnya.Adapun cara penentuan alokasi dikemukakan pada tabel sebagai berikut:

Ke (j) Dari (i)	Biaya Transportasi (Rp 000)					**Kapasitas**
	Jkt	Bdg	Smg	Yog	Sby	
Mks	25 **30**	20 **20**	45 **20**	35	10	**70**
Bpp	15	45	20 **15**	30 **40**	35	**55**
Bel	40	25	50	15 **35**	20 **40**	**75**
Demand	**30**	**20**	**35**	**75**	**40**	**200**

Kapasitas produksi di pabrik Mks adalah sebanyak 70 ton, sementara kebutuhan/permintaan agen di Jkt hanya sebanyak 30 ton, maka kelebihan kapasitas tersebut dialokasikan ke agen Bdg yang meminta sebanyak 20 ton, kemudian kelebihan kapasitas dialokasikan ke agen Smg sebanyak 20 ton.

Agen Smg membutuhkan sebanyak 35 ton, telah dialokasi oleh pabrik Mks sebanyak 20 ton, berarti masih terdapat kekurangan sebanyak 15 ton yang akan dipenuhi dari pabrik Bpp dan seterusnya.

Kotak-kotak yang terisi (mendapatkan alokasi) disebut dengan Stone Square (segi empat batu), sedangkan kotak yang tidak teralokasi disebut Water Square (segi empat air). Dengan selesainya kegiatan alokasi, maka perhitungan biaya transportasi dikemukakan pada tabel, berikut:

Kotak	Isi	Biaya	Total Biaya
Mks – Jkt	30	25	750
Mks – Bdg	20	20	400
Mks – Smg	20	45	900
Bpp – Smg	15	20	300
Bpp – Yog	40	30	1.200
Bel –Yog	35	15	525
Bel – Sby	40	20	800
Total			4.875

a. Tes optimal

   a. Test optimal dapat dilakukan dengan cara merubah alokasi secara trial and error (coba-coba), agar biaya transportasi dapat berkurang sampai biaya tersebut menjadi optimal. Perubahan alokasi didasarkan pada kotak segi empat terdekat

b. Realokasi

   Realokasi diperlukan untuk mencari biaya yang paling rendah (optimal), yaitu Kotak Mks-Bdg, Mks-Smg, Bpp-Bdg, Bpp-

Smg, misalnya dialokasikan 1 ton, maka hasilnya sebagai berikut:

Mks – Bdg = - 45
Mks – Smg = + 35
Bpp – Bdg = - 30
Bpp – Smg = + 20 (+)
= - 20

Dengan hasil -20, maka setiap realokasi sebanyak 1 ton akan mengurangi biaya sebesar Rp 20, (-20). Perubahan alokasi ini dikemukakan pada tabel, berikut:

Ke (j) / Dari (i)	Biaya Transportasi (Rp 000)					**Kapasitas**
	Jkt	Bdg	Smg	Yog	Sby	
Mks	25 **30**	20 **20**	45 **20**(-)	35 **20**(+)	10	**70**
Bpp	15	45	20 **15(+)**	30 **40(-)**	35	**55**
Bel	40	25	50	15 **35**	20 **40**	**75**
Demand	**30**	**20**	**35**	**75**	**40**	**200**

Keterangan:

Angka pengiriman yang di bold (dihitamkan) adalah angka hasil realokasi, tanda (-) artinya terjadi pengurangan alokasi dari kotak tersebut, tanda (+) artinya terjadi penambahan alokasi ke kotak tersebut. Berdasarkan realokasi sesuai dengan Tabel 3.6, maka total biaya trasportasi akibat realokasi dipaparkan pada table berikut:

Kotak	Isi	Biaya	Total Biaya
Mks – Jkt	30	25	750
Mks – Bdg	20	20	400
Mks – Smg	20	35	900
Bpp – Smg	35	20	300
Bpp – Yog	20	30	1.200
Bel –Yog	35	15	525
Bel – Sby	40	20	800
Total			4.475

Berdasarkan informasi pada table di atas, nampak bahwa telah terjadi pengurangan biaya transportasi menjadi sebesar Rp 4.475, dimana pada Tabel 3.5 biaya transportasi adalah sebesar Rp 4.875,- atau terjadi pengurangan sebesar Rp 300,- akibat adanya perbaikan alokasi (realokasi). Kemudian relalokasi berikutnya dikemukakan pada tabel berikut untuk melakukan test optimasi selanjutnya.

Ke (j) Dari (i)	Biaya Transportasi (Rp 000)					**Kapasitas**
	Jkt	Bdg	Smg	Yog	Sby	
Mks	25 **30**	20 **20**	45	35 **20**	10	**70**
Bpp	15	45	20	30 **20**(-)	35 **20**(+)	**55**
Bel	40	25	50	15 **35**(+)	20 **10**(-)	**75**
Demand	**30**	**20**	**35**	**75**	**40**	**200**

Berdasarkan hasil realokasi sebagaimana yang telah ditampilkan pada table diats di atas, tanpak bahwa kotak Bpp – Yog sebaiknya dikurangi sebanyak 20 ton, sehinga kotak tersebut menjadi segi empat air (water square) dan dialokasikan ke kotal Bel – Yog yang tadinya hanya berisi alokasi sebanyak 35 dan dengan adanya alokasi tambahan dari Bpp – Yog, maka alokasi Bel Yog menjadi sebanyak 55 ton. Begitupula kotak Bel – Sby yang pada awalnya berisi alokasi sebanyak 40 ton dengan adanya realokasi maka kotak Bel - Sby berkurang menjadi sebesar 20 ton, dan hasil pengurangan dari kotak tersebut dipindahkan ke kotak (water square) Bpp– Sby sebanyak 20 ton. Hasil test optimasi 2 dikemukakan pada tabel sebagai berikut:

Ke (j) Dari (i)	Biaya Transportasi (Rp 000)					**Kapasitas**
	Jkt	Bdg	Smg	Yog	Sby	
Mks	25 **30**	20 **20**	45	35 **20**	10	**70**
Bpp	15	45	20 **35**	30	30 **20**	**55**
Bel	40	25	50	15 **55**	20 **20**	**75**
Demand	**30**	**20**	**35**	**75**	**40**	**200**

maka biaya transportasi untuk test optimasi 2 dikemukakan

Kotak	Isi	Biaya	Total Biaya
Mks – Jkt	30	25	750
Mks – Bdg	20	20	400
Mks – Smg	20	35	700
Bpp – Smg	35	20	700
Bpp – Yog	20	30	600
Bel –Yog	55	15	825
Bel – Sby	20	20	400
Total			4.375

Bila di bandingkan antara biaya transportasi sebelumnya telah terjadi pengurangan biaya sebesar Rp 100.

BAB 4
PENGANTAR PENGENDALIAN PERSEDIAAN

Tujuan pembelajaran

Bab ini bertujuan agar mahasiswa mampu menguasai konsep tentang definisi Inventori, pengambilan keputusan yang optimal dalam pengaturan Inventori dan penyusunan model-model terkait Inventori. Baik yang deterministik maupun probabilistik. Selain itu juga terkait model-model EOQ untuk deterministik. Dimana didalamnya terdapat banyak perkembangan lagi mulai dari ketika kekurangan barang dapat direncanakan sampai memiliki diskon dalam kuantitas tertentu. Juga dibahas terkait dengan aplikasi model matematika Inventori dengan adanya kemerosotan.

4.1 Pendahuluan

Inventori adalah *stocks of goods being held for future use or sale* atau dapat diartikan kumpulan barang-barang yang disimpan yang mana akan dipakai atau dijual dimasa depan. Pada jaman dahulu beberapa pabrik dijepang adalah salah satu pioneers/penggagas dalam pengenalan sistem inventory on time dimana artinya adalah sistem dimana mengedepankan rencana dan penjadwalan sehingga material yang diperlukan "tepat pada waktunya" untuk mereka pakai. Sehingga pengurangan biaya didapat dengan cara mengurangi inventory sampai ke level yang minimum.

Banyak juga perusahaan di belahan dunia yang lain yang membuat tekhnik baru yang dapat mengatur inventory mereka. Aplikasi dari Tekhnik Riset Operasi (sering disebut dengan scientific inventory management) adalah salah satu alat yang sangat kuat untuk dijadikan cara untuk mendapatkan metode yang lebih baik dari yang lain.

Teori Inventory terbagi menjadi dua, yaitu deterministik dan stokastik. Dimana ketika permintaan (yang mana salah satu parameter dalam model inventori) dianggap tetap dengan melihat masa lalu/yang sudah lewat, disebut sebagai deterministik. Sedangkan jika tidak dianggap sama/tetap disebut pendekatan stokastik.

Menurut Hillier Lieberman Model dalam teori inventori ada 2 jenis yaitu Periodik dan kontinyu. Dimana kontinyu dapat dipakai terus menerus, sedangkan periodik artinya adalah dipakai per periode saja.

Salah satu model di teori Inventori yang kontinyu adalah EOQ (Economic order Quantity) yang mana menghitung seberapa banyak orderan/pembelian sehingga mengurangi banyaknya inventori tetapi juga tidak melupakan perhitungan bahwa inventori tidak boleh habis ketika ingin dipakai.

Terapan EOQ ada bermacam-macam. Beberapanya adalah EOQ ketika kekurangan barang dapat di rencanakan, dan EOQ ketika memiliki diskon dalam kuantitasnya. Maksudnya disini adalah biasanya EOQ tidak dihitung sutu model dimana kita memiliki penalty atau bayaran akibat kehabisan stock. Dan memiliki diskon ketika membeli artinya pasti terdapat diskon ketika membeli dalam jumlah banyak.

Salah satu model di teori Inventori yang periodik adalah Algoritma, disini algoritmanya menggunakan program dinamik. Tahap membagi menjadi 2 jenis yaitu statis (tidak bergantung terhadap waktu) dan Dinamis (Bergantung terhadap waktu). Yang mengakibatkan terdapat EOQ statis dan dinamis serta Algoritma statis dan dinamis.

Sehingga sebenarnya Teori Inventori Terbagi jadi:

1. EOQ Statis dan dinamis
2. Algoritma Statis dan dinamis
3. EOQ Probablistik Statis dan Dinamis
4. Algoritma Probablistik Statis dan Dinamis

4.2. Definisi Inventori menurut Para Ahli

Definisi Inventori oleh para Ahli:

- Rangkuti (2004: Manajemen Persediaan Aplikasi di Bidang Bisnis) Rangkuti didalam bukunya menyatakan bahwa persediaan merupakan suatu aktiva yang meliputi barang-barang milik perusahaan dengan maksud untuk dijual dalam suatu periode usaha tertentu, atau persediaan barang-barang yang masih dalam pengerjaan atau proses produksi, ataupun persediaan bahan baku yang menunggu penggunaannya dalam suatu proses produksi.
- Kusuma (2009: Manajemen Produksi Perencanaan dan Pengendalian Produksi) Kusuma didalam bukunya menyatakan bahwa persediaan diartikan sebagai barang yang disimpan untuk digunakan atau dijual pada periode mendatang.

Dari beberapa definisi Inventori dari para ahli tersebut, dapat disimpulkan bahwa model Inventori mengetahui seberapa banyak level dari komoditas sehingga pebisnis dapat mempertahankan operasinya dengan lancar. Basis dari pengambilan keputusan adalah model yang menyeimbangkan harga/bayaran yang dihasilkan dari banyaknya barang yang disimpan melawan harga/bayaran penalti yang dihasilkan oleh kekurangan inventori.

4.3. Manfaat dan Tujuan Inventori

Beberapa manfaat dari *Inventori* diantaranya adalah :

1. Memanfaatkan Diskon Kuantitas Diskon kuantitas diperoleh jika perusahaan membeli dalam kuantitas yang besar.
2. Menghindari Kekurangan Bahan (Out Of Stock)
3. Manfaat Pemasaran, Jika perusahaan selalu mampu memenuhi keinginan pelanggan pada saat dibutuhkan maka kepuasan pelanggan semakin baik, dan perusahaan semakin untung.
4. Peningkatan Tingkat Pelayanan Pelanggan

   Tingkat pelayanan tertinggi dapat menyediakan pelanggan sehubungan dengan respon yang cepat terhadap permintaan atau perubahan persyaratan dimana hal ini akan meningkatkan kepuasan pelanggan.
5. Pengontrolan Persediaan yang Lebih Baik Fleksibilitas

   Fungsi penting adanya inventori atau persediaan adalah untuk menghilangkan resiko keterlambatan pengiriman bahan baku atau barang yang dibutuhkan perusahaan, menghilangkan resiko jika material yang dipesan tidak baik sehingga harus dikembalikan, menghilangkan resiko terhadap kenaikan harga barang atau inflasi, untuk menyimpan bahan baku yang dihasilkan secara musiman sehingga perusahaan tidak akan sulit bila bahan tersebut tidak tersedia dipasaran, mendapatkan keuntungan dari pembelian berdasarkan potongan kuantitas (*Quantity Discount*), dan memberikan pelayanan kepada langganan dengan tersediaanya barang yang diperlukan.

Sedangakan bagi pengambil keputusan inventori bermanfaat sebagai:

1. Dapat sebagai alat untuk mengambil keputusan oleh para pebisnis.

   Dalam berbisnis, para pebisnis seringkali dipaksa untuk memberi keputusan atas usaha/bisnisnya. Hal ini sering kali membuat mereka frustasi dikarenakan keputusan- keputusan ini sangat penting tetapi jarang sekali mereka tahu apakah keputusan mereka itu benar atau salah pada saat memberi keputusan tersebut. Sementara itu keputusan-keputusan itu sangat mempengaruhi bisnis tersebut. Dengan teori Inventori paling tidak para pebisnis mengetahui cara mengambil keputusan untuk masalah inventori (bahan simpanan) dalam bisnis mereka.

2. Dapat sebagai alat untuk mendapat arah tindakan yang terbaik (optimum) dalam berbisnis.

   Selain alat untuk mengambil keputusan, teori inventori juga dapat menjadi salah Satu cara untuk membuat suatu tindakan yang terbaik untuk bisnisnya. Dengan mengotomatiskan/selalu memakai teori Inventori maka itu adalah salah satu tindakan terbaik untuk mengatur Inventori mereka dalam berbisnis.

3. Memberikan pengembangan dari beberapa sektor keilmuan, seperti matematik, teknik dan ilmu perhitungan, ilmu politik, ekonomi, teori probabilitas dan statistik.

   Dalam teori Inventori, kita juga dapat menerapkannya kedalam beberapa sector Keilmuan misalkan saja dalam matematika kita dapat membuat sistem/permodelan yang stabil. Dalam ilmu politik juga dapat diterapkan dimana mungkin saja dalam perhitungan subsidi mulai dari minyak sampai beras. Apalagi

Ekonomi, dimana kita menggunakan Teori Inventori dapat merumuskan sedemikian sehingga kita dapat mendapatkan keuntungan yang sangat besar. Dalam teori statistika terdapat stokastik dimana adalah sebuah teori probabilitas dimana salah satu parameternya tidak diketahui dan akan diduga.

4. Memberikan kemudahan dalam perhitungan pengaturan Inventori.

Tentu saja dari namanya saja kita dapat menyimpulkan bahwaTeori Inventori Adalah Teori yang dapat memudahkan kita dalam perhitungan pengaturan Inventori. Misalkan kita memiliki bisnis entah itu toko ataupun perusahaan, maka kita dapat mengaturnya sedemikian sehingga kita untung besar dikarenakan teori ini.

5. Memudahkan membuat jadwal pembelian

Dalam pembuatan jadwal, harus memperhitungkan semua hal dengan matang. Karena dikarenakan jika tidak maka banyak waktu di jadwal tersebut yang akan terbuang.

Tujuan dari ditetapkannya Inventori adalah sebagai berikut:

a. Untuk mengantisipasi resiko keterlambatan datangnya barang
b. Untuk mengantisipasi pesanan bahan tidak sesuai dengan apa yang diperlukan oleh perusahaan sehingga harus dilakukan di return
c. Untuk menyediakan bahan-bahan sebagai bentuk antisipasi juga jika bahan yang dipesan ternyata tidak ada di pasaran
d. Sebagai tahapan untuk menjamin lancarnya proses produksi
e. Untuk memanfaatkan penggunaan mesin secara optimal
f. Untuk memenuhi kebutuhan pasar secara optimal

4.4 Penerapan Inventori dalam Kehidupan Sehari-hari

Penerapan Inventori dalam kehidupan sehari - hari biasanya meliputi pencatatan produk, harga produk yang akan dijual, harga produk yang diterima kembali/ retur barang, harga pokok persediaan, dibeli, pencatatan permintaan dan pengeluaran barang gudang, serta sistem stok opname barang atau perhitungan fisik persediaan.

Macam – macam biaya persediaan, antara lain sebagai berikut:

1. Biaya pembelian (*purchase cost*)

   Biaya pembelian adalah harga per unit apabila item dibeli dari pihak luar, atau biaya produksi per unit apabila diproduksi dalam perusahaan.

2. Biaya pemesanan (*order cost/ setup cost*)

   Biaya pemesanan adalah biaya yang berasal dari pembelian pesanan dari suplier atau biaya persiapan (*setup cost*) apabila item diproduksi di dalam perusahaan.

3. Biaya simpan (*carriying cost/holding cost*)

   Biaya simpan adalah biaya yang dikeluarkan atas investasi dalam persediaan dan pemeliharaan maupun investasi sarana fisik untuk menyimpan persediaan.

4. Biaya kekurangan persediaan (*stockout cost*)

   Biaya kekurangan persediaan adalah konsekuensi ekonomis atas kekurangan dari luar maupun dari dalam perusahaan.

4.5 Model Economic Order Quantity (EOQ)

Economic Order Quantity (EOQ) adalah model manajemen persediaan yang dapat meminimumkan total biaya terutama biaya pesan (*Ordering Cost)* dan biaya simpan (*Holding Cost)*.

Penggunaan teknik EOQ hanya dapat dilakukan apabila memenuhi syarat:

a. Jumlah kebutuhan bahan dalam satu periode tetap atau tidak berubah.
b. Barang selalu tersedia setiap saat atau mudah didapat.
c. Harga barang tetap.
d. Tenggang waktu atau *Lead Time* pemesanan dapat ditentukan dan relative tetap.
e. Pemesanan datang sekaligus dan menambah persediaan.
f. Kapasitas gudang dan modal cukup untuk menampung dan membeli pesanan.
g. Pembelian adalah satu jenis item.
h. Tidak berlaku harga potongan harga.
i. Permintaan (*demand)* konstan dan bersifat bebas.

Salah satu tujuan manajemen persediaan adalah untuk menyediakan jumlah material yang tepat, lead time yang tepat dan biaya rendah. Biaya persediaan merupakan keseluruhan biaya operasi atas sistem persediaan. Macam – macam biaya persediaan, antara lain sebagai berikut:

1. Biaya pembelian (*purchase cost*)

   Biaya pembelian adalah harga per unit apabila item dibeli dari pihak luar, atau biaya produksi per unit apabila diproduksi dalam perusahaan.

2. Biaya pemesanan (*order cost/ setup cost*)

   Biaya pemesanan adalah biaya yang berasal dari pembelian pesanan dari suplier atau biaya persiapan (*setup cost*) apabila item diproduksi di dalam perusahaan.

3. Biaya simpan (*carriying cost/holding cost*)

   Biaya simpan adalah biaya yang dikeluarkan atas investasi dalam persediaan dan pemeliharaan maupun investasi sarana fisik untuk menyimpan persediaan.

4. Biaya kekurangan persediaan (*stockout cost*)

   Biaya kekurangan persediaan adalah konsekuensi ekonomis atas kekurangan dari luar maupun dari dalam perusahaan.

Dalam pengendalian persediaan baik bahan baku maupun produk jadi dapat dilakukan dengan menggunakan metode EOQ. Beberapa variable analisis perhitungan untuk mendukung penggunaan metode EOQ, yaitu sebagai berikut:

1. *Economic Order Quantity* (EOQ)

   EOQ = $\sqrt{\frac{2 \ x \ D \ x \ S}{H}}$

   Dimana :

   D : Jumlah kebutuhan bahan per tahun

   S : Biaya pemesanan per order

   H : Biaya penyimpanan per unit

2. *Total Inventory Cost* (TIC)

   TIC = $\sqrt{2 \ x \ D \ x \ S \ x \ H}$

   Dimana :

   D : jumlah kebutuhan

   S : Biaya pemesanan

H : Biaya penyimpanan per unit

3. *Safety Stock*

Standart Deviasi = $\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{n}}$

Dimana :

n : jumlah data

x : jumlah kebutuhan bahan

$\bar{x}$: rata-rata kebutuhan bahan

Dari hasil standart deviasi tersebut dapat diketahui *safety stock* dengan menggunakan faktor pengaman 1,65 melalui rumus berikut:

Safety Stock = S_dx Z

Dimana:

S_d: Standart Deviasi

Z : Faktor pengaman

4. *Maximum Inventory*

Maximum inventory (MI) =

Safety Stock + EOQ

Dimana:

Safety Stock: Persediaan pengaman

EOQ: jumlah pembelian optimal

5. *Re Order Poin*t (ROP)

Reorder point =

safety stock + (*lead time* x Q)

Dimana:

Safety stock: persediaan pengaman

Lead time: waktu tunggu

Q: jumlah penggunaan bahan baku rata-rata per hari

4.6 Model Inventori Dengan Adanya Kemerosotan

Pada bagian ini akan dibahas tentang kendali optimal dari penurunan sistem inventori produksi. Model persamaan diferensialnya disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen, kemudian ditentukan solusi optimalnya. Model berikutnya di kembangkan solusinya untuk nilai t menuju tak hingga. Kemudian beberapa bentuk ilustrasi model yang dipakai yaitu permintaan konstan dan permintaan linier.

4.6.1 Pembentukan Model

Pada bagian awal terlebih dahulu diperkenalkan notasi-notasi yang digunakan:

$I(t)$	: tingkat inventori pada waktu t,
$P(t)$	: rata-rata produksi pada waktu t,
$D(t)$	: rata-rata permintaan pada waktu t,
$\theta(t,I(t))$	: rata-rata kemerosotan pada waktu t sesuai dengan $I(t)$,
$h(I(t))$	: rata-rata biaya penyimpanan sesuai dengan $I(t)$,
$K(P(t))$	: rata-rata biaya produksi sesuai dengan $P(t)$,
T	: panjang rencana dalam waktu tertentu,
ρ	: konstan non negatif rata-rata discount,
I_0	: tingkat inventori awal,
$\tilde{\theta}$	: tujuan rata-rata kemerosotan,
$\tilde{I}$	: tingkat inventori tujuan,
$\tilde{P}$	: rata-rata produksi tujuan,
c	: biaya positif produksi unit produksi

Seluruh fungsi yang digunakan diasumsikan non negatif, kontinu dan differensiabel. Andaikan hasil perolehan rata-rata permintaan *D*, produksi yang dapat diawasi nilai rata-ratanya *P*, dan pemerosotan yang terjadi rata-ratanya θ, mengikuti tingkat inventori *I(t)*, berkembang secara dinamis berdasarkan persamaan state. Menurut Hesaam K. Alfares (*Integrating quality and maintenance decisions in a production-inventory model for deteriorating items*) bahwa dalam periode produksi $[0, t_1]$. Selama masa ini, inventori akan bertambah banyak selama masa produksi tetapi akan berkurang dengan adanya permintaan dan kemerosotan sehingga akan diperoleh *inventory differential equation (IDE)* adalah sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))$$

Model tersebut merepresentasikan masalah kontrol optimal dengan sebuah *state variable* yaitu tingkat inventori dan satu variable kontrol yaitu rata-rata tingkat produksi. Masalahnya diasosiasikan meminimumkan sebuah fungsi objektif yang kita inginkan, hingga biaya yang dikeluarkan seoptimal mungkin. Berarti kita akan meminimumkan:

$$\min_{P(t)\geq 0} J(P, I) = \int_0^T F\big(t, I(t), P(t)\big)dt \qquad (3.1.2)$$

subjek dari persamaan state adalah:

$$F\big(t, I(t), P(t)\big) = e^{-\rho t} \langle \tfrac{1}{2}\big[h\big(I(t)\big) - h(\tilde{I})\big]^2 + \tfrac{1}{2}\big[K\big(P(t)\big) - K(\tilde{P})\big]^2 + \tfrac{c}{2}\big[\theta\big(t, I(t)\big) - \tilde{\theta}\big]^2 \rangle$$

Alat utama untuk menyelesaikan masalah ($\mathcal{P}$) pencariannya melibatkan kondisi optimal bentuk pontryagin maksimum seperti yang terdapat dalam pembahasan sebelumnya. Kemudian teori yang digunakan melibatkan fungsi *Hamiltonian* yaitu:

$$H(t, I(t), P(t), \lambda(t)) = -F\big(t, I(t), P(t)\big) + \lambda(t) f\big(t, I(t), P(t)\big)$$

Masalah minimisasi dengan performance functional berbentuk J(u) dapat diselesaikan dengan *prinsip maksimum Pontryagin* yaitu terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk masalah memaksimalkan $J^*(u)$ dengan $J^*(u) = -J(u)$.

Dimana $f(t, I(t), P(t)) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))$ dan λ adalah yang menghubungkan dengan fungsi konstrain dari persamaan differensialnya. Kemudian solusinya akan dihubungkan dengan *prinsip Pontryagin maksimum*.

Teorema 4.1

Kondisi pokok untuk (P^*, I^*) *untuk menjadi solusi optimal dari masalah* $(\mathcal{P})$

$$K(P^*(t)) - K(\tilde{P}) \frac{d}{dt} P^*(t) \frac{d^2}{dp^2} K(P^*(t)) - \rho \frac{\partial}{\partial I} \theta(t^*, I(t)) \frac{d}{dP} K(P^*(t)) = -\frac{d}{dt} P^*(t) \frac{d}{dP} K(P^*(t))^2 + \left(h(I^*(t)) - h(\tilde{I})\right) \frac{d}{dP} h(I^*(t)) + c(\theta(t^*, I(t)) \frac{\partial}{\partial I} \theta(t^*, I(t))$$

(3.1.4)

Dan $I^*(0) = I_0$ $\qquad K(P^*(T)) - K(\tilde{P}) \frac{d}{dT} P^*(T) = 0 \qquad P^*(t) \geq 0$

Teorema 4.2

Diasumsikan bahwa fungsi $F(t,.,P)$ *dan* $\theta(t,.)$ *adalah konvek. Kemudian kondisi pokok adalah syarat cukup* (P^*, I^*) *akan menjadi syarat optimal untuk masalah* $(\mathcal{P})$.

Untuk pembahasan berikutnya, kita akan melibatkan fungsi eksogen yang sifat fungsinya sangat umum. Sehingga solusi eksplisit yang sukar ditemukan, akan dapat diselesaikan pada masalah yang akan kita bahas berikut. Pada hakekatnya mencari nilai dari sistem, sama halnya kita menghitung solusi eksplisit dalam kasus yang fungsi eksogennya memiliki bentuk dasar. Akan didapatkan hasil yang dapat memenuhi kondisi optimal sehingga sistem yang lebih komplek dapat disederhanakan dengan menggunakan fungsi eksogen.

Fungsi eksogen yang lain tidak dipergunakan disini, diupayakan untuk tidak terkait notasi kompleks karena terlalu banyak menggunakan teknik yang detail. Sebagai ilustrasi tujuan mari kita asumsikan beberapa dari bentuk fungsi eksogen sebagai berikut.

$$K\big(P(t)\big) \quad = K_1 P(t) + K_2$$

$$h\big(I(t)\big) \quad = h_1 I(t) + h_2$$

$$\theta\big(t, I(t)\big) = \theta_1 I(t) + \theta_2$$

Dimana $K_i \, , h_i \; dan \; \theta_i$ *(i = 1,2)* adalah konstanta real $K_1 \, , h_1$ dan θ_1 adalah tidak kosong. Dalam kasus ini, karena *I* adalah tertutup ke $\tilde{I}$ dan $\theta\big(t, I(t)\big)$ adalah tertutup ke $\tilde{\theta}$, hingga kita akan peroleh $\tilde{\theta} = \theta_1 I + \theta_2$ dalam problem $(\mathcal{P})$. Sehingga fungsi objektif akan disederhanakan:

$$F\big(t, I(t), P(t)\big) = e^{-\rho t}\left[\frac{H}{2}\Big([\mathrm{I(t)} - (\tilde{\mathrm{I}})]^2 + \frac{K}{2}\Big([\mathrm{P(t)} - (\tilde{\mathrm{P}})]^2\Big)\Big)\right]$$

Dengan nilai dari $H \; = h^2 + c\theta_1{}^2$ dan $K = \boldsymbol{K^2}$.

Kemudian fungsi eksogen juga kita gunakan pada teorema 4.1 sehingga diharapkan akan diperoleh bentuk dasar yang lebih sederhana. Persamaan kita mulai dari kombinasi persamaan yang sudah kita peroleh sebelumnya yaitu:

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) - \rho\frac{d}{dt}I(t) - \left((\rho+\theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right)I(t)$$
$$= \rho D(t) - \rho\tilde{P} + \rho\theta_2 + \theta_1 D(t) - \theta_1\tilde{P} + \theta_1\theta_2 - \frac{d}{dt}D(t) - \frac{h}{K}\tilde{I}$$

Berarti dengan fungsi eksogen kita dapat peroleh bentuk dasar yang lebih sederhana dari teorema 4.1 yaitu

$$\frac{d^2}{dt^2}I(t) - \rho\frac{d}{dt}I(t) - \left((\rho+\theta_1)\theta_1 + \frac{h}{K}\right)I(t)$$
$$= (\rho+\theta_1)[D(t) - \tilde{P} + \theta_2] - \frac{d}{dt}D(t) - \frac{h}{K}\tilde{I}$$

Sehingga

$$P(t) = (a_{1m_1}e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + \frac{d}{dt}Q(t)) + D(t) + (\theta_1 a_1 e^{m_1 t} + \theta_1 a_2 e^{m_2 t} + (\theta_1 Q(t)) + \theta_2)$$

$$P(t) = a_1(m_1+\theta_1)e^{m_1 t} + a_2(m_2+\theta_1)e^{m_2 t} + \frac{d}{dt}Q(t) + \theta_1 Q(t) + D(t) + \theta_2$$

Dimana $Q(t)$ adalah solusi partikular. Syarat awal dan kondisi akhir akan digunakan untuk menghitung konstanta a_1 dan a_2 sebagai berikut. Dari kondisi awal kita peroleh:

$$I(0) = a_1 + a_2 + Q(0)$$

Dan dari kondisi akhir kita dapatkan:

$$a_1(m_1+\theta_1)e^{m_1 T} + a_2(m_2+\theta_1)e^{m_2 T} + \left[\frac{C}{K} + \frac{d}{dt}Q(T) + \theta_1 Q(T) + D(T)\right] = 0$$

Dengan mengambil

$$b_1 = I_0 - Q(0)$$

$$b_2 = -\left[\frac{C}{K} + \frac{d}{dt}Q(T) + \theta_1 Q(T) + D(T)\right]$$

Maka akan kita peroleh dua sistem persamaan linier dengan dua variabel yang tidak diketahui:

$$a_1 + a_2 = b_1$$
$$a_1(m_1 + \theta_1)e^{m_1 T} + a_2(m_2 + \theta_1)e^{m_2 T} = b_2$$

Maka akan kita peroleh solusi yang unik

$$a_1 = \frac{b_2 - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T} b_1}{(m_1 + \theta_1)e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T}}$$
$$a_2 = \frac{(m_2 + \theta_1)e^{m_2 T} b_1 - b_2}{(m_1 + \theta_1)e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T}}$$

Kita dapat menarik kesimpulan dari P menggunakan ekspresi optimal I mendekati dengan persamaan *state*. Mengingat bahwa nilai optimal kontrol P^* harus *non negatif*, sehingga P^* akan menjadi:

$$P^*(t) = maks\{P(t), 0\}$$

Dan kemudian I^* akan kita peroleh langsung dengan menggunakan (3.1) yaitu:

$$\theta(t, I^*(t)) = P^*(t) - D(t) - \frac{d}{dt}\mathrm{I}^*(\mathrm{t})$$

Berarti kita peroleh

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}^*(\mathrm{t}) = P^*(t) - D(t) - \theta(t, I^*(t))$$

Sedangkan berdasarkan fungsi eksogen $\theta\big(t, I(t)\big) = \theta_1 I(t) + \theta_2$ berarti

$$\theta(t, I^*(t)) = \theta_1 I^*(t) + \theta_2$$

Sehingga akan didapatkan

$$\frac{d}{dt}\mathrm{I}^*(t) = P^*(t) - D(t) - (\theta_1 \mathrm{I}^*(\mathrm{t}) + \theta_2)$$
$$\frac{d}{dt}I^*(t) = -\theta_1 I^*(t) + P^*(t) - D(t) - \theta_2.$$

Berdasarkan bentuk solusi sistem $\dot{x}_i(t) = Ax + Bu \ dengan \ x(t_0) = x_0$ dapat dinyatakan dalam bentuk solusi

$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau.$

Maka dengan membentuk solusi sesuai dengan permasalahan di atas akan kita peroleh hasil solusi dalam batas interval dari *(0,t)* adalah sebagai berikut:

$I^*(t) = I_0e^{-\theta_1 t} + \int_0^t [P^*(s) - D(s) - \theta_2]e^{\theta_1(s-t)}\, ds.$

Sehingga bentuk akhir diperoleh

$I^*(t) = I_0e^{-\theta_1 t} + \int_0^t [P^*(s) - D(s) - \theta_2]e^{\theta_1(s-t)}\, ds$

4.6.2 Perluasan Model

Solusi optimal untuk masalah ($\mathcal{P}$) yang dihasilkan *Corollary* dapat diperluas dalam beberapa kondisi pada kasus perencanaan waktu yang lama. Berikut akan kita bahas kasus untuk $T \to \infty$. Dengan asumsi bahwa $\rho > 0$. Kita akan tunjukkan bahwa solusi limit menuju tak hingga memiliki masalah solusi optimal yang akan diselesaikan sebagai berikut:

$$(\mathcal{P}\infty) \begin{cases} \min\limits_{P(t)\geq 0} J(P, I) = \int_0^\infty F\big(t, I(t), P(t)\big)dt \\ \frac{d}{dt} I(t) = f\big(t, I(t), P(t)\big), \quad I(0) = I_0 \end{cases}$$

Dimana:

$F\big(t, I(t), P(t)\big) = e^{-\rho t} \langle \frac{1}{2}\big[h\big(I(t)\big) - h(\tilde{I})\big]^2 + \frac{1}{2}\big[K\big(P(t)\big) - K(\tilde{P})\big]^2 + \frac{c}{2}\big[\theta\big(t, I(t)\big) - \tilde{\theta}\big]^2 \rangle$

$f\big(t, I(t), P(t)\big) = P(t) - D(t) - \theta(t, I(t))$

Untuk kasus tak hingga, kondisi akhir $\lambda(T) = 0$ akan diubah menjadi

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0,$$

Maka akan kita peroleh solusi yang unik

$$a_1 = \frac{b_2 - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T} b_1}{(m_1 + \theta_1)e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T}}$$

$$a_2 = \frac{(m_2 + \theta_1)e^{m_2 T} b_1 - b_2}{(m_1 + \theta_1)e^{m_1 T} - (m_2 + \theta_1)e^{m_2 T}}$$

Sehingga akhirnya akan diperoleh :

$$P_\infty{}^*(t) = maks\{P(t), 0\}$$

$$I_\infty * (t) = I_0 e^{-\theta_1 t} + \int_0^t [P_\infty{}^*(s) - D(s) - \theta_2] e^{\theta_1 (s-t)}\, ds$$

Rangkuman

1. Riset operasi merupakan sebuah teknik analisis kuatitatif, ada juga sebagai *"scientific method"* (metode ilmiah), atau sebagai dasar pengambilan keputusan dengan prinsip optimasi, yaitu untuk mengoptimalkan hasil.
2. Masalah riset operasi muncul pertama kali di Inggris selama Perang Dunia II, mereka menanamkan pendekatan *Operation Research* untuk meneliti masalah-masalah operasional selama perang dan pendekatan tersebut sangat berhasil. Hal ini menyebabkan Riset Operasi didefinisikan sebagai "Seni memenangkan perang tanpa berperang" (Whitehouse, 1976).
3. Riset Operasi berguna bagi para *decision maker* dalam menghadapi masalah-masalah pengalokasian sumber daya-sumber daya yang langka dan terbatas.

4. Tujuan riset operasi sendiri adalah untuk menerapkan pendekatan ilmiah guna memecahkan/menganalisis permasalahan kemudian mengambil langkah-langkah secara sistematis untuk mencapai tujuan/hasil yang memuaskan yaitu hasil optimal yang juga berarti dampak positifnya maksimum dan dampak negatifnya minimum.
5. Model matematika inventori yang dikembangkan solusinya untuk nilai t menuju tak hingga, dengan asumsi bahwa $\rho > 0$. Untuk kasus tak hingga, kondisi akhir $\lambda(T) = 0$ akan diubah menjadi $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$, dimana nilai λ merupakan adjoint fungsi yang terdapat dalam masalah ($\mathcal{P}$) dengan mempergunakan produksi rata-rata P(t) selalu terbatas dan juga ${K_1}^2(P(t) - \hat{P})$ adalah terbatas. Melibatkan fungsi Hamiltonian yang diselesaikan dengan prinsip maksimum Pontryagin. Solusi optimal diberikan detail dengan menggunakan fungsi eksogen. Ini akan bermanfaat sebagai salah satu bentuk solusi dengan menggunakan fungsi eksogen. Kita mendapatkan prosedur solusi bisa menjadi lebih atau sedikit sukar, hal ini akan bergantung pada bentuk fungsi yang akan diperoleh.

Contoh Soal dan Pembahasan

1. Biaya penyimpanan dan pemeliharaan di gudang adalah 40% dari nilai persediaan di gudang. Biaya pesanan adalah Rp15.000.000,00 setiap kali pesanan. Jumlah material yang dibutuhkan selama setahun sebanyak 1.200 unit dengan harga

Rp1.000.000,00 per-unit, berapa unit yang harus dibeli setiap kali pesanan jika menggunakan metode EOQ?

2. Suatu perusahaan membeli 8000 unit produk per tahun dengan harga Rp. 10.000/unit.Biaya pemesanan setiap kali pesan sebesar Rp. 30.000. Biaya penyimpanan per unitadalah Rp. 3.000. Berapa besar jumlah pesanan yang harus dilakukan setiap kalipesan, berapa biaya total minimumnya, frekuensi pemesanan dalam setahun danberapa reorder pointnya jika diketahui lead time adalah 2 minggu.
3. Dari contoh soal diatas, berapa EOQ apabila backordering diperbolehkan dengan diketahui harga dar biaya shortage Rp. 1.000 per unit per tahun?
4. Toko Kubota rata-rata menjual 1.000 generator per bulan dan permintaan generator selama satu tahun diperkirakan konstan. Toko Kubota akan menetapkan kebikajan pemesanan sebanyak 2.000 generator setiap kali pemesanan dengan waktu tunggu (lead time) 6 hari. Bagian kalkulasi biaya telah menetapkan bahwa biaya setiap kali pemesanan adalah Rp. 600.000 dan biaya penyimpanan tahunan adalah 10.000 per unit. Tentukan TIC, EOQ dst
5. Sebuah toko pusat oleh-oleh khas Banyumas yang bernama “Pusat Kripik Trisoda” yang berada di lokawisata Baturaden mampu menjual kripik pisang rata-rata 50 bungkus perharinya. Besar permintaan tersebut diperkirakan konstan setiap harinya. Pihak manajemen toko menetapkan melakukan pemesanan ke bagian produksi sebesar 3000 bungkus setiap kali pemesanan dengan waktu tunggu 6 hari dengan biaya

Rp200.000,- dalam sekali pemesanan. Biaya penyimpanan per bungkus keripik pisang adalah sebesar Rp5.000,-. Jika toko tersebut menerapkan sistem 30 hari kerja per bulan, tentukan biaya minimum tahunan yang harus dikeluarkan dan siklus pemesanan kembali yang harus diterapkan oleh toko tersebut.

Pembahasan

1. **Penyelesaian:**

   EOQ $= \sqrt{\frac{2*R*C}{C*CC}}$

   $= \sqrt{\frac{2*1200*15000000}{1000000*0{,}4}}$

   $= \sqrt{90000}$

   = 300 unit

   Jadi, cara pembelian yang paling ekonomis ialah pembelian bahan sebanyak 300 unit sekali pesanan dari kebutuhan material 1200 unit selama setahun. Berarti banyaknya pesanan adalah 4 kali pesanan.

2. **Penyelesaian:**

   R= 8000 Unit		P= Rp10.000		L= 2 Minggu

   C= Rp30.000		H= Rp3.000

   Qo = EOQ

   $= \sqrt{\frac{2*C*R}{H}}$

   $= \sqrt{\frac{2*30000*8000}{3000}}$

   = 400 Unit

   TCo = H*Qo = 3.000*400 = Rp. 1.200.000

N = R/Qo = 8.000/400 = 20

B = (R*L)/52 = (8.000*2)/52 = 307,7 unit.

Jadi, cara pembelian yang paling ekonomis ialah pembelian bahan sebanyak 400 unit sekali pesanan dari kebutuhan perusahaan adalah 8000 unit produk selama setahun. Berarti frekuensi pesanannya adalah 20 kali pesanan selama setahun. Memiliki biaya total minimumnya adalah Rp1.200.000,00 dengan titik pemesanan kembali ialah 307,7 unit.

3. Penyelesaian:

R= 8000 Unit P= Rp10.000 L= 2 Minggu

C= Rp30.000 H= Rp3.000 K= Rp1.000

$$Qo = \sqrt{\frac{(2*C*R)}{H}}\sqrt{\frac{H+K}{K}}$$

$$= \sqrt{\frac{2*30000*8000}{3000}}\sqrt{\frac{3000+1000}{1000}}$$

= 400*2

= 800 Unit

$$Vo = \sqrt{\frac{2*C*R}{H}}\sqrt{\frac{K}{H+K}}$$

$$= \sqrt{\frac{2*30000*8000}{3000}}\sqrt{\frac{1000}{3000+1000}}$$

= 400*0,5

= 200 Unint

$$TC = \sqrt{\frac{C*R}{Q}} + \frac{H*V}{2Q} + \frac{K(Q-V)^2}{2Q}$$

= Rp 600.000,00

4. Penyelesaian:

R= 1.000 x 12 = 12.000

S= Rp 600.000,00

C= 10.000

$EOQ \quad = \sqrt{\frac{2*12000*600000}{10000}}$

= 1.200 Unit

TOC = Total biaya pemesanan per tahun

$= \frac{12000}{1200} * 600000$

= 6000000

TCC = Total biaya peyimpanan per tahun

$= \frac{EOQ}{2} * 10000$

= 6000000

TC = Total biaya tahunan Minimum

$= \frac{12000}{1200} * 600000 + \frac{1200}{2} * 10000$

= Rp12.000.000,00

*F** = Frekuensi pemesanan optimum per tahun

$= \frac{12000}{1200}$

= 10 Kali

T = Jarak siklus optimum

$= \frac{1200}{12000000}$

= 0,1

Toko Kubota memiliki cara pembelian yang paling ekonomis ialah pembelian bahan sebanyak 1.200 unit sekali pesanan dari kebutuhan perusahaan adalah 12.000 unit generator selama setahun. Berarti jarak siklus optimumnya adalah 0,1.

5. Penyelesaian:

R = 50*30*12

= 18.000 bungkus

S = biaya pemesanan

= Rp200.000,00

C = Biaya peyimpanan per tahun

= Rp5.000,00 per bungkus

ROP = Jumlah rata-rata pemesanan per hari $\times$*lead time*

= 50*6

=300 Bungkus

EOQ $= \sqrt{\frac{2*18000*20000}{5000}}$

= 1.200 Bungkus

TOC = Total pemesanan per tahun

$= \frac{18000}{1200} * 20000$

= Rp3.000.000,00

TCC = Total biaya penyimpanan Pertahun

$= \frac{1200}{2} * 2000$

= Rp 1.200.000,00

TC = Total biaya tahunan minimum

= TOC + TCC

= 3.000.000 + 1.200.000

= Rp 4.200.000,-

*F** = Frekuensi Pemesanan Optimum per tahun

$= \frac{12000}{1200}$

= 10 Kali

T = Jarak siklus optimum

$= \frac{1200}{12000000}$

= 0,1

BAB 5
TEORI PERMAINAN

<u>Tujuan pembelajaran</u>

Bab ini bertujuan agar mahasiswa mampu menguasai konsep tentang Teori Permainan juga strategi yang digunakan dalam Teori Permainan ini adalah *Two Person Zero Sum Game* yaitu permainan atau persaingan yang melibatkan hanya dua pemain atau dua pihak disebut permainan dua orang. Mampu memformulasikan penyelesaian masalah prosedural model dari sistem baik yang diterministik maupun probabilistik serta mampu mampu merekonstruksi, memodifikasi, menganalisis/berpikir secara terstruktur terhadap permasalahan yang digunakan dalam Teori Permainan diantaranya strategi murni, strategi campuran, prosedur penyelesaian grafik, dilema tahanan, delima tahanan kooperatif, aturan dominasi strategi terdominasi dan strategi dominan, dan juga bisa diselesaikan dengan pemrograman linear.

5.1 Pendahuluan

Teori Permainan adalah bagian dari ilmu matematika yang mempelajari interaksi antar agen, dimana tiap strategi yang dipilih akan memiliki *payoff* yang berbeda bagi tiap agen. Pertama kali dikembangkan sebagai cabang tersendiri dari mulai matematika oleh *Oskar Morgenstern* dan *John Von Neumann*, cabang ilmu ini telah berkembang sedemikian pesat hingga melahirkan banyak tokoh peraih nobel, seperti *John Nash*(AS), *Reinhard Selten* (Jerman), dan *John Harsanyi*(AS) pada tahun 1999 dan *Thomas Schelling*(AS), *Robert Aumann*(Israel) pada tahun 2005, dan *Leonid Hurwicz* (Amerika

Serikat) pada tahun 2007. Teori permainan yang mula-mula dikembangkan oleh ilmuan Prancis bernama *Emile Borel* ini, secara umum digunakan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan tindakan sebuah unit bisnis (misalnya) untuk memenangkan persaingan dalam usaha yang digelutinya. Seperti diketahui, bahwa dalam praktek sehari-hari, setiap unit usaha atau organisasi pada umumnya harus berhadapan dengan para pesaing. Untuk memenangkan persaingan itulah, diperlukan analisis dan pemilihan strategi pemasaran tepat, khususnya strategi bersaing yang paling optimal bagi unit usaha atau organisasi yang bersangkutan.

Teori permainan dikenal orang kembali setelah munculnya karya bersama yang gemilang dari John von Neumann dan V. Morgenstern pada tahun 1944 dengan judul *Theory of games and economic behavior*.

Teori ini bertitik-tolak dari keadaan di mana seseorang pengambil keputusan harus berhadapan dengan orang lain dengan kepentingan yang bertentangan. Masa depan yang dilandasi keputusan yang ia ambil dipengaruhi oleh yang diambil oleh orang lain. Ini mengandung arti, bahwa perolehan dari seorang adalah sama dengan keahlian orang lain. Penyelesaian dari pertentangan antara dua pihak yang bersaingan ini adaah inti dari teori permainan, dengan kata lain, pengambilan keputusan dalam suatu pertentangan umumnya disebut teori permainan. Jadi teori permainan mengandung dua pihak yang bertentangan, pihak I memilih strategi setelah menilai strategi yang dipilih oleh pihak II. Demikian juga pihak II memilih strategi setelah memperkirakan strategi yang dipilih oleh pihak I. teori matematika dalam permainan ini ditunjukan untuk menjelaskan bagaimana tiap pihak yang bertentangan atau tiap pemain memilih strategi mereka yang terbaik.

Teori permainan digunakan untuk mengambil keputusan pada situasi konflik dimana terdapat satu atau lebih pemain (lawan). Lawan atau pemain memiliki intelegensia yang sama. Setiap pemain mempunyai beberapa strategi untuk saling mengalahkan.Teori yang terkenal dari strategi ini adalah *Two-Person Zero-Sum Game* yaitu permainan dengan dua pemain dengan perolehan kemenangan (keuntungan) bagi salah satu pemain merupakan kehilangan (kerugian) bagi pemain lainnya.Jika jumlah kerugian dan keuntungan dari permainannya adalah nol, disebut sebagai permainan sejumlahnol (*zero-sum game)* atau permainan berjumlah konstan sebaliknya disebut sebagai permainan berjumlah bukan nol (*non-zero sum game).*

Tidak setiap keadaan persaingan dapat disebut sebagai permainan (game). Kriteria atau ciri-ciri dari suatu permainan adalah:

1. terdapat persaingan kepentingan di antara pemain,
2. setiap pemain mempunyai sejumlah pilihan, terbatas atau tidak terbatas, yang disebut strategi,
3. aturan permainan untuk mengatur pilihan-pilihan itu disebutkan satu-satu dan diketahui oleh semua pemain,
4. hasil permainan dipengaruhi oleh pilihan-pilihan yang dibuat oleh semua pemain dan hasil untuk seluruh kombinasi pilhan dari pemain diketahui dan didefinisikan secara numerik.

Jadi, permainan (game) adalah suatu bentuk persaingan antara antara dua orang atau pihak atau antara dua kelompok atau grup yang saling berhadapan dan menggunakan aturan-aturan yang diketahui oleh kedua belah pihak yang saling berhadapan. Dalam permainan, pihak pertama disebut dengan pemain baris sedangkan pihak kedua disebut pemain kolom. Anggapannya adalah bahwa setiap pemain (individual atau kelompok) mempunyai kemampuan untuk mengambil keputusan secara bebas dan rasional.

Aturan-aturan dalam permainan meliputi:

1. langkah atau strategi yang dapat dipilih oleh tiap-tiap pemain,
2. informasi yang digunakan oleh setiap pemain yang memilih langkah atau strategi,
3. pembayaran, yang didefinisikansecara numerik, yang harus dipenuhi oleh setiap pemain setelah permainan selesai.

Unsur-unsur dasar teori permainan sebagai berikut:

1. Angka-angka dalam matriks *pay off* (matriks permainan), menunjukkan hasil-hasil (*pay offs)* dari strategi-strategi permainan yang berbeda-beda.
2. Strategi permainan, adalah rangkaian kegiatan atau rencana yang menyeluruh dari seorang pemain sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pemain lain yang menjadi pesaingnya.
3. Aturan-aturan permainan, menggambarkan kerangka dengan mana para pemain memilih strategi mereka.
4. Nilai permainan, adalah hasil yang diperkirakan per permainan atau pay off rata-rata dari sepanjang rangkaian permainan dimana kedua pemain mengikuti atau mempergunakan strategi mereka yang paling baik atau optimal.

5. Suatu strategi dikatakan dominan bila setiap pay off dalam strategi adalah superior terhadap setiap pay off yang berhubungan dalam suatu strategi alternative.
6. Suatu strategi optimal adalah rangkaian kegiatan atau rencana yang menyeluruh yangmenyebabkan seorang pemain dalam posisi yang menguntungkan tanpa memperhatikan kegiatan-kegiatan para pesaingnya.
7. Tujuan dari model permainan adalah mengidentifikasikan strategi atau rencana optimal untuk setiap pemain

Konsep-konsep teori permainan paling tidak sangat penting untuk beberapa hal berikut ini:

1) Mengembangkan suatu kerangka untuk analisis pengambilan keputusan dalam situasi- situasi persaingan (dan kadang-kadang kerja sama).
2) Menguraikan suatu metode kuantitatif yang sistematis yang memungkinkan para pemain yang terlibat persaingan untuk memilih strategi-strategi yang rasional dalam pencapaian tujuan mereka.
3) Memberikan gambaran dan penjelasan fenomena situasi-situasi persaingan atau konflik.

Teori permainan digunakan untuk mengambil keputusan pada situasi konflik dimana terdapat satu atau lebih pemain (lawan). Lawan atau pemain memiliki intelegensia yang sama. Setiap pemain mempunyai beberapa strategi untuk saling mengalahkan. Teori yang terkenal dari strategi ini adalah Two-Person Zero-Sum Game yaitu permainan dengan dua pemain dengan perolehan kemenangan (keuntungan) bagi salah satu pemain merupakan kehilangan (kerugian) bagi pemain lainnya. Jika jumlah kerugian dan keuntungan dari permainannya adalah nol, disebut sebagai permainan sejumlah nol (zero-sum game) atau permainan berjumlah konstan sebaliknya disebut sebagai permainan berjumlah bukan nol (non-zero sum game).

Salah satu jenis permainan adalah Dilema Tahanan dengan prinsip sebagai berikut:

1. Polisi menangkap 2 tersangka sebuah kasus kriminal.
2. Mereka diinterogasi secara terpisah, dan tidak ada komunikasi di antara mereka.
3. Karena bukti-bukti belum cukup, maka polisi memberi mereka2 pilihan: menyangkal atau mengakui keterlibatan mereka berdua.
4. Jika keduanya menyangkal, maka A dan B akan mendapat hukuman penjara 1 tahun.
5. Jika A menyangkal dan B mengaku, maka A akan diganjar 10 tahun penjara, dan B bebas.
6. Jika A mengaku dan B menyangkal, maka A bebas dan Bmendapat hukuman 10 tahun.
7. Jika keduanya mengaku, masing-masing akan diganjar 8 tahun.

Disebut menjadi Dilema Tahanan Kooperatif

1. Jika Napi A dan Napi B dapat mengadakan komitmen yang mengikat, maka mereka akan memilih {menyangkal, menyangkal}, dengan ganjaran masing-masing 1 tahun penjara. Dalam hal ini, outcome-nya lebih baik dibandingkan tanpa komitmen (game nonkooperatif)

2. Game tetap harus bersifat simultan (A dan B bertindak secara serentak) dan informasi tidak sempurna (Baik A dan B tidak mengetahui apa pilihan lawannya, sebelum keduanya menetapkan pilihannya)Sebab jika A mengetahui B "menyangkal", maka A jelas akan"mengaku", sehingga A bebas (namun B dipenjara 10 tahun).
3. Jadi, outcome dari suatu game dapat ditingkatkan jika para pemain saling kooperatif.

5.2 Definisi Teori Permainan Menurut Beberapa Ahli

Menururt Dimiyati (1992), teori permainan (*game theory*) adalah bagian dari ilmu pengetahuan yang berkaitan dengan pembuatan keputusan pada saat ada dua pihak atau lebih berada dalam kondisi persaingan atau konflik. Pihak-pihak yang bersaing ini disumsikan bersifat rasional dan cerdas, artinya masing-masing pihak akan melakukan strategi tindakan yang rasional untuk memenangkan persaingan itu, dan masing-masing pihak juga mengetahui strategi pihak lawannya. Selanjutnya pihak ini disebut pemain.

Menurut Ayu (1996), *game theory* merupakan suatu pendekatan matematis untuk merumuskan situasi persaingan dan konflik antara berbagai kepentingan. *Game theory* melibatkan dua atau lebih pengambil keputusan atau yang disebut pemain. Setiap pemain dalam game theory mempunyai keinginan untuk menang.

5.3 Manfaat Teori Permainan

Manfaat tersebut tidak lepas dari orang yang terlibat serta yang pertama kali mengemukakan game theory, yaitu seorang ahli matematika Perancis *Emile Borel* (1921). Kemudian dikembangkan oleh *John V,N* dan *Oscar Mogenstern* lebih lanjut sebagai alat untuk merumuskan perilaku ekonomi yang bersaing. Model-model teori permainan diklasifikasikan dengan sejumlah cara, seperti jumlah pemain, jumlah keuntungan dan kerugian dan jumlah strategi yang digunakan dalam permainan.

Berikut Manfaat dari *Game Theory*:

1. Mengembangkan suatu kerangka untuk pengambilan keputusan dalam suatu persaingan.
2. Menguraikan metode kuantitatif yang sistematik bagi pemain yang terlibat dalam persaingan untuk memilih strategi yang tradisional dalam pencapaian tujuan.
3. Memberi gambaran dan penjelasan penomena situasi persaingan / konflik.
4. Membuat strategi negosiasi, ataupun strategi dalam persaingan bisnis yang diwarnai oleh terjadinya konflik.

Berikut ini akan diuraikan beebrapa unsur atau elemen dasar yang penting dalam penyelesaian dari setiap kasus dengan teori permainan dengan menganbil permainan dua pemain jumlah nol.Table permainan dua pemain jumlah nol

Pemain A	Pemain B		
	B_1	B_2	B_3
A_1	1	9	2
A_2	8	5	4

Dari tabel diatas dapat diuraikan unsur-unsur dasar teori permainan:

1. Angka-angka dalam matriks *payoof*, atau biasa disebut matriks permainan, menunjukan hasil-hasil dari strategi-strategi

permainan yang berbeda-beda. Hasil-hasil ini dinyatakan dalam dua pemain jumlah nol, bilang-bilangan positif menunjukkan keuntungan bagi pemian baris *(maximizing player).* Sebagai contoh, bila pemain A mempergunakan strategi A_1 dan pemain B memilih strategi B_2, maka hasilnya A memperoleh keuntunagn 9 dan B kerugian 9, anggapannya bahwa matriks *payoff* diketehui oleh kedua pemain.

2. Suatu strategi permainan adalah rangkaian kegiatan atau rencana yang menyeluruh dari seorang pemain, sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pemain lain yang menjadi pesainganya. Dalam hal ini dianggap bahwa suatu strategi tidak dapat dirusak oleh para pesaing atau faktor lain. Dalam table dia tas pemain A mempunyai 2 strategi yaitu A_1 dan A_2 dan pemain B mempunyai 3 strategi (B_1,B_2,B_3).
3. Aturan-aturan permainan menggambarkan kerangka dengan mana para pemain memilih strategi merela. Sebagai contoh, dipakai anggapan bahwa para pemain harus memilih strategi-strategi mereka secaa simultan dan bahwa permainana dan bahwa permainan adalah berulang.
4. Nilai permainan adalah hasil yang diperkirakan permainan atau *payoff* rata-rata dari sepanjang rangkaian permainan, dimana kedua pemain mengikuti atau mempergunakan strategi mereka yang paling baik atau optimal. Suatu permainan dikatakan *"adil" (fair)* apabila nilainya nol, dimana tak ada pemain yang memperoleh keuntungan atau kemenangan. Permainan dikatakan *"tidak adil" (unfair)* apabila nilainya bukan nol.

5. Suatu strategi dikatakan dominan bila setiap *payoff* dalam strategi adalah superior terhadap setiap *payoff* yang berhubungan dalam suatu strategi alternatif. Nilai permainan adalah 4 aturan dominan ini dapat digunakan untuk mengurangi ukuran matriks *payoff* dan upaya perhitungan.
6. Suatu strategi optimal adalah rangkaian kegiatan, atau rencamna yang menyeluruh, yang menyebabkan seorang pemain dalam posisi yang paling menguntungkan tanpa memperhatikan kegitan-kegiatan para pesaingnya. Pengertian posisi menguntungkan adalah bahwa adanya devisi (penyimpangan) dari strategi optimal, atau rencana optimal, akan menurunkan *payoff*.
7. Tujuan dari model permainan adalah mengidentifikasikan strategi atau rencana optimal untuk setiap pemain. Dari contoh diatas, strategi optimal untuk A adalah A_2, dan B_3 adalah strategi optimal untuk B.

5.4 Strategi Murni (Pure-Strategy Game)

Penyelesaian dilakukan dengan menggunakan konsep maksimin untuk pemain baris dan minimaks untuk pemain kolom. Dalam strategi ini pemain akan menggunakan satu strategi tunggal untuk mendapat hasil optimal saddle point yang sama.

Pada *pure strategy game*, pemain yang akan memaksimumkan (pada contoh adalah pemain A) akan mengidentifikasi strategi yang optimumnya dengan menggunakan kriteria maksimum, sedangkan pemain yang akan meminimumkan (pemain B) akan mengidentifikasi strategi optimumnya dengan menggunakan kriteria minimaks, maka permainan telah terpecahkan. (untuk menguji hal ini, nilai tersebut harus merupakan nilaimaksimum bagi kolom yang bersangkutan, dan sekaligus merupakan nilai minimum bagi baris yang bersangkutan). Dalam kasus seperti ini maka telah mencapai titik keseimbangan. Titik ini dikenal dengan titik sadel *(saddle point)*.

Jika nilai maksimin tidak sama dengan nilai minimaks, maka titik keseimbangan tidak akan dapattercapai. Hal ini berarti bahwa saddle pointnya tidak ada dan permainan tidak dapat diselesaikan dengan strategi murni.

Konklusi dari kriteria maksimin dan kriteria minimaks sebagai berikut:

a) Kriteria maksimin (untuk pemain yang memaksimumkan)

   Dapatkan nilai minimum dari masing-masing baris. Nilai terbesar (nilai maksimum) dari nilai-nilaiminimum ini adalah nilai maksimin. Dengan demikian, maka untuk permainan denagn strategi murni ini, strategi optimumnya adalah baris tempat nilai maksimin tersebut.

b) Kriteria minimaks (untuk pemain yang meminimumkan)

   Dapatkan nilai maksimum pada masing-masing kolom. Nilai terkecil (nilai minimum) dari nilai-nilaimaksimum ini adalah nilai minimaks. Dengan demikian, maka untuk permainan dengan strategi murni ini, strategi optimumnya adalah kolom tempat nilai minimaks terletak.

5.5 Strategi Campuran (Mixed-Strategy Game)

Strategi ini dilakukan bila strategi murni belum memberi penyelesaian optimal. Sehingga perlu dilakukan tindak lanjut untuk mendapat titik optimal, dengan usaha mendapatkan saddle point yang sama. *Mixed-strategy* game digunakan pada pemainan yang tidak mempunyai *saddle point*, ada beberapa cara untuk menyelesaikan persoalan ini diantaranya dengan cara grafis dan program linier.Solusi grafis dari permainan (2 x N) atau (M x 2) Pemecahan grafis hanya dapat diterapkan jika salah seorang pemain mempunyai 2 strategi. Jika keduanya mempunyai lebih dari 2 strategi, maka dapat diselesaikan setelah strategi yang didominasi strategi lain dihilangkan.

Bila suatu permainan tidak mempunyai titik sadel, maka teori permainan menyerahkan setiap pemain untuk menetapkan distribusi peluang dari strategi yang akan diterapkannya. Untuk menyataan secara matematis, misalkan:

$$x_i = probability\ that\ player\ 1\ will\ use\ strategy\ i (i = 1,2,\dots,m)$$

$$y_j = probability\ that\ player\ 2\ will\ use\ strategy\ j\ (j = 1,2,\dots,n)$$

Dimana m dan n berturut-turut adalah banyaknya strategi yang mungkin. Jadi pemain I dapat menyebutkan rencananya untuk memainkan permainan dengan memberikan nilai $x_1, x_2, \dots, x_m$. Karena nilai-nilai ini adalah peluang, maka nilainya tidak negatif dan jumlahnya 1. Dengan cara yanag sama, rencaan pemain II dapat digambarkan oleh nilai-nilai $y_1, y_2, \dots, y_n$. Rencana $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ dan $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ bisa disebut strategi campuran *(mixed strategies)* dan strategi awal disebut *strategi murni (pure strategies).*

Dalam permainan ini sesungguhnya, setiap pemain menggunkana strategi murni yang dipilih dengan menggunakan satu cara untuk memperoleh pengamatan acak dari distribusi peluang yang diterima oleh strategi campuran.

Walaupun tidak ada alat yang memuaskan sepenuhnya untuk menghitung strategi campuran, tetapi *expeced payoof* merupakan salah satu cara yang sangat berguna. Dengan menerapkan definisi teori peluang untuk nilai harapan diperoleh.

$$Expected\ payoff\ for\ player\ 1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_i y_j$$

Dimana p_{ij} adalah "*payoff*" jika pemain I mengunakan strategi i dan pemain II menggunkaan strategi j.

Menggunakan ukuran ini, teori permainan memperluas konsep kriteria minimaks bagi prmainan yag tidak mempunyai titik sadel. Dalam konteks ini, kriteria minimaksmengharuskan pemain memilih strategi campuran yang meminimumkan harapan kerugian maksimum. Bila kita memfokuskan pada *payoff* (pemian I) daripada kesalahan (pemian II) maka kriteria ini setara dengan maksimin yang memaksimumkan harapan *payoff* minimum. Yang dimaksdu dengan harapan *payoff* minimum adalah harapan *payoff*ynag terkecil yang dapat dihasilkan oleh sembarang strategi campuram yang dapat ditangkis oleh lawan. Jadi strategi campuran yang optimal untuk pemain I menurut kriteria ini adalah strategi yang menghasilkan jaminan (minimum harapan *payoff*) paling bia. (Nilai dari jaminan terbaik, nilai mkasimin, dinyatakan sebagai). Dengan cara yang serupa. Strategi optimal untuk pemian II adalah strategi yang memberikan jaminan terbaik, dimana yang terbaik adalah minimum dari jaminan adalah harapan kerugian maksimum. (Garansi terbaik adalah nilai minimaks dinyatakan oleh $\bar{v}$.

Ingat kembali, bila hanya strategi murni yang digunakan dari permainan tidak mempunyai *titik sadel* maka taka da penyelesaian stabil. Alasan yang mendasar adalah $\underline{v} < \bar{v}$, sehingga pemain selalu ingin mengubah strateginya untuk memperluas posisi. Hal yang sama untu permainan dengan strategi campuran, adalah perlu $v = \bar{v}$untuk penyelesaianoptimal agar menjadi stabil, berdasrkan teorema minimak dari teorema permainan, kondisi ini selalu dipengaruhi oleh permainan tertentu.

Teorema Minimaks: jika strategi campuran diperbolehkan, maka pasangan strategi campuran yang optimal berdasarkan kriteria minimaks menghasilkan penyelesaian stabil dengan $v = \bar{v}$ (*"payoff"* permainan). Jadi kedua pemain tidak dapat berbuat lebih baik dengan mengubah strategi secara unilateral.

5.6 Aturan Dominansi pada Teori Permainan

Sebelum menyelesaikan suatu permainan perlu dipertinmbangkan apakah ada baris atau kolom dalam matriks pembayarannya yang tidak efektif pengaruhnya di dalam penentuan strategi optimum dan nilai permainan. Bila ada maka baris atau kolom yang seperti itu bisa dihapus atau tidak dipakai, Hal itu berarti bahwa probabilitas untuk memilih strategi sesuai baris atau kolom tersebut sama dengan nol.

Dengan demikian ukuran matriks pembayaran yang tersisa akan lebih kecil. Hal ini akan lebih mempermudah untuk menyelesaikannya. Aturan demikian ini dinamakan aturan dominansi.

a. Aturan dominansi bagi pemain pertama P1 (pemain baris). Karena pemain P1 (pemain baris) merupakan pemain yang berusaha untuk memaksimumkan kemenangan/perolehannya maka aturan dominansinya adalah sebagai berikut: bila terdapat suatu baris dengan semua elemen dari baris tersebut adalah sama (sekolom) dari baris yang lain maka baris tersebut dikatakan didominansi dan baris itu telah dihapus.

b. Aturan dominansi bagi pemain kedua P2 (pemain kolom). Karena pemain kedua P2 merupakan pemain yang berusaha untuk meminimumkan kekalahan/kerugiannya maka aturan dominansinya adalah sebagai berikut : bila terdapat suatu kolom dengan semua elemen dari kolom tersebut adalah sama atau lebh besar dari elemen dalam posisi yang sama (sebaris) dari kolom yang lain maka kolom tersebut dikatakan didominansi dan kolom itu dapat dihapus. Aturan dominansi ini dapat diulang lagi jika masih ada baris atau kolomnya yang didominansi oleh baris atau kolom yang lain. Dan ini memungkinkan matriks pembayaran semula akan tersisa menjadi matriks pembayaran dengan satu elemen saja. Bila hal ini dapat terjadi maka permainannya dapat diselesaikan dengan strategi murni dengan nilai permainan sesuai dengan elemen yang tersisa tersebut. Tetapi tidak semua permainan yang mempunyai titik pelana dapat diselesaikan dengan aturan dominansi yang berulang- ulang tersebut.

5.6.1 Strategi Terdominasi dan Strategi Dominan

Strategi terdominasi adalah strategi yang inferior terhadap sejumlah strategi lain, untuk setiap strategi yang dipilih lawan (dengan kata lain, payoff strategi tersebut ≤ payoff sejumlah strategi lainnya).

Strategi dominan adalah strategi yang memiliki payoff tertinggi dibandingkan dengan strategi lainnya. Misalkan strategi “X” adalah strategi dominan bagi pemain A, maka apapun strategi yang dipilih pemain B, pemain A tetap akan memilih strategi “X”. Strategi mendominasi adalah strategi X dikatakan mendominasi strategi Y jika payoff strategi X ≥ payoff strategi Y, untuk setiap strategi yang dipilih lawan.

5.7 Prosedur Penyelesaian Grafik padaTeori Permainan

Pandangan permaian dengan suatu strategi campuran, setelah strategi yang didominasi strategi lain dihilangkan, maka pemian tinggal memilih 2 strategi murni. Misalkan pemain tersebut adalah pemian I. karena strategi campuran adalah (x_1, x_2)dan $x_1 = 1 - x_1$, maka perlu dicari penyelesaian optimal untuk x_1, membuat plot harapan *payoff* sebagai fungsi dari x_1 untuk setiap strategi murni lawan sangat mudah. Grafik ini dapat digunakan untuk mengidentifikasi titik yang memaksimumkan harapan *payoff* minimum. Strategi campuran minimaks lawan juga dapat ditunjukan oleh grafik tersebut.

Untuk menggambarkan prosedur ini, perhatikan *Variasi 3*, masalah kampanye politik (lihat table 12-5). Ingat kembali strategi murni ke 2 sehingga table *payoff* dapat disederhanakan menjadi table 12-6. Oleh sebab itu untuk setiap strategi murni yang berlaku untuk pemain II, harapan *payoff* untuk pemian I menjadi:

(y_1, y_2, y_3)	Harapan *payoff*
(1,0,0)	$0x_1 + 5(1 - x_1) = 5 - 5x_1$
(0,1,0)	$-2x_1 + 4(1 - x_1) = 4 - 6x_1$
(0,0,1)	$2x_1 - 3(1 - x_1) = -3 + 5x_1$

Sekarang, gambar garis harapan *payoff*ditunjukan untuk setiap nilai x_1 diberikan dan (y_1, y_2, y_3)harapan *payoff*akan sesuai dengan:

$$\begin{aligned}&Expected\ payoff\ for\ player\ I\\ &\qquad = y_1(5 - 5x_1) + y_2(4 - 6x_1) + y_3(-3 + 5x_1)\end{aligned}$$

Minimum harapan *payoff* ditunjukan oleh titik pada garis terbawah. Berdasarkan kriteria minimaks (atau maksimin), pemain I harus memilih nilai x_1 yang memberikan harapan *payoff* minimum yang terbesar sehingga

$$\underline{v} = v = maks_{0 \le x_1 \le 1}\{\min(-3 + 5x_1, 4 - 6x_1)\}$$

Jadi nilai optimal untuk x_1 adalah titik potong kedua garis $(-3 + 5x_1)$ dan $(4 - 6x_1)$. Selesaikan persamaan

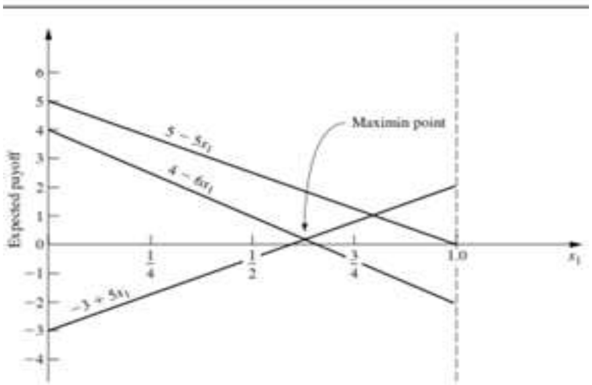
$$-3 + 5x_1 = 4 - 6x_1$$

Diperoleh $x_1 = \frac{7}{11}$ dan $(x_1, x_2) = (\frac{7}{11}, \frac{4}{11})$ adalah strategi campuran optimal untuk pemain I, serta dari permainan:

$$\underline{v} = -3 + 5\left(\frac{7}{11}\right) = \frac{2}{11}$$

Table *payoff* dipersingkat untuk variasi 3 dari masalah tersebut

		Probability	Player 2		
			y_1	y_2	y_3
	Probability	Pure Strategy	1	2	3
Player 1	x_1	1	0	−2	2
	$1 - x_1$	2	5	4	−3



Gambar 5.1 Prosedur grafik untuk menyelasikan permainan.

Untuk mencari strategi optimal yang sesuai dengan pemain II, perhatikancara berikut ini. Menurut definisi nilai minimaks $\bar{v}$ dan teorema mini aks *payoff* yang dihasilkan dari stretagi optimal $(y_1\ ,y_2, y_3) = (y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ akan memenuhi kondisi:

$$y_1^*(5-5x_1) + y_2^*(4-6x_1) + y_3^*(-3+5x_1) \leq \bar{v} = v = \frac{2}{11}$$

Untuk setiap nilai $x_1(0 < -x_1 \leq 1)$. Bila pemian Ibermain optimal (yaitu $x_1 = \frac{2}{11}$), pertaksamaan ini menjadi persamaan, sehingga:

$$\frac{20}{11}y_1^* + \frac{2}{11}y_2^* + \frac{2}{11}y_3^* = v = \frac{2}{11}$$

Karena (y_1, y_2, y_3)adalah distribusi peluang maka

$$y_1^* + y_2^* + y_3^* = 1$$

Akibatnya, diperoleh $y_1^* = 0$, karena jika $y_1^* \geq 0$ akan bertentangan dengan 2 persamaan terakhir yaitu harapan *payoff* pada grafik di $x_1 = \frac{7}{11}$ ada di aats titik maksimin. (secara umum, sembarang garis yang tidak melalui titik maksimin harus diberikan bobot 0, untuk menghindari harapa *payoff*naik diatas titik tersebut).

Jadi

$$y_2^*(4-6x_1) + y_3^*(-3+5x_1)\begin{cases} \leq \dfrac{2}{11} & untuk\ 0 \leq x_1 \leq 1 \\ = \dfrac{2}{11} & untuk\ x_1 = \dfrac{7}{11} \end{cases}$$

Tetapi y_2^* dan y_3^* adalah bilangan, sehingga bagian kiri adalah persamaan garis lurus yang merupakan rata-rata tertimbang dengan bobot 2 garis berbawah dari grafik karena ordinat garis ini harus sama dengan $\frac{2}{11}$ di $x_1 = \frac{7}{11}$ dan karena ordinat tidak boleh lebih dari $\frac{2}{11}$, maa garis tersebut harus horizontal. (kesimpulan ini selalu benar, kecuali nilai optimal untuk x_1 adalah 0 atau 1, dalam hal ini pemain II juga harus menggunakan satu strategi murni). Sehingga didapat

$$y_2^*(4-6x_1)+y_3^*(-3+5x_1)=\frac{2}{11} \qquad \text{untuk } 0 \leq x_1 \leq 1$$

Untuk menyelesaikan y_2^* dan y_3^*, pilih dua nilai x_1(misalkan 0 dan 1) dan selesaikan persamaan yang diperoleh

$$4y_2^* - 3y_3^* = \frac{2}{11}$$

$$-2y_2^* + 2y_3^* = \frac{2}{11}$$

Penyelesaian $y_2^* = \frac{5}{11}$ dan $y_3^* = \frac{6}{11}$. jadi strategi campuran optimal untuk pemain II adalah $y_1, y_2, y_3) = (0, \frac{5}{11}, \frac{6}{11})$.

Jika pada masalah lain terdapat lebih dari 2 garis melalui titik maksimin, maka terdapat lebih dari dua y_1^* yang lebih dari kondisi ini akan mengakibatkan terdapat banyak nilai yang sama untuk strategi campuran optimal bagi pemain II. Salah satu strategi seperti itu dapat di identifikasi dengan membuat semua nilai 0 kecuali untuk ke dua y_1^* ini, kemudian selesaikan persamaan yang diperoleh. Untuk kedua persamaan tersebut, garis yang bersesuaian dengan harus mempunyai gradient positif dan garis lainnya bergradien negative.

5.8 Penyelesaian Teori Permainan dengan Program Linear

Setiap permainan ddengan strategi campuran dapat diselesaikan dengan mengubah masalah menjadi pemprograman linear. Seperti akan kitalihat, transformasi ini membutuhkan sedikit lebih banyak jika dibandingkan dengan menerapkan teorema minimkas dan menggunakan definisi nilai maksimin $\underline{v}$ dan nilai minimaks $\bar{v}$.

Pertama, perhatikan bagaimana mencari strategi optimal untuk pemian I.

$$\textit{Expected payoff for player I} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_i y_j$$

Dan strategi $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ optimal jika

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x_i y_j \geq \underline{v} = v$$

Untuk setiap strategi lawan $9y_1, y_2, \dots, y_n)$. Jadi pertidaksamaan ini harus dipenuhi, sebagai contoh, untuk setiap strategi murni pemain II, yaitu untuk setiap strategi $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dimana satu $y_1 = 1$ dan sisanya 0. Subtitusi nilai ke pertaksamaan, diperoleh

$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i \geq v$ untuk $j = 1, 2, \dots, n$

Jadi dari satu pertaksamaan diperoleh n pertaksamaan, selanjutnya, n pertaksamaan mengakibatkan:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i \right) \geq \sum_{j=1}^{n} y_j v = v$$

Karena

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

Karena implikasi ini berlaku dua arah, maka menyelesaikan n pertaksamaan di atas ekivaklen dengan menyelesaikan pertaksamaan baru yang berlaku untuk setiap strategi $(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Tetapi n pertaksamaan ini merupakan kendala pemrograman linear seperti kendala tambahan.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad \text{untuk } i = 1,2,\dots,m$$

Yang dibutuhkan untuk menjamin bahwa x_i adaalh peluang. Jadi setiap penyelesaian $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang memenuhi kendala pemrograman linear adalag strategi optimal yang diinginkan.

Konsekuensinya, masalah mencari strategi campuran optimal telah diunah menjadi mencari penyelesaian layak untuk masalah program linear yang dapat diselesaikan dengan cara yang telah dijelaskan dalam Bab 4. Tetapi masalah adal 2 hal, yaitu (1)v tidak diketahui dan (2) masalah program linear belum mempunyai fungsi tujuan. Dua hal ini dapat diselesakan dengan menggantikan konstanta v yang tidak diketahui dengan perubahan x_{m+1} kemudian maksimumkan x_{m+1} sehinggan x_{m+1} otomatis akan sama dengan v (menurut definisi) pada penyelesaian optimal untuk masalah pemrograman linear.

Dapat disimpulkan bahwa, pemain I harus mencari strategi cmapuran optimal dengan menggunakan metode simplek. Kemudian memproleh strategi campuran optimal pemain II melalui model permainan pertama, maka tidak perlu menyelesaikan model kedua secara langsung. secara umum kita selalu dapat mencari strategi campuran campuran optimal untuk kedua pemain dengan memilih salah satu model, kemudian dengan menggunakan metode simplek diperoleh penyelesaian optimal dan penyelesaian optimal dual.

Rangkuman

1. Teori Permainan digunakan untuk mencari strategi terbaik dalam suatu aktivitas, dimana setiap pemain didalamnya sama-sama mencapai utilitas tertinggi. Penerapannya banyak dilakukan di

berbagai disiplin ilmu seperti biologi, militer, politik, diplomasi dan ilmu sosial.

2. Teori permainan pertama kali dikembangkan oleh ilmuan Prancis bernama *Emile Borel* digunakan untuk menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan tindakan sebuah unit bisnis.
3. Teori permainan dapat diselesaikan dengan strategi murni, strategi campuran dan juga dapat diselesaikan dengan program linear.

Contoh Soal dan Pembahasan

1. Dua perusahaan konstruksi bersaing untuk mendapatkan keuntungan dari pangsa pasar yang ada, dengan mengandalkan strategi yang dimiliki. Putra karya mengandalkan 3 strategi dan permata karya menggunakan 4 strategi.
2. Pengusaha A dan B merebut pasar, mereka saling bersaing dengan menggunakan informasi pasar yang di peroleh riset pemasaran. A dapat memilih 4 daerah potensial dan B memilih 2 daerah potensial. Jika B memilih daerah 1 maka, keuntungan bagi A di daerah 1,2,3 berturut-turut adalah 3, 10, 3 sedangkan jika saat B memilih daerah 4 , maka A akan rugi 2, sedangkan jika B memilih daerah 2 maka keuntungan bagi A didaerah 1,2,3 dan 4 adalah sebanyak 4,6,2,6.
   a) Buat table matrik A dan B
   b) Stategi apa yang harus di lakukan oleh perusahaan A dan B.
3. Dua perusahaan bersaing untuk mendapatkan keuntungan dari pangsa pasar yang ada, dengan mengandalkan strategi yang

dimiliki. A mengandalkan 2 strategi dan B menggunakan 3 strategi.

		Perusahan B		
		Strategi Harga Murah (S1)	Strategi Harga Sedang (S2)	Stratrgi Harga Mahal (S3)
Perusahaan A	Strategi Harga Murah (S1)	1	9	2
	Strategi Harga Mahal (S2)	8	5	4

Pembahasan

1. Penyelesaian:

		Perusahaan PERMATA KARYA			
		Strategi harga murah (S1)	Strategi harga sedang (S2)	Strategi harga mahal (S3)	Strategi harga mahal (S4)
Perusahaan PUTRA KARYA	Strategi harga murah (S1)	2	1	3	4
	Strategi harga mahal (S2)	4	10	13	5
	Strategi harga mahal (S3)	9	7	8	6

Langkah 1

Untuk pemain baris (Perusahaan PUTRA KARYA), pilih nilai paling kecil (baris 1 adalah 1, baris ke 2 adalah 4, dan baris ke 3 adalah 6). Selanjutnya dari dari ke tiga nilai terkecil tersebut, pilih angka yang paling besar yaitu 6.

		Perusahaan PERMATA KARYA				
		Strategi harga murah (S1)	Strategi harga sedang (S2)	Strategi harga mahal (S3)	Strategi harga mahal (S4)	Maximmin
Perusahaan PUTRA KARYA	Strategi harga murah (S1)	2	1	3	4	>1
	Strategi harga mahal (S2)	4	10	13	5	>4
	Strategi harga mahal (S3)	9	7	8	6	>6

Langkah 2

Untuk pemain kolom (Perusahaan PERMATA KARYA), pilih nilai paling besar (kolom 1 adalah 9, kolom 2 adalah 10, kolom 3 adalah 13, dan kolom 4 adalah 6). selanjutnya dari keempat nilai terbesar tersebut, pilih angka yang paling kecil yaitu 6 (rugi yang paling kecil).

		Strategi harga murah (S1)	Strategi harga sedang (S2)	Strategi harga mahal (S3)	Strategi harga mahal (S4)	Maximmin
Perusahaan PUTRA KARYA	Strategi harga murah (S1)	2	1	3	4	>1
	Strategi harga mahal (S2)	4	10	13	5	>4
	Strategi harga mahal (S3)	9	7	8	6	>6
Minimax	>	9	10	13	6	

Dapat disimpulkan:

a. Pemain baris dan pemain kolom sudah memiliki pilihan strategi yang sama yaitu nilai 6 ⇒ optimal.
b. Pilihan tersebut berarti bahwa meskipun perusahaan PUTRA KARYA menginginkan keuntungan yang lebih besar, tapi tetap hanya akan memperoleh keuntungan maksimal 6 dengan strategi harga mahal (S3), demikian juga dengan perusahaan PERMATA KARYA, kerugian yang paling minimal adalah 5, dengan merespon strategi perusahaan PUTRA KARYA, dengan strategi harga mahal (S4).
c. Penggunaan strategi lain berdampak menurunnya keuntungan perusahaan PUTRA KARYA dan meningkatnya kerugian perusahaan PERMATA KARYA.

2. Penyelesaian:

Dari Tabel dapat diselesaikan dengan strategi murni:

		Pengusaha B		Minimum	
	Daerah Pemasaran	1	2		
	1	3	4	3	
Pengusaha A	2	10	6	6	Maksimin
	3	3	2	2	
	4	-2	6	-2	
	Maksimum	10	6	Saddle point	
			Minimaks		

Strategi yang harus di lakukan atau yang harus di pilih oleh perusahaan A dan B untuk mendapatkan keuntungna yang maksimum adalah perusahaan A harus memlih daerah pemasaran 2, dan perusaah B juga memelilih daerah pemasaran 2.

3. Penyelesaian:

		Perusahan B		
		Strategi Harga Murah (S1)	Strategi Harga Sedang (S2)	Stratrgi Harga Mahal (S3)
Perusahaan A	Strategi Harga Murah (S1)	1	9	2
	Strategi Harga Mahal (S2)	8	5	4

Langkah 1

Untuk pemain baris (Perusahaan A), pilih nilai yang paling kecil untuk setiap baris (baris satu nilai terkecilnya 1 dan baris dua nilai terkecilnya 4). Selanjutnya dari dua nilai terkecil tersebut, pilih nilai yang paling baik atau besar, yakni nilai 4.

Langkah 2

Untuk pemain kolom, (perusahaan B), pilih nilai yang paling besar untuk setiap kolom (kolom satu nilai terbesarnya 8, kolom dua nilai terbesarnya 9, dan kolom tiga nilai terbesarnya 4). Selanjutnya dari tiga nilai terbesar, pilih nilai yang kecil untuk perusahaan B, yakni 4.

		Perusahan B			
		Strategi Harga Murah (S1)	Strategi Harga Sedang (S2)	Stratrgi Harga Mahal (S3)	Maximin
Perusahaan A	Strategi Harga Murah (S1)	1	9	2	→ 1
	Strategi Harga Mahal (S2)	8	5	4	→ 4
Minimax	→	8	9	4	

Dapat disimpulkan berdasarkan Tabel:

a. Pemain baris dan pemain kolom sudah memiliki pilihan strategi yang sama yaitu nilai 4 Sehingga Nilai 4 Sebagai hasil Optimal.
b. Pilihan tersebut berarti bahwa meskipun A menginginkan keuntungan yang lebih besar, tapi tetap hanya akan memperoleh keuntungan maksimal 4 dengan strategi harga mahal (S2), demikian juga dengan B, kerugian yang paling minimal adalah 4, dengan merespon strategi A, dengan strategi harga mahal (S3).
c. Penggunaan strategi lain berdampak menurunnya keuntungan A dan meningkatnya kerugian B.

DAFTAR PUSTAKA

Affandi, P., (2014) *Perluasan Model Kendali Optimal Sistem Pergudangan Dengan Produksi Yang Mengalami Kemerosotan. Proseding UAD, Yogyakarta.*

Affandi, P.,(2016). *Perluasan Model Kendali Optimal pada Masalah Inventori yang Mengalami Penurunan Mutu. Proseding Seminar Nasional Matematika Udayana, ISSN 2406-9868.*

Affandi, P.,(2015). Kendali Optimal Dari Sistem Inventori Dengan Peningkatan Dan Penurunan Barang. Jurnal MIPA Unnes,Vol 38, No 1, 79-88.

Coyle, J.J, E.J. Bardi & J.C. Langley. 2006. *Management of Transportation*. Thomson South-Western.

Dantzig, G.B & M.N. Thapa. 1997. *Linear Programming.* Springer-Verlag. New York.

Gunawan, Ellen, Mulia, Ardi Wirda. 1990. *Pengantar Riset Operasi Edisi Kelima Jilid 1*. Wahyarasmana, Dede, editor. Jakarta: Erlangga.

Hiller S. F & J.G.Lieberman. 2010. *Introduction to Operations Research.* McGraw-Hill Education. New York.

Lukmana, Tomi & Trivena, Diana. 2015. *Penerapan Metode EOQ dan ROP (Studi Kasus: PD. BARU).* Jurnal Teknik Informatika dan Sistem Informasi,Volume 1 Nomor 3.

Ramakrishna, C.S. 1988. An Improvement to Goyal's Modified VAM for The Unbalanced Transportation Problem. *J. Opl. Res. Society*. 39: 609-610.

Schulze, A.M. 1998. *Linear Programming for Optimization: Perceptive Scientific Instruments, Inc.* Pergamon Press. New York.

Shimshak, D. G, Kaslik, J. A & Barclay, T. D. 1981. A Modification of Vogel's Approximation Method Through The Use of Heuristics. *Can. J. Opl Res. Inf. Processing*. 19: 259-263.

Siang, Jong Jek. 2011. *Riset Operasi dalam Pendekatan Algoritmis*. Yogyakarta: ANDI.

Sigian P. 2006. *Penelitian Riset Operasional*. Universitas Indonesia UI PRESS Jakarta .

Sinring, Bahar dan Hamzah Hafied. (2012). Riset Operasi. Makassar Kretakupa Print.

Syaifuddin, Dedy Takdir. 2011. *Riset Operasi (Aplikasi Quantitative Analysis for Management)*. Malang : CV Citra Malang.

Taha, A.H. 1992. *Operations Research an Introduction 4th Edition.* McMillan Publishing Company. New Jersey.

Taha, A.H. 2003. *Operations Research: An Introduction. seventh edition.* USA: Pearson Education,Inc

Ullah, M.W, Uddin, M.A dan Kawser, R. 2016. A Modified Vogel's Approximation Method for Obtaining a Good Primal Solution of Transportation Problems.*J. Mechanics of Continua and Mathematical Sciences.* 11: 63-71.

Winston, L. 1976. *Combinatorial Optimization: Networks Ana Matroids.* Pergamon Press. New York.

GLOSARIUM

Inventory adalah persediaan dalam bahasa Indonesia. Persediaan, kaitannya dengan aktivitas logistik sebuah perusahaan, merupakan suatu kegiatan yang menyediakan stok bahan baku atau barang setengah jadi ataupun barang jadi demi kelancaran proses produksi dan/atau pemenuhan permintaan pelanggan.

Program linear adalah suatu metode penentuan nilai optimum dari suatu persoalan linear. Nilai optimum (maksimal atau minimum) diperoleh dari nilai dalam suatu himpunan penyelesaian persoalan linear. Di dalam persoalan linear terdapat fungsi linear yang bisa disebut sebagai fungsi objektif. Persyaratan, batasan, dan kendala dalam persoalan linear merupakan sistem pertidaksamaan linear.

Riset operasi, atau disebut **riset operasional** di Eropa, adalah cabang interdisiplin dari matematika terapan dan sains formal yang menggunakan model-model—seperti model matematika, statistika, dan algoritme—untuk mendapatkan nilai optimal atau nyaris optimal pada sebuah masalah yang kompleks.

Teori Permainan adalah suatu pendekatan matematis untuk merumuskan situasi persaingan dan konflik antara berbagai persaingan. **Teori** ini dikembangkan untuk menganalisa proses pengambilan keputusan dari situasi persaingan yang berbeda dan melibatkan dua atau lebih kepentingan.

Transportasi adalah perpindahan manusia atau barang dari satu tempat ke tempat lainnya dengan menggunakan sebuah kendaraan yang digerakkan oleh manusia atau mesin. **Transportasi** digunakan untuk memudahkan manusia dalam melakukan aktivitas sehari-hari.

INDEKS

TENTANG PENULIS

PARDI AFFANDI, lahir pada 11 Juni 1978 di Padangsidimpuan, Kabupaten Tapanuli Selatan, Sumatera Utara. Berasal dari keluarga sederhana namun punya motivasi yang sangat tinggi dalam menyelesaikan pendidikan. Beliau mengenyam pendidikan formal di SD N 9 Padangsidimpuan, pribadi yang cukup kental dengan nilai-nilai keagamaan, dan lulus tahun 1991. Selanjutnya meneruskan sekolah di SMP Negeri 2 Padangsidimpuan, tamat tahun 1994. Selanjutnya masuk SMA Negeri 2 Matauli, tamat tahun 1997. Dengan kesungguhan beliau dapat diterima di Jurusan Matematika Universitas Sumatera Utara Medan melalui jalur UMPTN. Kuliah di Jurusan Matematika Universitas Sumatera Utara ditekuninya sejak tahun 1997. Walaupun di awal kuliah dilalui dengan perjuangan yang cukup banyak, namun masa-masa ini mampu dilewati dengan sangat baik. Selama duduk dibangku kuliah sudah aktif mengajar di beberapa sekolah, kampus dan Bimbingan belajar yang ada di Medan. Aktivitas mengajar sangat dinikmati sehingga mampu menjadi energi pendukung selama kuliah, sehingga beliau mampu lulus di awal Januari tahun 2001 sekaligus menjadi salah satu yang terbaik di Jurusan Matematika Angkatan 1997.

Selepas meraih Sarjana Matematika di tahun 2001, aktivitas mengajar **PARDI AFFANDI** mulai hijrah ke beberapa daerah di Iuar pulau Sumatera, tepatnya menuju pulau Jawa. Aktivitas mengajar dimulai di kota Bandung dan Jabodetabek. Di pertengahan tahun 2002 mulai berpindah dan tugas mengajar di Banjarmasin daerah Kalimantan Selatan dan diangkat menjadi dosen tetap di FMIPA ULM di awal tahun 2005.

Selanjutnya tahun 2008 pendidikann S2 dilanjutkan di Jurusan Matematika Universitas Gadjah Mada Yogyakarta dan selesai di awal tahun 2011. Saat ini aktif mengajar di Jurusan Matematika FMIPA ULM Banjarbaru, Kalimantan Selatan, Saat ini juga menjabat sebagai Pengurus Himpunan Matematika Indonesia Wilayah Kalimantan Periode 2017-2019 Wakil Ketua II.